

PROSIDING

ISBN: 978-979-1340-75-5

**SEMINAR NASIONAL KIMIA &  
PENDIDIKAN KIMIA UNG 2014**

*Tema: PENINGKATAN KEMANDIRIAN BANGSA BERBASIS  
SUMBER DAYA MANUSIA DAN SUMBER DAYA ALAM*

Gorontalo, 09 Oktober 2014

*Penerbit: UNG Press (Anggota IKAPI)*

PROSIDING

ISBN: 978-979-1340-75-5

# SEMINAR NASIONAL KIMIA & PENDIDIKAN KIMIA UNG 2014

*PENINGKATAN KEMANDIRIAN BANGSA BERBASIS  
SUMBER DAYA MANUSIA DAN SUMBER DAYA ALAM*

Gorontalo, 09 Oktober 2014

Tim Editor: Prof. Dr. Ishak Isa, M.Si  
DR. Yuzsda K. Salimi, M.Si  
La Ode Aman, M.Si  
Rakhmawaty Achmad Asui, M.Si

Host: Jurusan Kimia FMIPA  
Universitas Negeri Gorontalo  
Jl. Jend. Sudirman No. 6 Gorontalo



*Penerbit: UNG Press (Anggota IKAPI)*

## KATA PENGANTAR

Kemandirian bangsa haruslah menjadi visi dan tugas kolektif seluruh komponen bangsa Indonesia yakni pemerintah, masyarakat, dunia usaha dan juga lembaga pendidikan. Berbagai upaya berkaitan dengan usaha menuju bangsa mandiri adalah inovasi dan kreativitas, penemuan-penemuan baru serta produktivitas. Kemandirian bangsa berarti mengurangi ketergantungan bangsa Indonesia dari negara lain dalam berbagai sendi kehidupan terutama berkaitan dengan kebutuhan strategis negara dan rakyat Indonesia.

Perguruan tinggi sebagai komponen strategis bangsa dalam menciptakan manusia-manusia cerdas, kreatif, inovatif dan produktif harus terus menata dan mengelola diri dalam rangka lahirnya generasi menuju bangsa mandiri.

Oleh karena itu, Jurusan Kimia Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Negeri Gorontalo bermaksud menyelenggarakan Seminar Nasional dengan Tema: Peningkatan Kemandirian Bangsa Berbasis Sumber Daya Manusia dan Sumber Daya Alam.

Melalui seminar ini telah terpublikasi berbagai hasil penelitian, ide dan pemikiran para ilmuwan dari berbagai perguruan tinggi di Indonesia. Hasil penelitian, ide dan pemikiran yang tentunya berorientasi kepada upaya menuju bangsa mandiri. Seminar ini diharapkan memberikan motivasi kepada para peneliti untuk terus melahirkan hasil-hasil penelitian yang berorientasi kemandirian dengan berbasis sumber daya manusia dan sumber daya alam Indonesia.

Gorontalo, Oktober 2014

Tim Editor

# DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	ii
DAFTAR ISI .....	iii
KOMITE ILMIAH .....	vii
BAGIAN 1 BIDANG SAINS TERAPAN .....	1
Ekspresi Sekretori Immunoglobulin A (Siga) Dan Kerusakan Vili Usus Tikus Malnutrisi Setelah Suplementasi Kerang Darah ( <i>Anadara granosa</i> ), oleh <b>Netty Ino Ischak</b> .....	3 – 9
Profil Kemampuan Motorik Pasien Stroke Pasca Terapi Pirasetam Dan Sitikolin, oleh <b>Teti Sutriyati Tuloli</b> .....	11 – 17
Kadar Kalium Rendah Sebagai Prediktor Terjadinya Stroke, oleh <b>dr. Muhammad Isman Jusuf, Sp.S</b> .....	19 – 22
Identifikasi Kandungan Unsur Dari Tonasi Buah Kakao dan Pemanfaatannya Sebagai Unsur Hara Tersedia, oleh <b>Suherman</b> .....	23 – 27
Identifikasi Senyawa Aktif dan Uji Toksisitas Ekstrak Daun Binahong ( <i>Anrederacordifoliaten. Steenis</i> ) dengan Metode Brine Shrimp Lethality Test (BSLT), oleh <b>Yuszda K. Salimi</b> .....	29 – 36
Mineralogi dan Sifat-Sifat Kimia Tanah pada Dua Pedon Tanah Sawah Tadah Hujan di Sidomukti, Gorontalo, oleh <b>Nurdin</b> .....	37 – 46
Pemanfaatan Labu Air ( <i>Lagenaria siceraria (molina) standly</i> ) sebagai Hepatoprotektor pada Mencit Jantan yang Diinduksi Parasetamol , oleh <b>Widysusanti Abdulkadir</b> .....	47 – 50
Daun Gedi ( <i>Abelmoschus manihot (L) Medik</i> ) sebagai Sumber Asam Folat Alami, oleh <b>Sri Mulyani Sabang</b> .....	51 – 54
Pengembangan Bentuk Sediaan Gel Arbutin terhadap Penghambatan Hiperpigmentasi Melanin secara Invivo, oleh <b>Nur Ain Thomas</b> .....	55 – 62
Efek Antioksidan Minuman Sinom terhadap Gula Darah Tikus Putih Sprague Dawley Diabetes Melitus, oleh <b>Ni Ketut Wiradnyani</b> .....	63 – 78
Aplikasi Reverse Transcription - Loop Mediated Isothermal Amplification (RT-LAMP) Untuk Deteksi Virus Jembrana Pada Darah Sapi Bali Dengan Basis Deteksi Gen ENV-TM, oleh <b>Tri Ananda Erwin Nugroho</b> .....	79 – 86
Pendugaan Carbon Pohon Nantu ( <i>Palaquium obovatun Engl</i> ) dan Beringin ( <i>Ficus Nervosa Heyne</i> ) pada Hutan Nantu-Boliyohuto, oleh <b>Marini Susanti Hamidun</b> .....	87 – 92

Uji Toksisitas Ekstrak Daun Miana ( <i>Coleus scutellarioides</i> ) Asal Gorontalo, oleh <b>Suleman Duengo</b> .....	93 – 100
Karakteristik Komponen Kimia dan Sensory Permen Jelly Jagung, oleh: <b>Yoyanda Bait</b> .....	101 – 113
Biokonversi Limbah Tongkol Jagung Menjadi Bioetanol sebagai Bahan Bakar Alternatif Terbarukan, oleh <b>Hendri Iyabu</b> .....	115 – 120
Pengujian Beberapa Indikator Mutu Susu Kambing Peranakan Etawa ( <i>C. aegagrus</i> ) Segar, oleh <b>Deyvie Xyzquolya</b> .....	121 – 126
BAGIAN 2 BIDANG SAINS .....	127
Pembuatan Katalis Modifikasi Cu/Batu Apung untuk Mendukung Reaksi Konversi 3-Metil-1-Butanol, oleh <b>Mardjan Papatungan</b> .....	129 – 134
Misteri Gagalnya Chaos: Barisan Hingga Bifurkasi Period-Doubling Pada Sistem Interaksi Nonlinear Sepasang Osilator, oleh <b>Hasan S. Panigoro</b> .....	135 – 140
Multilinear Regression Analysis of Quinazoline Derivatives as Anticancer Agent, oleh <b>La Ode Aman</b> .....	141 – 149
Adsorpsi Ion Pb(II) dan Cd(II) pada Abu Dasar Batubara Terimobilisasi Ditizon, oleh <b>Tri Handayani</b> .....	151 – 164
Pemanfaatan Limbah Aluminium Foil sebagai Bahan Keagulan Poli Aluminium Klorida (PAC) Pada Pengolahan Air Buangan Laboratorium, oleh <b>Erni Mohamad</b> .....	165 – 173
Sifat Kestabilan di Sekitar Titik Tetap Pada Model Matematika Transmisi Penyakit Malaria, oleh <b>Resmawan</b> .....	175 – 181
Penentuan Harga Opsi Asia dengan Model Binomial yang Dimodifikasi, oleh <b>Emli Rahmi</b> .....	183 – 190
BAGIAN 3 BIDANG PENDIDIKAN SAINS, MANAJEMEN PENDIDIKAN, TEKNOLOGI PENDIDIKAN DAN PENDIDIKAN KARAKTER.....	191
Pelaksanaan Supervisi Pembelajaran IPA, oleh <b>Astin Lukum</b> .....	193 – 198
Kajian Problem Solving dalam Pembelajaran Kimia Melalui Aspek Epistemologi Sains untuk Menumbuhkan Kemampuan Berpikir Kritis Mahasiswa, oleh <b>Afadil</b> .....	199 – 207
Konsepsi Mahasiswa pada Konsep Larutan Asam-Basa dan Larutan Penyangga, oleh <b>Masrid Pikoli</b> .....	209 – 215
Penerapan Pembelajaran Learning Cycle Dipadu Peta Konsep untuk Meningkatkan Kualitas Proses dan Hasil Belajar Kimia, oleh <b>Kasmudin Mustapa</b> .....	217 – 226
Pengembangan Instrumen Dalam Memecahkan Masalah Fisika Dasar, oleh <b>Muhammad Yusuf</b> .....	227 – 234

Upaya Perbaikan Bantuan Belajar untuk Mata Kuliah Kimia Organik 3 - PEKI 4416, oleh <b>Dina Mustafa</b> .....	235 – 239
Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Jigsaw dan Motivasi Berprestasi Terhadap Hasil Belajar Siswa pada Materi Koloid, oleh <b>Zulaeha M Abdullah</b> ..	241 – 251
Kemampuan Kognitif dan Afektif Siswa dalam Pembelajaran Kimia , oleh <b>Astin Lukum</b> .....	253 – 260
BAGIAN 4 BIDANG RELEVAN LAINNYA .....	261
Perilaku Komunitas Polahi Terhadap Fungsi dan Manfaat Sumberdaya Hutan ditinjau dari aspek Sosial dan Lingkungan (Metode Survei Prilaku Komunitas Polahi di Kawasan Hutan Lokasi Desa Bihe Kecamatan Asparaga Kabupaten Gorontalo), oleh Sukirman Rahim.....	263 – 284
Geologi Daerah Sumalata Dan Sekitarnya Kabupaten Gorontalo Utara, oleh Muhammad Kasim .....	285 – 291
Potensi Hybrid Energy di Kabupaten Bone Bolango dan Kabupaten Gorontalo, oleh <b>Ervan Hasan Harun</b> .....	293 – 298
Pemanfaatan Biomassa Enceng Gondok dari Danau Limboto sebagai Penghasil Biogas, oleh <b>Julhim S. Tangio</b> .....	299 – 304
Deteksi Bakteri Streptococcus pyogenes dengan teknik Polymerase Chain Reaction, oleh Syam S. Kumaji .....	305 – 315
Analisis Kuantitatif Logam Berat Cd, Cu, dan Zn dalam Air Laut dan Beberapa Jenis Kerang di Perairan Teluk Palu Sulawesi Tengah, oleh <b>Irwan Said</b> .....	317 – 322
Electrospray Mass Spectrophotometry of Linear Ligands and their metal ion complexes, oleh <b>Vanny Tiwow</b> .....	323 – 329
Urgensi Pengembangan Perangkat Pembelajaran dalam Penerapan Pakem Berintegrasi Pendidikan Karakter bagi Mahasiswa, oleh <b>Gamar Abdullah</b> .....	331 – 337
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Sains Melalui Pendekatan Pakem Berintegrasi Pendidikan Karakter di SMP se-Provinsi Gorontalo, oleh <b>Nova Elysia Ntobuo</b> .....	339 – 351
Aktifitas Antifeedant dari Ekstrak Rimpang OlumoNGO (Acorus calamus) terhadap Larva Epilachna sparsa L, oleh <b>Nurhayati Bialangi</b> .....	353 – 366
Tanaman Genjer (Lamncharis flava) sebagai Agen Fitoremediasi Logam Pb dan Cu, oleh <b>Ishak Isa</b> .....	367 – 373
Pengaruh Model Penemuan Terbimbing terhadap Kemampuan Komunikasi Matematika Siswa SMP, oleh <b>Evi Hulukati</b> .....	375 – 382
Pengembangan Model Pembelajaran Berbasis Riset Berintegrasi Pendidikan Karakter pada Mata Kuliah Fisika Dasar di Universitas Negeri Gorontalo, oleh <b>Asrie Arbie</b> .....	383 – 392

Identifikasi Kandungan Unsur dari Tonasi Buah Kakao dan Pemanfaatannya sebagai Unsur Hara Tersedia, oleh <b>Suherman</b> .....	393 – 398
Kandungan Asam Miristat (C14), Asam Palmitat (C16) dan Asam Stearat (C18) Pada Susu Sapi Bubuk dan Susu Kambing Bubuk Dengan Metode Pengeringan Berbeda, oleh <b>Agus Bahar Rachman</b> .....	399 – 406
Strategi “OPER” untuk Pengembangan Keterampilan Bertanya Kritis pada Pembelajaran Kimia, oleh <b>Tri Santoso</b> .....	407 – 415
Analisis Kesalahan Siswa Dalam Memahami Konsep Larutan Buffer pada Tingkat Makroskopis Dan Mikroskopis, oleh <b>Mangara Sihaloho</b> .....	417 – 427
Pembuatan Reagen Alternatif COD-Reaktor untuk Efisien Manajemen Laboratorium, oleh <b>Wiwini Rewini</b> .....	429 – 432
Karakteristik Potensi Energi Surya dan Energi Angin pada Lahan Potensial Agropolitan yang Belum Dimanfaatkan, oleh <b>Lanto Mohamad Kamil Amali....</b>	433 – 437

## KOMITE ILMIAH

Prof. Effendy, Ph.D (Kimia Anorganik, Universitas Negeri Malang)  
Prof. Dr. Ishak Isa, M.Si (Kimia Analisis, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Suherman (Universitas Tadulako Palu)  
Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd (Pend. Matematika, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Astin P. Lukum, M.Si (Teknologi Pendidikan, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Siang Tandi Gonggo (Universitas Tadulako Palu)  
Dr. Wenny J. A. Musa, M.Si (Kimia Organik Bahan Alam, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Lukman A. R. Laliyo, M.Pd (Teknologi Pendidikan, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Akram La Kilo, M.Si (Kimia Material, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Opir Rumape, M.Si (Entomologi, Universitas Negeri Gorontalo)  
Dr. Roland Rusli, M.Si (Universitas Mulawarman Samarinda)  
Dr. Atiek N. Rostika, M.Si (Universitas Padjajaran Bandung)  
Dr. Dahlan, M.Si (Universitas Haluolea)

Kontak dan Website:

*Jurusan Kimia FMIPA, Kampus Universitas Negeri Gorontalo*

*Jl. Jend. Sudirman No. 06 Gorontalo 96128*

*Website: <http://seminarkimia.ung.ac.id/>, Email: [seminarkimia@ung.ac.id](mailto:seminarkimia@ung.ac.id)*



# MISTERI GAGALNYA CHAOS: BARISAN HINGGA BIFURKASI PERIOD-DOUBLING PADA SISTEM INTERAKSI NONLINEAR SEPASANG OSILATOR

Hasan S. Panigoro<sup>1)</sup>

<sup>1</sup>Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo  
email: hspanigoro@ung.ac.id

## Abstract

*In this manuscript, a dynamical system of coupled nonlinear oscillators having the frequencies with ratio 1:  $\varepsilon$ , is studied. We assume that the nonlinearity is quadratic norm preserving. Using the averaging method, we constructed the normal form. In particular, we are interested on the existence of a number of period-doubling bifurcations in an open set of parameter values.*

**Keywords:** Averaging Method, Normal Form, Periodic Solution, Period-Doubling Bifurcation

## 1. PENDAHULUAN

Pada tahun 2002, Crommelin [2] memodelkan permasalahan iklim yang memiliki properti unik, yaitu memiliki bagian nonlinear kuadratik namun meminimumkan energi. Pemodelan ini dikenal dengan nama *Ultra-Low Frequency Variability (ULFV)*, yang merepresentasikan suatu sistem osilator nonlinear berpasangan dengan interaksi berupa pola aliran di atmosfer (aliran udara, panas dan lainnya) dengan komponen yang lebih lambat pada sistem cuaca (laut, lautan es, dan lainnya) dalam jangka waktu yang lama.

Interaksi kedua dinamik tersebut terjadi di permukaan laut. Selain terjadi perpindahan air melalui penguapan dan hujan, pada permukaan laut juga terjadi interaksi momentum dari atmosfer dengan momentum dari lautan. Unsur-unsur yang mempengaruhi interaksi ini adalah tekanan permukaan, suhu dan uap air pada suatu lapisan di atmosfer, dan komponen-komponen dengan laju horizontal pada lapisan tersebut. Parameter yang digunakan pada model ini menggambarkan pengaruh dari beberapa proses, diantaranya konveksi, proses kimiawi di permukaan tanah, bentuk awan yang menutupi suatu wilayah tertentu, radiasi sinar matahari dan lainnya yang terjadi secara lambat. Fenomena cuaca yang terjadi secara cepat seperti badai yang terjadi secara tiba-tiba diabaikan pada kasus ini.

Pada tahun 2003 dan 2004, Tuwankotta [6] [7] melakukan penelitian yang termotivasi oleh sistem ULFV yang dimodelkan oleh Crommelin [2]. Sistem ini memiliki sifat

geometridan frekuensi yang sama dengan Crommelin, dengan perbandingan frekuensi 1:  $\varepsilon$ .

$$\dot{x} = (A + \varepsilon B)x + \varepsilon F(x) \quad (1.1)$$

dengan  $x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  dengan nilai eigen dari  $A$  adalah  $\lambda_{1,2} = \varepsilon\mu_1 \pm i$  dan  $\lambda_{3,4} = \varepsilon\mu_2 \pm i\varepsilon\omega$ . Bentuk normal dari sistem (1.1) yang dibahas pada paper ini.

Diperlihatkan di Tuwankotta [7] bahwa bentuk normal sistem (1.1) didapatkan dengan metode perataan, dimana metode ini menghasilkan dimensi ruang fase dan ruang parameter yang lebih sederhana. Metode ini menjamin bahwa solusi yang diperoleh dari bentuk normalnya akan berdekatan dengan solusi sistem awal dalam waktu yang panjang.

Hasil utama yang diperlihatkan pada paper ini adalah munculnya barisan bifurkasi *period-doubling*. Munculnya barisan bifurkasi ini di mulai dari kontinuitas titik ekuilibrium tak trivial pada sistem dengan variasi parameter. Kontinuitas ini memperlihatkan ada bifurkasi *hopf* disertai munculnya solusi periodik berupa *limit cycle*. Selanjutnya solusi periodik tersebut di kontinuitas dengan variasi parameter dan memperlihatkan munculnya barisan bifurkasi *period-doubling*.

Hal yang menarik yaitu barisan bifurkasi *period-doubling* yang terbentuk ternyata merupakan barisan hingga dan pada akhirnya teridentifikasi penyebab barisan tersebut menjadi barisan hingga. Hal ini menjawab gagalnya dinamik *chaos* pada sistem karena tidak mungkin barisan hingga tersebut

menjadi barisan tak hingga bifurkasi *period-doubling*.

## 2. FORMULASI MASALAH

Pandang sistem persamaan diferensial di  $\mathbb{R}^3$  berikut:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \delta x r + \varepsilon \kappa_1 r, \\ \dot{x} &= \Omega(x, y) y - \delta r^2 - \varepsilon \kappa_2 x, \\ \dot{y} &= -\Omega(x, y) x - \varepsilon \kappa_2 y, \end{aligned} \quad (1.2)$$

dimana:

$\Omega(x, y) = \omega + \alpha x + \beta y$ , dan  $0 < \varepsilon \ll 1$  adalah parameter perturbasi.

Misalkan terdapat fungsi  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  didefinisikan oleh:

$$G(\xi) = \begin{bmatrix} \delta x r \\ \Omega(x, y) y - \delta r^2 \\ -\Omega(x, y) x \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

dimana  $\xi = (r, x, y)^T$ , dan  $\Omega(x, y) = \omega + \alpha x + \beta y$ . Didefinisikan juga fungsi  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  yaitu:

$$S(\xi) = r^2 + x^2 + y^2. \quad (1.4)$$

Kemudian kita definisikan:

$$S(R) := \{\xi | r^2 + x^2 + y^2 = R^2, R \geq 0\},$$

dengan kurva ketinggian  $S(\xi) = R^2$ . Perhatikan bahwa  $\xi \cdot G(\xi) = 0$  sehingga sifat mempertahankan jarak yang dimiliki sistem (1.1) tetap ada setelah penormalan. Dari sifat ini berakibat  $\frac{dS}{dt} = 0$  sepanjang solusi dari  $\dot{\xi} = G(\xi)$ . Ini berarti medan vektor  $G$  senantiasa tangensial pada permukaan bola  $S(\xi)$ . Pada Tuwankotta [7] diperlihatkan bahwa sistem (1.3) memiliki beberapa sifat simetri. Salah satunya yaitu dinamik untuk  $r > 0$  sama dengan dinamik untuk  $r < 0$  sehingga ruang fase dari sistem (1.2) dapat direduksi menjadi  $\mathcal{D} := \{r \geq 0 | r \in \mathbb{R}\}$ . Sifat simetri juga mereduksi nilai dari  $\beta$ , sehingga dapat dipilih  $\beta < 0$ . Selain itu diasumsikan bahwa  $\alpha, \delta \neq 0, \omega > 0$ , dan  $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ .

## 3. METODE PENELITIAN

Dalam mengidentifikasi bifurkasi yang terjadi dilakukan secara numerik menggunakan software komputasi numerik *Auto-07*. Adapun langkah-langkah yang dilakukan yaitu:

1. Identifikasi titik ekuilibrium.
2. Analisis kestabilan titik ekuilibrium.
3. Identifikasi bifurkasi dengan kontinuitas titik ekuilibrium dengan variasi satu parameter.
4. Identifikasi kurva bifurkasi jika berhasil mengidentifikasi bifurkasi yang terjadi.
5. Kontinuitas solusi periodik jika mendapatkan solusi periodik atau berhasil mengidentifikasi bifurkasi *hopf* (karena bifurkasi *hopf* selalu disertai munculnya *limit cycle*).
6. Analisis hubungan antara seluruh hasil kontinuitas yang didapatkan.
7. Simulasi terhadap dinamik dari seluruh tahap sebelumnya yang dapat membantu menjelaskan hasil yang didapatkan.

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Titik Ekuilibrium

Ketika sistem terperturbasi ( $\varepsilon \neq 0$ ), sistem menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \delta x r + \varepsilon \kappa_1 r, \\ \dot{x} &= \Omega(x, y) y - \delta r^2 - \varepsilon \kappa_2 x, \\ \dot{y} &= -\Omega(x, y) x - \varepsilon \kappa_2 y, \end{aligned} \quad (4.1)$$

dimana:

$\Omega(x, y) = \omega + \alpha x + \beta y$ , dan  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Dengan mudah kita identifikasi bahwa ada titik ekuilibrium trivial  $(\bar{r}, \bar{x}, \bar{y}) = (0, 0, 0)$  pada sistem (4.1). Dengan proses aljabar sederhana, dapat pula diidentifikasi titik ekuilibrium tak trivial  $(\bar{r}, \bar{x}, \bar{y}) = (r_0, x_0, y_0)$ , dimana:

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{\frac{(\varepsilon^2 (\beta \kappa_1 - \delta \kappa_2)^2 + (\varepsilon \alpha \kappa_1 - \delta \omega)^2) \kappa_1 \kappa_2}{((\beta \kappa_1 - \delta \kappa_2) \delta)^2}}, \\ x_0 &= -\varepsilon \frac{\kappa_1}{\delta}, \\ y_0 &= \frac{(\varepsilon \alpha \kappa_1 - \delta \omega) \kappa_1}{(\beta \kappa_1 - \delta \kappa_2) \delta}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ekuilibrium tak trivial ini ada apabila  $(\beta \kappa_1 - \delta \kappa_2) \delta \neq 0$  dan  $\delta \neq 0$ .

Dari persamaan (4.1) maka:

$$J(\bar{r}, \bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \varepsilon \kappa_1 + \delta \bar{x} & \delta \bar{r} & 0 \\ -2\delta \bar{r} & -\varepsilon \kappa_2 + \alpha \bar{y} & \omega + \alpha \bar{x} + 2\beta \bar{y} \\ 0 & -(\omega + 2\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) & -(\beta \bar{x} + \varepsilon \kappa_2) \end{bmatrix}$$

Sehingga titik ekuilibrium trivial akan memberikan nilai eigen  $\varepsilon\kappa_1$ , dan  $-\varepsilon\kappa_2 \pm \omega i$ . Akibat asumsi  $\kappa_1\kappa_2 > 0$ , maka ada dua kasus yaitu:

1.  $\kappa_1 > 0$ , dan  $\kappa_2 > 0$ , dan
2.  $\kappa_1 < 0$ , dan  $\kappa_2 < 0$ ,

dimana untuk kedua kasus sama-sama akan mengakibatkan titik ekuilibrium trivial adalah titik ekuilibrium tipe *saddle*.

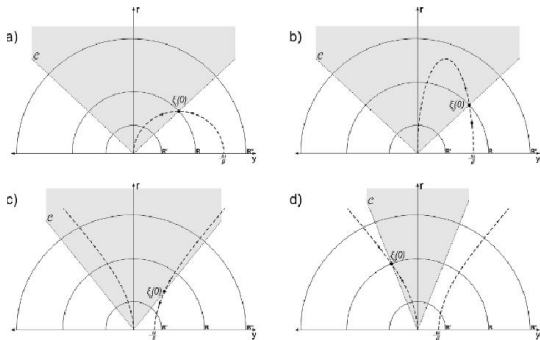
Pandang fungsi:

$$S(\xi) = r^2 + x^2 + y^2.$$

Dengan menerapkan fungsi tersebut ke sistem (4.1), diperoleh:

$$\dot{S} = 2\varepsilon(\kappa_1 r^2 - \kappa_2(x^2 + y^2)).$$

Ketika  $\dot{S} = 0$ , didapatkan persamaan kerucut  $\mathcal{C}$  diruang fase  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ . Kerucut  $\mathcal{C}$  membagi ruang fase  $\mathcal{D}$  menjadi dua bagian. Bagian dalam ketika  $\dot{S} > 0$  dan bagian luar ketika  $\dot{S} < 0$ . Ketika  $\dot{S} > 0$ , solusi akan bergerak menjauhi ekuilibrium trivial, sedangkan ketika  $\dot{S} < 0$ , solusi akan bergerak mendekati ekuilibrium trivial. Titik-titik ekuilibrium tak trivial sistem (4.1) akan terletak pada kerucut  $\mathcal{C}$ . Perhatikan gambar (4.1):



**Gambar 4.1:** Letak titik ekuilibrium tak trivial pada bidang  $(r,y)$ . Garis yang membentuk kerucut  $\mathcal{C}$  (garis putus-putus) membagi ruang fase menjadi dua bagian yaitu bagian dalam (yang diarsir) dengan semua solusinya bergerak menjauhi titik ekuilibrium trivial dan bagian luar dengan semua solusi mendekati titik ekuilibrium trivial.

Gambar (1.a) dan (1.b) merupakan ilustrasi dari kasus  $\delta > 0$  sedangkan gambar (1.c) dan (1.d) merupakan ilustrasi dari kasus  $\delta < 0$ . Titik ekuilibrium tersebut jika ada maka terletak pada kerucut  $\mathcal{C}$  disekitar titik potong dengan manifold ekuilibrium dibidang  $(x = 0)$  (elips atau hiperbola).

## 4.2 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi *Hopf* merupakan bifurkasi satu parameter dengan kontinuitas titik ekuilibrium. Dengan demikian, langkah awal yang dilakukan adalah dengan mengkontinuasi solusi ekuilibrium dalam hal ini adalah ekuilibrium tak trivial dengan memvariasikan salah satu parameter, dan menetapkan nilai untuk parameter lain. Dengan menetapkan nilai  $\beta < 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 > 0$  dan melakukan variasi parameter  $\delta$  untuk mengkontinuasi titik ekuilibrium, maka bifurkasi *hopf* terjadi di  $\delta = -\frac{\beta\kappa_1}{2\kappa_1 + \kappa_2}$ . Hal ini secara analitik dapat dilihat dari nilai eigen  $J(r_0, x_0, y_0)$ .

Dalam melakukan komputasi numerik, ditetapkan beberapa nilai parameter:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 5, & \beta &= -6, \\ \kappa_2 &= 1, & \omega &= 3, \\ \alpha &= -2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

dengan perturbasi sebesar:

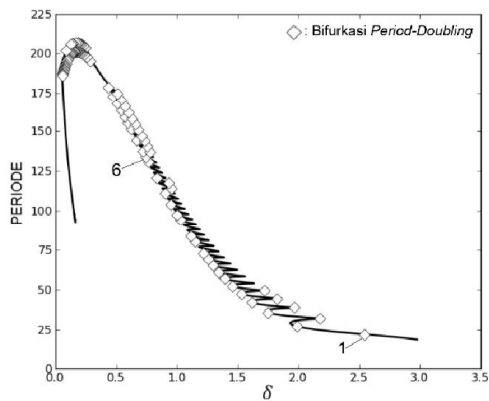
$$\varepsilon = 0.015.$$

Dengan nilai parameter diatas, menurut prediksi analisis, bifurkasi *hopf* terjadi pada saat  $\delta = 2.73$ . Dengan Komputasi numerik menggunakan Auto-07, didapatkan Bifurkasi *hopf* terjadi disekitar  $\delta = 3.02$  dan  $\delta = 0.164$ .

## 4.3 Barisan Hingga Bifurkasi Period-Doubling

Perhatikan kembali data numerik (4.3). Selanjutnya ditetapkan nilai  $\delta = 3.5$ , sehingga titik ekuilibrium tersebut stabil. Kemudian titik ekuilibrium tersebut dikontinuasi dengan memvariasikan parameter  $\delta$ . Disekitar  $\delta = 3.02$ , terjadi bifurkasi *hopf* disertai munculnya solusi periodik stabil.

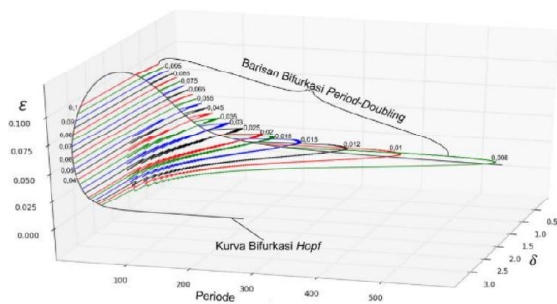
Selanjutnya dilakukan kontinuitas solusi periodik dengan tetap memvariasikan parameter  $\delta$ . Ketika dilakukan komputasi *backward*, solusi periodik tersebut mengalami bifurkasi *period-doubling* berkali-kali membentuk barisan bifurkasi *period-doubling*. Barisan bifurkasi *period-doubling* tersebut berhenti pada saat  $\delta = 0.164$ . Perhatikan gambar (4.2):



**Gambar 4.2:** Kontinuasi solusi periodik yang membentuk barisan hingga bifurkasi *period-doubling* pada saat  $\varepsilon = 0.015$ .

Dapat kita lihat bahwa berhentinya kontinuasi solusi periodik tersebut terjadi pada nilai  $\delta$  yang sama dengan solusi periodik yang terjadi pada bifurkasi *hopf* kedua pada analisis sebelumnya. Dengan melihat perilaku dari solusi periodik yang membentuk barisan bifurkasi *period-doubling*, maka ada indikasi terjadinya *chaos*. Hal ini bisa terjadi jika barisan bifurkasi *period-doubling* tersebut menjadi barisan tak hingga bifurkasi *period-doubling* dengan periodenya mendekati tak hingga. Oleh karena itu dilakukan variasi terhadap parameter untuk melihat kemungkinan terjadi barisan tak hingga bifurkasi *period-doubling*.

Selanjutnya diberikan perlakuan yang sama secara numerik dengan merubah nilai pertubasi. Untuk nilai pertubasi yang cukup kecilpun (sampai  $\varepsilon = 0.008$ ) terjadi hal yang sama, dimana kontinuasi solusi periodik membentuk barisan hingga bifurkasi *period-doubling* yang terhenti pada *bifurkasi hopf* kedua. Selanjutnya dilakukan kontinuasi *bifurkasi hopf* untuk melihat hubungan antara kontinuasi solusi periodik dengan kurva *hopf*. Simulasi yang terjadi dapat diperhatikan pada gambar(4.3):

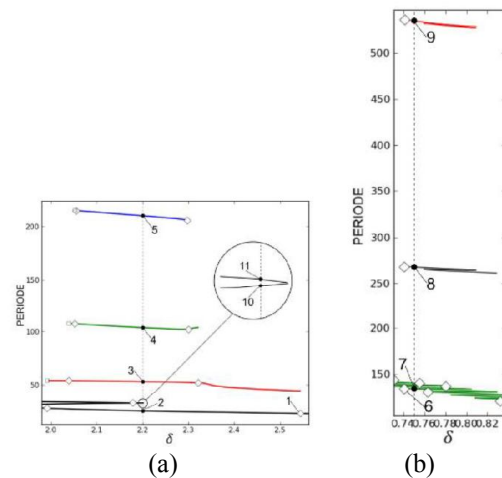


**Gambar 4.3:** Barisan bifurkasi *period-doubling* untuk beberapa nilai  $\varepsilon$ .

Perhatikan bahwa kontinuasi solusi periodik yang dimulai dari solusi periodik yang terbentuk pada saat terjadi bifurkasi *hopf*, selalu berakhir juga pada solusi periodik yang terbentuk pada saat terjadi bifurkasi *hopf* di kurva yang sama dengan bifurkasi *hopf* sebelumnya. Hal ini mengindikasikan bahwa barisan bifurkasi *period-doubling* yang muncul akan selalu membentuk barisan hingga. Hal ini menjawab kegagalan dinamik *chaos* dengan memberikan pertubasi terhadap sistem agar barisan bifurkasi tersebut menjadi barisan tak hingga bifurkasi *period-doubling*.

#### 4.4 Dinamik Solusi Periodik dari Barisan Hingga Bifurkasi *Period-Doubling*

Pada saat terjadi bifurkasi *period-doubling*, salah satu solusi periodik pecah menjadi dua buah solusi periodik dengan solusi periodik yang baru memiliki periode dua kali periode dari solusi periodik sebelumnya. Perhatikan gambar (4.4):

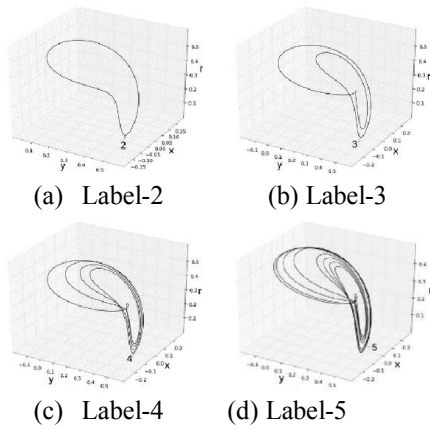


**Gambar 4.4:** Cabang dari bifurkasi *period-doubling* di label-1 dan label-6 dari gambar (4.3). Ketika kontinuasi solusi periodik di  $\varepsilon = 0.014$ , ditemukan barisan hingga *period-doubling*. Di dua titik bifurkasi (label-1 dan label-6), dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik. Continuasi tersebut mengalami bifurkasi *period-doubling* lagi. Kemudian dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik lagi dan kembali mengalami bifurkasi *period-doubling*. (pada gambar, untuk label-1 di plot 3 cabang kontinuasi baru, sedangkan untuk label-6 di plot 2 cabang kontinuasi baru).

Di label-1 dan label-6 pada gambar (4.3) dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik. Cabang baru yang didapatkan ternyata juga mengalami bifurkasi *period-doubling*. Pergantian cabang kontinuasi juga dilakukan pada cabang baru tersebut dan kembali terjadi bifurkasi *period-doubling*.

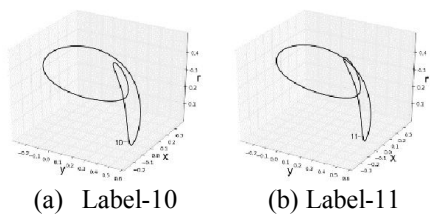
Pada gambar (4.4.a) disimulasikan 3 cabang baru dari bifurkasi *period-doubling* oleh *label-1*, dan pada gambar (4.4.b) diperlihatkan 2 cabang baru dari bifurkasi *period-doubling* pada *label-6*.

Untuk selanjutnya dinamik dari masing-masing cabang kontinuasi dapat dilihat pada gambar (4.5) dan (4.6). Perhatikan gambar (4.5), dimana pada saat  $\delta = 2.2$ , diplot 4 solusi periodik di 4 cabang kontinuasi yang berbeda. Diperlihatkan bahwa solusi periodik di *label-(2,3,4,5)* memiliki struktur orbit periodik yang serupa, namun memiliki periode dua kali dari cabang sebelumnya. Solusi periodik pada *label-3* memiliki periode dua kali dari solusi periodik *label-2* dan demikian seterusnya.



**Gambar 4.5:**Plot 4 buah solusi periodik di percabangan pada *label-1* gambar (4.4).

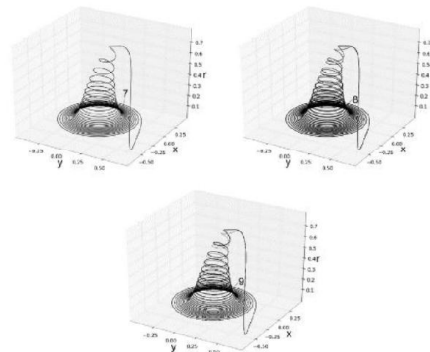
Perhatikan gambar (4.6). Pada *label-10* dan *label-11* diperlihatkan solusi periodik ang lain, namun di nilai  $\delta$  yang sama di  $\delta = 2.2$ . Kedua solusi periodik ini memiliki struktur orbit yang berbeda dengan solusi periodik pada *label-(2,3,4,5)*. Hal ini menjelaskan bahwa solusi periodik pada *label-10* dan *label-11* tidak berhubungan dengan terjadinya bifurkasi *period-doubling* pada *label-1*, walaupun dinilai  $\delta$  yang sama.



**Gambar 4.6:** Plot 2 buah solusi periodik lain di  $\delta = 2.2$  pada kontinuasi solusi periodik.

Perhatikan gambar (4.7). Hal serupa terjadi pada percabangan *label-6*. Dilakukan

pergantian cabang kontinuasi solusi periodik, dan kontinuasi solusi periodik pada cabang yang baru itu juga mengalami bifurkasi *period-doubling*. Kemudian diplot solusi periodik pada setiap cabang dengan nilai  $\delta = 0.75$ . Dapat dilihat bahwa *label-(7,8,9)* memiliki struktur orbit serupa, namun memiliki periode yang berbeda. *Label-8* memiliki periode dua kali dari periode solusi periodik di *label-7*, dan *label-9* juga memiliki periode dua kali dari solusi periodik *label-8*.



**Gambar 4.7:** Plot 3 buah solusi periodik dipercabangan *label-6* gambar (4.4)

## 5. KESIMPULAN

Sistem yang dipelajari dalam paper ini adalah sistem interaksi nonlinear sepasang osilator dengan perbandingan frekuensi 1:  $\epsilon$  dengan ketaklinearannya adalah kuadratik yang mempertahankan energi.

Perubahan dinamik terjadi ketika dilakukan kontinuasi titik ekuilibrium tak trivial dengan variasi satu parameter yang mendapatkan terjadinya bifurkasi *hopf*. Munculnya bifurkasi *hopf* disertai dengan adanya solusi periodik terisolasi sehingga analisa dilanjutkan dengan kontinuasi solusi periodik tersebut dengan variasi parameter yang sama dengan kontinuasi solusi periodik sebelumnya.

Hasil kontinuasi didapatkan berupa barisan hingga bifurkasi *period-doubling*. Dengan munculnya barisan ini maka seharusnya terindikasi kemungkinan munculnya *chaos* pada sistem. Namun dengan merubah nilai perturbasi ternyata tidak akan berdampak pada barisan bifurkasi *period-doubling* tersebut menjadi barisan tak hingga dengan periode membesar dan mendekati tak hingga juga. Analisis selanjutnya memperlihatkan bahwa hal ini terjadi karena barisan bifurkasi *period-doubling* selalu

berawal dari munculnya solusi periodik ketika terjadi bifurkasi *hopf* yang satu dan berakhir ke solusi periodik ketika terjadi bifurkasi *hopf* yang lain, dimana kedua bifurkasi *hopf* tersebut berada di kurva bifurkasi yang sama. Hal ini mengakibatkan barisan bifurkasi *period-doubling* tersebut adalah barisan berhingga sehingga teridentifikasi tidak berubahnya sifat barisan bifurkasi *period-doubling* tersebut dengan memvariasikan parameter perturbasi. Hal ini berarti barisan bifurkasi *period-doubling* ini tidak akan memicu terjadinya *chaos*.

Hal yang menarik selanjutnya adalah dinamik dari solusi periodik hasil percabangan yang bukan hanya memiliki periode dua kali dari solusi periodik sebelumnya, namun juga memiliki struktur orbit yang sama dengan sebelumnya.

## 6. REFERENSI

1. Carr, J. (1981), *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York.
2. Crommelin, D. T. (2002), *Homoclinic Dynamic : A Scenario for Atmospheric Ultra Low-Frequency Variability*, J. Atmos. Sci.
3. Champneys, A. R, et al. (2009), *Auto-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*.
4. Kelley, A. (1967), *The Stable, Center Stable, Center, Center Unstable and Unstable Manifold*, J. Diff. Eqns.
5. Kuznetsov, Y. A. (1998), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York.
6. Tuwankotta, J. M. (2003) , *Widely Separated Frequencies in Coupled Oscillators with Energy-Preserving Quadratic nonlinearity*, Phisica D.
7. Tuwankotta, J. M. (2004), *Averaging Method and Normal Form for Coupled-Oscillators with Widely-Space frequencies and Energy-Preserving Nonlinearity*, J. Indones. Math. Soc (MIHMI).
8. Verhulst, F. (1996), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
9. Wiggins, S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Spriger-Verlag, New York.