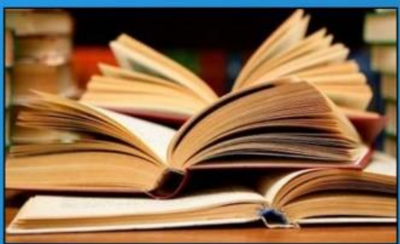
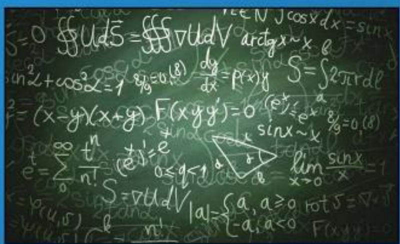
ISSN : 2087-9393

Jurnal

Matematika, Pendidikan Matematika, Sains dan Teknologi

EULER





Volume 1, Nomor 1
Januari 2013

Diterbitkan Oleh
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Gorontalo

Daftar Isi

Alamat Redaksi
Jurusan Matematika FMIPA UNG
Jln. Jendral Sudirman No. 6 Gorontalo 96128
Telp: (0435) 821752, E-mail: euler@ung.ac.id
Website: http://www.euler.ung.ac.id

ISSN 2087-9393
9 772087 939009

EULER

Jurnal Matematika, Pendidikan Matematika, Sains dan Teknologi

Jurnal Euler merupakan Jurnal Ilmiah yang memuat tulisan-tulisan ilmiah tentang matematika, pendidikan matematika, sains dan teknologi. Penerbit dari Jurnal Euler adalah Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo. Dosen, peneliti, praktisi, guru, mahasiswa dan masyarakat dapat memberikan tulisan berupa artikel pada jurnal ini. Redaksi menerima artikel berupa hasil penelitian, studi pustaka, pengamatan atau pendapat atas suatu masalah yang timbul dalam kaitannya dengan bidang-bidang matematika, pendidikan matematika, sains dan teknologi dimana tulisan pada artikel tersebut belum pernah diterbitkan pada jurnal lain. Redaksi berhak memperbaiki dan mempersingkat artikel tanpa merubah isi dari artikel. Artikel yang dimuat pada Jurnal Euler merupakan artikel yang telah melalui proses seleksi.

Alamat Redaksi
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Gorontalo
Jln. Jendral Sudirman No. 6 Gorontalo 96128
Telp: (0435) 821752, e-mail: euler@ung.ac.id
Website: http://www.euler.ung.ac.id

EULER

Jurnal Matematika, Pendidikan Matematika, Sains dan Teknologi

---

DAFTAR ISI

Jurnal Euler, ISSN: 2087-9393
Januari 2013, Vol.1, No.1, Hal.59-65

VARIASI PEMANENAN TERHADAP MODEL DINAMIK PERTUMBUHAN EKSPONENSIAL

Hasan S. Panigoro[1]

Diterima: 3 November 2012, Disetujui: 26 Desember 2012

Abstrak

Paper ini mempelajari tentang model pertumbuhan logistik. Model ini adalah model klasik dalam pertumbuhan populasi. Modifikasi dilakukan terhadap model ini yaitu perlakuan berupa variasi pemanenan dimana dilakukan tiga macam pemanenan yaitu pemanenan konstan, pemanenan proposional, dan pemanenan kuadratik. Dengan analisis dinamik, diperlihatkan pengaruh dari variasi pemanenan tersebut terhadap eksistensi dari populasi pada model pertumbuhan eksponensial.

Kata kunci: Dinamik, Model Eksponensial, Pemanenan

Abstract

Exponential growth model is studied in this paper. This model is a classic growth model. Modification is done by gives harvesting to the model. There are three kind of harvesting that gives to this model are: constant rate harvesting, propotional harvesting, and quadratic harvesting. Using dynamical analysis, the effect of harvesting to the existence of population with exponential growth model is shown.

Keywords: *Dynamic, Exponential Model, Harvesting*

1 Pendahuluan

Masalah populasi merupakan salah satu masalah ekologi yang selalu ada dan berkembang seiring jalannya waktu. Hal ini karena masalah populasi berbicara tentang eksistensi suatu mahluk hidup dan kemampuannya bertahan dan beradaptasi terhadap alam. Dalam perkembangannya, masalah populasi juga dipelajari oleh matematikawan yaitu dengan pemodelan matematika.

Model paling sederhana tentang populasi adalah model pertumbuhan eksponensial. Model ini merupakan model klasik dalam pemodelan matematika dengan persamaan diferensial. Model ini dituliskan dalam:

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{1}$$

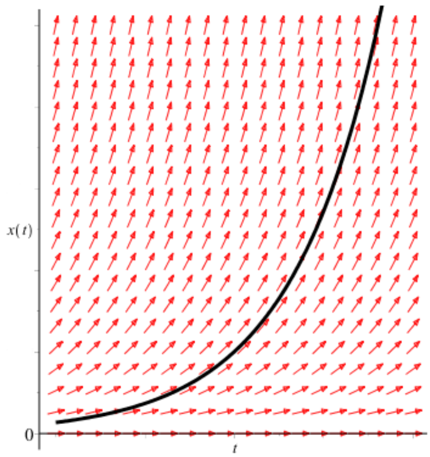
dimana x adalah jumlah populasi pada sepanjang $t \geq 0$, dan a adalah laju pertumbuhan intrinsik dari populasi tersebut. Model ini adalah model sederhana dengan solusi berupa

[1] *Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo,*
Jln. Jend. Sudirman, No.6, kota Gorontalo. Telp.0435-821752, Fax.0435-827213
email : hspanigoro@ung.ac.id

kurva eksponensial (gambar 1) yang dapat dituliskan:

$$x(t) = x_0 e^{at} \tag{2}$$

dengan $x_0 = x(0)$ adalah kondisi awal dari populasi. Spesies yang diasumsikan tumbuh secara eksponensial seperti bakteri dan sebagainya. Salah satu aplikasinya yaitu analisis perkembangbiakan bakteri [1]. Dalam penelitian tersebut dia mempelajari pertumbuhan bakteri dengan model eksponensial.



Gambar 1: *Potret Fase Model Pertumbuhan Eksponensial*

Selanjutnya dalam perkembangannya ada beberapa populasi yang dapat diberikan pemanenan $h(x)$ seperti pemanenan konstan (h), pemanenan proposional (hx) dan pemanenan kuadratik (hx^2). Modifikasi ini diterapkan kepada model (1) kemudian dipelajari pengaruh dari pemanenan tersebut terhadap eksistensi dari populasi dengan model exponensial.

2 Metode Penelitian

Analisis sederhana yang dilakukan terhadap model ini adalah langkah-langkah sebagai berikut:

1. Identifikasi solusi ekuilibrium dari model.
2. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dari model.
3. Identifikasi solusi khusus model.
4. Simulasi pergerakan solusi dengan melihat potret fase model.
5. Interpretasi terhadap eksistensi dari populasi akibat pemanenan yang dilakukan.

Adapun model yang dipelajari adalah:

a. Model eksponensial dengan pemanenan konstan.

$$\frac{dx}{dt} = ax - h \tag{3}$$

b. Model eksponensial dengan pemanenan proposional.

$$\frac{dx}{dt} = ax - hx \tag{4}$$

c. Model eksponensial dengan pemanenan kuadratik.

$$\frac{dx}{dt} = ax - hx^2 \tag{5}$$

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Pertumbuhan Eksponensial dengan Pemanenan Konstan

Perhatikan model eksponensial dengan pemanenan konstan berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - h \tag{6}$$

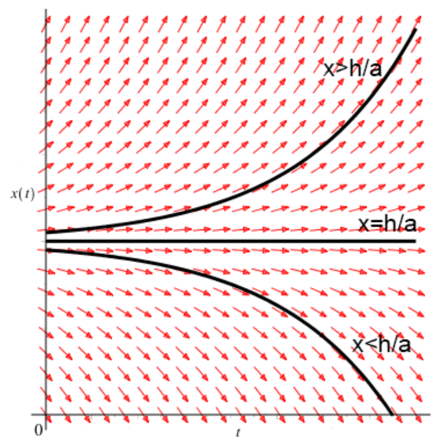
dimana $x(t) > 0$ adalah jumlah populasi sepanjang $t \geq 0$ dengan pemanenan konstan $h > 0$ dan laju pertumbuhan intrinsik $a > 0$. Model ini memiliki solusi:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{h}{a}\right) e^{at} - \frac{h}{a}$$

dengan $x_0 = x(0)$. Model ini memiliki titik ekuilibrium:

$$\bar{x} = \frac{h}{a}.$$

Untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}$ maka dilakukan pelinearan yang mendapatkan $D_x(f(\bar{x})) = a$ dengan $f(x) = ax - h$ sehingga titik ekuilibrium $\bar{x}$ merupakan titik ekuilibrium tidak stabil, dimana semua solusi akan menjauhi titik ekuilibrium ini. Perhatikan plot dari potret fase berikut:



Gambar 2: *Potret Fase Model Eksponensial dengan Pemanenan Konstan*

Perhatikan bahwa pada saat:

1. $x(0) > \frac{h}{a}$ maka solusi akan menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x}$ ke arah positif. Hal ini mengindikasikan populasi akan tumbuh secara positif menjauhi kepunahan.
2. $x(0) = \frac{h}{a}$ maka solusi akan bersifat konstan (karena merupakan titik ekuilibrium). Dengan demikian jumlah populasi tidak akan bertambah maupun berkurang. Kondisi ini tetap menjamin eksistensi dari populasi.
3. $x(0) < \frac{h}{a}$ maka solusi akan bergerak menjauhi titik ekuilibrium ke arah negatif. Hal ini mengindikasikan bahwa populasi akan mengalami peluruhan sehingga akan terjadi kepunahan jika kondisi ini terjadi.

3.2 Model Pertumbuhan Eksponensial dengan Pemanenan Proposional

Perhatikan model eksponensial dengan pemanenan proposional berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - hx$$

dimana $x(t) > 0$ sepanjang $t \geq 0$ dengan pemanenan proposional $h > 0$ terhadap populasi $x(t)$ dan laju pertumbuhan intrinsik $a > 0$. Model ini dapat dituliskan:

$$\frac{dx}{dt} = (a - h)x \tag{7}$$

Model (7) memiliki solusi:

$$x(t) = x_0 e^{(a-h)t} \tag{8}$$

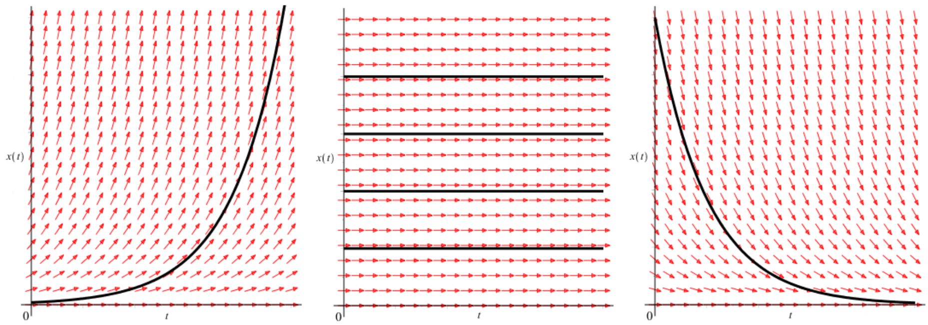
dengan $x_0 = x(0)$ dan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$. Pelinearan pada model (7) memberikan $D_x(f(\bar{x})) = a - h$. Dari pelinearan tersebut maka kestabilan dari titik ekuilibrium $\bar{x}$ yaitu bergantung dari nilai $a - h$ sehingga ada tiga kasus kestabilan dari model ini yaitu:

a. Jika $a - h > 0$ atau $h < a$ maka $\bar{x}$ merupakan titik ekuilibrium tidak stabil. Hal ini berarti jika laju pemanenan proposional lebih kecil dari laju pertumbuhan intrinsik maka populasi akan menjauhi kepunahan. (gambar 3 kiri)

b. Jika $a-h = 0$ atau $h = a$ maka $\bar{x}$ solusi dari model (7) merupakan solusi konstan atau dengan kata lain, jika laju pemanenan proposional sama dengan laju pemanenan proposional jumlah populasi tidak akan bertambah ataupun berkurang sepanjang $t \geq 0$. Kondisi ini juga menjamin eksistensi dari populasi, walaupun tidak terjadi pertumbuhan dari populasi. (gambar 3 tengah)

c. Jika $a - h < 0$ atau $h > a$ maka $\bar{x}$ merupakan titik ekuilibrium stabil. Hal ini berarti jika laju pemanenan proposional lebih besar dari laju pertumbuhan ekstrinsik maka populasi akan berangsur-angsur punah. (gambar 3 kanan)

Perhatikan bahwa eksistensi dari populasi akan terjaga apabila $h \leq a$, dengan kata lain laju pemanenan proposional lebih kecil atau sama dengan laju pertumbuhan intrinsik. Namun apabila $h > a$ mengakibatkan populasi akan berangsur-angsur punah.



Gambar 3: *Potret fase model eksponensial dengan pemanenan proposional. Dari kiri ke kanan: $h < a$, $h = a$, dan $h > a$*

3.3 Model Pertumbuhan Eksponensial dengan Pemanenan Kudratik

Perhatikan model eksponensial dengan pemanenan kuadratik berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - hx^2 \tag{9}$$

dimana $x(t) > 0$ sepanjang $t \geq 0$ dengan pemanenan kuadratik $h > 0$ dan laju pertumbuhan intrinsik $a > 0$. Dengan metode reduksi variabel terpisah didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ax - hx^2} &= dt \\ \frac{1}{a}\frac{dx}{x} + \frac{h}{a}\frac{dx}{a - hx} &= dt \text{ (metode fraksi parsial)} \\ \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x} + \frac{h}{a}\int \frac{dx}{a - hx} &= \int dt + c, \end{aligned}$$

sehingga solusinya menjadi:

$$x(t) = \frac{a}{\left(\frac{a}{x_0} - h\right) e^{-at} + h} \tag{10}$$

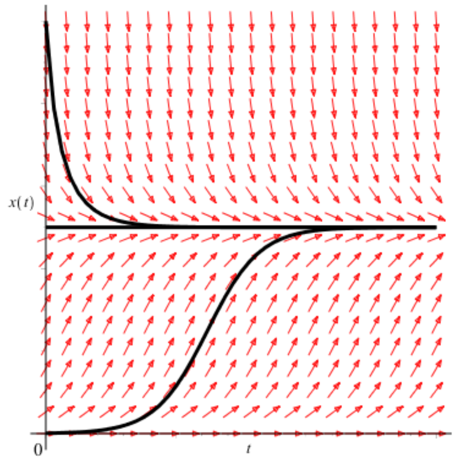
dengan $x_0 = x(0)$. Solusi ekuilibrium model (9) adalah:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0 \\ \bar{x}_2 &= \frac{a}{h} \end{aligned}$$

Pelinearan disekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$ memberikan $D_x(f(\bar{x})) = a - 2h\bar{x}$. Kestabilan titik ekuilibrium dari model (9) adalah sebagai berikut:

- Untuk titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = 0$ memberikan $D_x(f(\bar{x}_1)) = a > 0$ sehingga titik ekuilibrium ini adalah titik ekuilibrium tidak stabil, atau dengan kata lain, semua solusi akan menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x}_1$.
- Untuk titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = \frac{a}{h}$ memberikan $D_x(f(\bar{x}_2)) = -a < 0$ sehingga titik ekuilibrium ini adalah titik ekuilibrium stabil,a atau dengan kata lain, semua solusi akan mendekati titik ekuilibrium $\bar{x}_2$.

Perhatikan simulasi berikut:



Gambar 4: *Potret fase model eksponensial dengan pemanenan kuadratik*

Analisis dan simulasi pada gambar (4) memperlihatkan bahwa model ini akan selalu mempertahankan eksistensi dari populasi dimana jumlah populasi tidak akan mengalami kepunahan dan mendekati $\frac{a}{h}$ sepanjang $t \geq 0$. Namun secara biologis hal ini tercapai apabila $\frac{a}{h} > 1$ dengan kata lain perbandingan antara laju pertumbuhan intrinsik dengan laju pemanenan kuadratik harus lebih besar dari satu.

4 Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

1. Eksistensi populasi dari model eksponensial akan selalu terjaga karena model ini memperlihatkan pertumbuhan eksponensial dari populasi tersebut.
2. Eksistensi populasi dari model eksponensial dengan pemanenan konstan akan terjaga apabila kondisi awal dari populasi lebih besar dari $\frac{h}{a}$.
3. Eksistensi populasi dari model eksponensial dengan pemanenan proposional akan terjaga apabila $h \leq a$ atau laju pemanenan proposional lebih kecil atau sama dengan laju pertumbuhan intrinsik.
4. Eksistensi populasi dari model eksponensial dengan pemanenan kuadratik akan terjaga apabila $\frac{a}{h} > 1$.

Saran

Penelitian selanjutnya dapat dikembangkan untuk model pertumbuhan logistik, baik model logistik dasar ataupun dengan beberapa modifikasi seperti modifikasi pada daya dukungnya, modifikasi dengan waktu tunda, modifikasi dengan pemanenan seperti yang dilakukan pada penelitian ini, maupun modifikasi lainnya. Selain itu model pertumbuhan populasi juga dapat melibatkan interaksi antara dua atau lebih spesies seperti model kompetisi antara spesies, model *predator-prey*, dan sebagainya. Masalah populasi adalah masalah yang cukup luas untuk dibahas dan dikembangkan karena masalah populasi adalah masalah yang selalu berkembang seiring waktu.

Referensi

[1] Boulanouar, M. (2014), *Asynchronous Exponential Growth of a Bacterial Population*, Electronic Journal of differential Equations, Vol 2014, No.06, pp.1-12.

[2] Kuznetsov, Y. A. (1998), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York

[3] Perko, L., (1996), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Second edition, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York.

[4] Verhulst, F. (1996), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg.

[5] Wiggins, S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York.

Jurnal Euler, ISSN: 2087-9393
xxxxxxx 20xx, Vol.xx, No.xx, Hal.xx-xx

ATURAN PENULISAN MAKALAH UNTUK JURNAL EULER JUDUL DI TULIS DALAM BAHASA INDONESIA

Nama Penulis[1]

Diterima: xx xxxxx 20xx, Disetujui: xx xxxxx 20xx

Abstrak

Abstrak merupakan intisari dari makalah yang di tulis. Didalam abstrak terdapat tujuan penelitian, metode yang digunakan dan hasil yang dicapai. Abstrak dituliskan dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris. Penulisan Abstrak masing-masing bahasa maksimal menggunakan 250 kata dengan menyertakan kata kunci sejumlah 3-6 kata yang merupakan kata-kata penting yang digunakan dalam makalah.

Kata kunci: Gunakan, Tiga, Sampai, enam, Kata, Penting

Abstract

Abstract is the main idea of the manuscript. Abstract consist of the purpose, method, and result of the research. Abstract is written in Indonesian and English. use max 250 words, and inclose the important words that have been used in manuscript.

Keywords: *Use, Three, Until, Six, Word, Important*

1 Pendahuluan

Makalah yang akan di terbitkan pada Jurnal EULER mencakup bidang matematika, pendidikan matematika, sains dan teknologi. Tulisan berupa diseminasi hasil penelitian, telaah pustaka ilmiah yang komprehensif, atau resensi dari buku ilmiah. Tulisan belum pernah dipublikasikan di jurnal lain. Makalah ditulis dalam bahasa indonesia, dengan abstrak bahasa inggris terlampir. Makalah ditulis dalam bahasa LaTeX dengan *template* dapat diperoleh dari redaksi. Apabila terdapat istilah *asing*, maka gunakan tulisan *miring*. Makalah dikirimkan ke alamat email redaksi dalam format LaTeX yang telah disediakan oleh redaksi dengan folder terkompresi dalam format rar/zip. Folder terkompresi yang dikirimkan sebelumnya telah dibersihkan dari file-file bantu (Auxiliary Files) termasuk membersihkan file PDF dari folder.

Bagian pendahuluan berisi tentang latar belakang, dan penjelasan tentang penelitian maupun telaah pustaka yang mengarah ke pengambilan rumusan masalah. Jika terdapat lebih dari satu tujuan, gunakan *enumerate*/ penomoran angka (bukan simbol/ *bullet*).

[1] *Nama Instansi,*
Jln. xxxxx xxxxx, No.xx, Kota/Kab xxxxx. Telp.xxxx-xxxxxx, Fax.xxxx-xxxxxx
email : email_anda@domainemail.xxx

2 Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka berisi teori-teori yang mendukung tulisan ilmiah yang dipaparkan.

3 Metode Penelitian

Metode penelitian berisi penguraian langkah-langkah penyelesaian masalah. Uraikan dengan jelas sesuai prosedur penelitian yang dilakukan. Metode yang dipilih harus sesuai dengan jenis penelitian yang dilakukan. Misalkan untuk penelitian matematika, uraikanlah metode-metode yang digunakan untuk mencari solusi masalah sesuai dengan bidang yang tekuni. Demikian juga untuk Pendidikan, ataupun sains dan teknologi.

4 Pembahasan

Pada pembahasan, dituliskan hasil-hasil apa saja yang diperoleh dalam penelitian. Dibahas dengan uraian yang komprehensif namun ringkas dan padu. Tata cara penulisan tabel, gambar dan lain-lain akan dengan sendirinya menyesuaikan dengan *template* LaTeX yang ada di redaksi. File gambar (bisa dalam format jpeg, png, eps, ataupun yang format gambar lain) ikut dikirimkan ke redaksi untuk diproses lebih lanjut ke *template* LaTeX yang ada di redaksi.

5 Penutup

Di dalam penutup berisi kesimpulan dari keseluruhan tulisan ilmiah. Didalamnya juga dapat berisi saran terhadap masalah yang ada. Apabila kesimpulannya dan sarannya dituliskan per*item*, maka gunakan penomoran angka*(enumerate)*, bukan simbol*(bullets)*. Dalam kesimpulan juga dapat dicantumkan arah penelitian lebih lanjut yang menjadi prospek kajian selanjutnya.

Referensi

[1] Nama Penulis. (tahun), *Judul Buku/Jurnal etc, yang Dijadikan Referensi*, Penerbit, Kota Penerbit.
[2] Nama Belakang, Inisial Nama depan. (xxxx), *Jurnal xxxxxxx*, Penerbit.