PEMODELAN SISTEM METABOLISME MENGGUNAKAN ALJABAR MAX PLUS

Nurwan[1)]
[1)]*Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo*
nurwan@ung.ac.id

Abstrak

Aljabar max plus merupakan salah satu teknik yang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis Sistem Event Diskrit (SED). Dalam makalah ini dibahas aplikasi aljabar max plus dalam menganalisis model sistem metabolisme yang telah didesain dalam bentuk petri net. Elemen aljabar max plus adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ selanjutnya ditulis $\mathbf{R}_{max}$ dengan dua operasi yaitu $\oplus = \text{maksimum}$ dan $\otimes = \text{tambah}$. Model aljabar max plus dari model sistem metabolisme $t(k+1) = A \otimes t(k), k = 1,2,3\ldots$

Kata kunci: Max plus linear, Aljabar max plus, SED, Sistem Metabolisme

Aljabar max plus merupakan salah satu metode analisis untuk mengkaji *Sistem Event Diskrit* dan mempunyai banyak aplikasi. Sejak tahun 1950 aljabar maxplus digunakan sebagai salah satu pendekatan pengambilan keputusan dalambidang*operational research*, (Turek, 2011). Masalah utama dalam *operational research* adalah berkaitan dengan optimasi. Aljabar max plus merupakan alat matematika, di mana operasi aritmatika penambahan diganti dengan menentukan maksimum,dan operasi perkalian digantikan oleh penambahan (Turek, 2011). Aljabar max plus merupakan pendekatan matematika untuk analisis dan pemodelan Sistem Event Diskrit (SED). Beberapa penelitian yang menggunakan aljabar max plus, Turek (2011), menggunakan aljabar max plus dalam melakukan analisis dan pemodelan lampu lalu lintas. Penerapan aljabar max plus dalam model penjadwalan dan kontrol pada sistem manufaktur HVLV (Nasri dkk, 2011). Penerapan aljabar max plus dalam model matematika desain sistem komputer secara paralel, (Konigsberg, 2011). Model matematika dalam bentuk aljabar max plus, kemudian dilakukan analisis stabilitas menggunakan aljabar max plus. Pemodelan servis web menggunakan petri net, masalah penjadwalan menggunakan petri net, (Xiao, 2011). Selain dalam masalah biologi, Petri Net telah banyak dikembangkan dalam dunia industri, penjadwalan, jaringan transportasi, sistem lampu lalu lintas dan lain sebagainya.

PETRINET

Pada bagian ini dibahas konsep Petri Net yang akan digunakan untuk membuat model sistem metabolisme dan menjadi dasar untuk membuat model dalam bentuk aljabar max plus.

Petri Net merupakan salah satu teknik untuk memodelkan Sistem Event Diskrit (SED). Petri Net pertama kali dikembangkan oleh C.A. Petri pada tahun 1960-an. Petri Net berkaitan dengan palce dan transisi yang masing-masing menggambarkan event dan keadaan (*state*). Place berfungsi sebagai input atau output suatu transisi. Selain itu, place berfungsi sebagai kondisi yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi.

Definsi 1 (Cassandras and Lafortune, 2008**).** *Petri Net adalah 4-tuple (P,T,A, w);P adalah himpunan berhingga place;* $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$*; T adalah himpunan berhingga transisi,* $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$*; A adalah himpunan arc,* $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$*; w adalah fungsi bobot,* $w : A \rightarrow \{1,2,3,...\}$

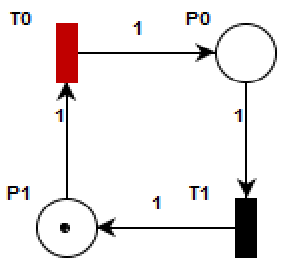
Grafik Petri Net terdiri dari dua bentuk yaitu lingkaran sebagai representasi dari palce, dan garis sebagai representasi dari transisi, sedangkan Arc disimbolkan dengan garis anak panah yang menghubungkan place ke transisi atau transisi ke *place*. Arc yang menghubungkan *palcep$_i$* ke transisi tj berarti $p_i \in I(t_j)$.

Definisi 2(Cassandras and Lafortune, 2008**).** *Penanda (marking) x pada Petri Net adalah fungsi* $x : P \rightarrow \{0,1,2,...\}$

Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat nonnegatif yang menyatakan jumlah token $X = [x(p_1), x(p_2), ..., x(p_n)]^T$. Jumlah elemen **x** sama dengan banyak place di Petri Net.

Transisi pada petri net menyatakan event pada *System Event Diskrit* dan place merepresentasikan kondisi agar event dapat terjadi. *Token* dalam petri net merupakan syarat yang harus dipenuhi oleh place agar transisi dapat di *fire*. Keadaan awal dari petri net bertanda dinyatakan dengan :

$$x = [x(p_1), x(p_2), \cdots, x(p_n)]^T \tag{1}$$



Gambar 1. Petri Net Sederhana

Gambar 1 merupakan salah satu contoh sederhana dari sebuah petri net, jumlah place yang ditandai dengan lingkaran dan transisi yang ditandai dengan garis, dari petri net tersebut adalah dua. Transisi T_0 dalam keadaan enable, karena kondisi P_1 mempunyai satu token sebagai syarat agar T_0 dapat difire. Ketika T_1 difire, maka token akan berpindah ke P_0, yang merupakan syarat T_1 enable. Perpindahan token dari satu place ke place lain menggambarkan suatu kejadian atau perubahan keadaan dengan kondisi tertentu.

Definisi 3 (Cassandras and Lafortune, 2008**).** *Petri Net bertanda (marked) adalah 5-tuple (P, T, A, w, x$_0$) dimana (P, T, A, w) adalah Petri Net dan x$_0$ adalah penanda awal.*

Definisi 4 (Cassandras and Lafortune, 2008**).***Fungsi perubahan keadaan* $f : \{0,1,2,...\}^n \times T \rightarrow \{0,1,2,...\}^n$ *pada Petri Net bertanda (P, T, A, w, x$_0$) terdefinisi untuk transisi* $t_j \in T$ *jika dan hanya jika* $x(pi) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j)$*. Jika* $f(x, t_j)$

terdefinisi maka ditulis $x' = f(x,t_j)$, *dimana* $x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i,t_j) + w(t_j,p_i)$,
untuk $i = 1,2,3,\ldots,n \quad j = 1,2,3,\ldots m$
keadaan Petri Net mengalami *deadlock* apabila tidak ada transisi yang *enable*atau tidak memenuhi kondisi pada Definsi 4.

ALJABAR MAX PLUS

Dalam bagian ini, konsep dasar aljabar max plus yang akan digunakan dalam pembahasan pada bagian-bagian berikutnya. Operasi dasar dari aljabar maxplus adalah ***maksimum*** (dinotasikan dengan simbol $\oplus$) dan ***tambah*** (dinotasikan dengan simbol $\otimes$). Aljabar max plus adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ $\mathbf{R}_{\max} = (\mathbf{R}_{\max}, \otimes, \oplus, \varepsilon, e)$. Jika diberikan $a, b \in \mathrm{R}_{\max}$, $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ maka operasi penjumlahan dan perkalian dalam aljabar max plus didefinisikan sebagai :

$$a \oplus b = \max(a,b) \text{ dan } a \otimes b = a + b \tag{2}$$

Operasi pangkat dalam aljabar max plus didefinisikan (Heidergott, dkk, 2006):

$$a^{\otimes n} = \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{\text{sebanyakn}} \tag{3}$$

Untuk semua $n \in N$ dengan $n \neq 0$. Operator $\otimes$ dalam aljabar max plus mempunyai invers yang dinyatakan sebagai pangkat negatif.

$$a \otimes b^{\otimes(-1)} = a - b \tag{4}$$

tetapi untuk operasi $\oplus$ tidak memiliki invers.

$$\bigoplus_{i=1}^{n} a_i = \max\{a_i | 1 \leq i \leq n\} \text{ dan } \bigotimes_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{6}$$

Representasi matriks dalam aljabar max plus $[A]_{ij}$, dimana *i-j* adalah komponen dari matriks *A*. Penjumlahan dan perkalian dua matriks didefinisikan sebagai berikut (Heidergott, dkk, 2006; Schutter, 1996; Subiono, 2006):

$$\begin{aligned} [A \oplus B]_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} \\ &= \max\{a_{ij} + b_{ij}\} \\ [A \otimes B]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{l} a_{ik} \otimes b_{kj} \\ &= \max_{1 \leq k \leq l}\{a_{ik} + b_{kj}\} \end{aligned} \tag{5}$$

dimana $A \in R_{\max}^{n \times l}$, $B \in R_{\max}^{l \times m}$, $a_{ij} = [A]_{ij}$ dan $b_{ij} = [B]_{ij}$.

Nilai eigen dan vektor eigen dalam aljabar max plus dibahas dalam (Heidergott, dkk, 2006; Subiono, 2006; Subiono, 2010).

$$A \otimes v = \lambda \otimes v \tag{6}$$

Dimana $A \in R_{\max}^{n \times n}$ matriks bujur sangkar, $\lambda \in R_{\max}$ adalah skalar dan $v \in R_{\max}^{n}$ adalah vektor.

Suatu graph berarah dari matriks A dinotasikan oleh $G(A) = (E,V)$, mempunyai *n* titik, himpunan semua titik dari *G(A)* dinyatakan dengan V. Suatu graph dengan matriks *A* dinotasikan dengan *G(A)* dengan himpunan nodes dan bobot ,

$$\mathrm{x} = (A \otimes \mathrm{x}) \oplus \mathrm{b} \tag{7}$$

$$x = A^* \otimes b$$

$$A^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k}$$

Sistem max plus linear didefinisikan oleh (Heidergott dkk, 2006):

$$x(k+1) = Ax(k) \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{8}$$

Dimana vektor $x \in R^n$ menyatakan keadaan dari suatu model, *x(k)* menyatakan keadaan saat ke-*k*, dan *A* merupakan matriks berukuran *nxn*. Dalam aljabar max plus, persamaan (10) dapat ditulis :

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{9}$$

Dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ maka evolusi dari persamaan (11) dapat ditentukan.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned} \tag{10}$$

Dimana *u(k)* merupakan input dan *y(k)* merupakan output.

$$\begin{aligned} u(k+1) - u(k) &\geq -\rho \\ Hx(k) + Gu(k) &\leq h \end{aligned} \tag{11}$$

Evolusi sistem yang diberikan oleh Persamaan (9) dengan matriks A terduksi dan dikaji suatu perilaku periodik dari sistem. Perilaku periodik ini erat kaitannya dengan apa yang dinamakan ***vektor waktu sikel*** (Subiono, 2010):

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{k} \tag{12}$$

Limit yang diberikan oleh bentuk Persamaan (12) selalu ada untuk setiap kedaan awal $x(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon)'$ dan untuk matriks A dalam Persamaan (10) yang tereduksi selalu bisa dijadikan suatu bentuk blok matriks segitiga atas, hal ini bisa dilihat di (Heidergott dkk, 2006; Subiono, 2010) yang diberikan oleh bentuk

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,q} \\ \varepsilon & A_{2,2} & \cdots & A_q \\ \varepsilon & \varepsilon & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & A_{q,q} \end{pmatrix} \tag{13}$$

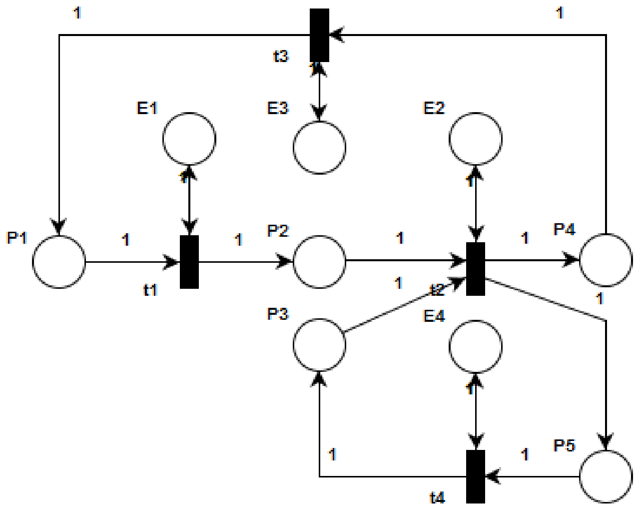
untuk setiap $i = 1,2,\cdots,q$, $A_{i,i}$ (berukuran $q_i \times q_i$) adalah matriks taktereduksi dengan nilai-karakteristik λ_i.

PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas model petri net dari sistem metabolisme, kemudian dibuat model dan dilakukan analisis menggunakan aljabar max plus.

MODEL PETRI NET SISTEM METABOLISME

Model Petri Net yang dibangun pada sistem metabolisme dalam makalah ini terdiri dari 5 (lima) plece (p) dan 5 (lima) transis (t). Interpretasi dari masing-masing komponen Petri Net pada model sistem metabolisme adalah Place sebagai spesies molekul, Transisi sebagai reaksi, Marking sebagai kosentrasi dan Arc sebagai koefisien stokiometri (Ross-Leon, 2012). Model Petri Net sistem metabolisme yang menjadi dasar untuk membuat model aljabar max plus seperti ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Model Petri Net Sistem Metabolisme

Berdasarkan Gambar 1, diperoleh matriks *forwards* dan *backward* sebagai berikut:

Forwards incidence matrix I^+

	t1	t2	t3	t4
P1	0	0	1	0
P2	1	0	0	0
P4	0	1	0	0
E3	0	0	1	0
P5	0	1	0	0
E1	1	0	0	0
E2	0	1	0	0
E4	0	0	0	1
P3	0	0	0	1

Backwards incidence matrix I^-

	t1	t2	t3	t4
P1	1	0	0	0
P2	0	1	0	0
P4	0	0	1	0
E3	0	0	1	0
P5	0	0	0	1
E1	1	0	0	0
E2	0	1	0	0
E4	0	0	0	1
P3	0	1	0	0

Berdasarkan matriks *forwards* dan matriks *backwards*, maka dipeoleh *combined matriks* sebagai berikut:

Combined incidence matrix *I*

	t1	**t2**	**t3**	**t4**
P1	-1	0	1	0
P2	1	-1	0	0
P4	0	1	-1	0
E3	0	0	0	0
P5	0	1	0	-1
E1	0	0	0	0
E2	0	0	0	0
E4	0	0	0	0
P3	0	-1	0	1

Selanjutnya dibahas model aljabar max plus dari model Petri Net pada **Gambar 2**.

MODEL ALJABAR MAX PLUS SISTEM METABOLISME

Pada bagian ini akan dibangun model aljabar max plus berdasarkan model Petri Net yang dihasilkan pada bagian sebelumnya. Kemudian dilakukan analisis dari model aljabar max plus.

Berdasarkan Gambar 1 pada bagian sebelumnya, maka diperoleh model aljabar max plus sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
t_1(k+1) &= d_1 \otimes t_1(k) \oplus d_3 \otimes t_3(k) \\
t_2(k+1) &= d_2 \otimes t_2(k) \oplus d_1 \otimes t_1(k+1) \oplus d_4 \otimes t_4(k+1) \\
t_3(k+1) &= d_3 \otimes t_3(k) \oplus d_2 \otimes t_2(k) \\
t_4(k+1) &= d_4 \otimes t_4(k) \oplus d_2 \otimes t_2(k)
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Dari persamaan (14) kemudian dilakukan sinkronisasi, sehingga diperoleh

$$\left.\begin{aligned}
t_1(k+1) &= d_1 \otimes t_1(k) \oplus d_3 \otimes t_3(k) \\
t_2(k+1) &= d_2 \otimes t_2(k) \oplus d_1 \otimes d_1 \otimes t_1(k) \oplus d_3 \otimes t_3(k) \oplus d_4 \otimes d_4 \otimes t_4(k) \oplus d_2 \otimes t_2(k) \\
t_3(k+1) &= d_3 \otimes t_3(k) \oplus d_2 \otimes t_2(k) \\
t_4(k+1) &= d_4 \otimes t_4(k) \oplus d_2 \otimes t_2(k)
\end{aligned}\right\}$$

(15)

Persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$t(k+1) = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & d_3 & \varepsilon \\ d_1 \otimes d_1 & d_2 \otimes d_2 & d_3 \otimes d_3 & d_4 \otimes d_4 \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & d_4 \end{bmatrix} \otimes t(k) \qquad (16)$$

dimana $t(k) = [t_1(k) \quad t_2(k) \quad t_3(k) \quad t_4(k)]^T$

Persamaan 16 dapat ditulis dalam bentuk

$$t(k+1) = A \otimes t(k), \qquad k = 1,2,3... \qquad (17)$$

dimana $t(k)=\begin{pmatrix} t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \\ t_4(k) \end{pmatrix} \in R^n$, dan $A=\begin{pmatrix} d_1 & \varepsilon & d_3 & \varepsilon \\ d_1 \otimes d_1 & d_2 \otimes d_2 & d_3 \otimes d_3 & d_4 \otimes d_4 \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & d_4 \end{pmatrix} \in R_{\max}^{n\times n}$

KESIMPULAN

Model sistem metabolisme dapat dibuat suatu model Petri Net, kemudian dapat dianalisis menggunakan aljabar max plus. Model yang dihasilkan dalam bentuk aljabar max plus adalah

$$t(k+1)=\begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & d_3 & \varepsilon \\ d_1 \otimes d_1 & d_2 \otimes d_2 & d_3 \otimes d_3 & d_4 \otimes d_4 \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & d_4 \end{bmatrix} \otimes t(k),$$

dimana $t(k)=[t_1(k) \quad t_2(k) \quad t_3(k) \quad t_4(k)]^T$.

Kajian selanjutnya dapat dibangun model Petri Net dan model aljabar max plus untuk sistem metabolisme yang lebih kompleks.

DAFTAR RUJUKAN

Heidergott, B., Olsder, G.J & Woude. 2006. *Max Plus at Work,* Modelling *and Analysis of Synchronized Systems: A Course onMax-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press.

C. Cassandras & S. Lafortune, (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*, Second Edition, Springer.

Nasri, I, Habci, G & Boukezzoula, R. 2011. *Scheduling and Control Modeling of HVLV Systems Using Max-Plus Algebra*. published in "VECoS 2011 hal-00627509, version 1

Konigsberg, Z. R. 2011. *Modeling, Stability Analysis And Timetable Design For Parallel Computer Processing Systems by Means of Timed Petri Nets, Lyapunov Methods And Max-Plus Algebra.* Neural, Parallel, and Scientific Computations 19 (2011) 271-294

Ross-León, R. 2010. Control of Metabolic Systems Modeled with Timed Continuous Petri Nets, Proceedings of the Workshops of the 31st International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency (PETRI NETS 2010) and of the 10th International Conference on Application of Concurrency to System Design (ACSD 2010), Braga, Portugal.

Subiono. 2006. *On classes of min-max-plus systems and their applications,* Delft University Press, ISBN 90-407-2079-7

Subiono. 2010. *The existence of eigenvalues for reducible matricesin Max-Plus Algebra.* Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Malang.

Turek, M. 2011. Solving selected traffic problems in The max-plus algebra, *Journal of Information, Control and Management Systems*, Vol. 9, (2011), No. 1

Xiao, Z. 2011. A method of workflow scheduling based on colored Petri nets, *Data & Knowledge Engineering*, 70 (2011) 230–247