SUKU KE-n BARISAN ARITMETIKA TINGKAT DUA, TIGA DAN EMPAT DENGAN PENDEKATAN AKAR KARAKTERISTIK

Drs. Sumarno Imail, M.Pd

ABSTRAK

Untuk memenuhi kebutuhan dalam pengembangan pemahaman terhadap substansi materi barisan aritmetika, kajian ini memberikan uraian tentang barisan aritmetika tingkat tinggi. Uraian hanya dibatasi pada barisan aritmetika tingkat dua, tingkat tiga dan tingkat empat. Kajian didasarkan tinjauan teoretis melalui pendekatan relasi rekursif melalui akarkarakteristik. Hasil dari kajian adalah : (1) Pola umum suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat dua adalah $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ dengan syarat atau nilai awal a_1, a_2 dan a_3, dengan solusi umum pola barisan aritmetika tingkat dua $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2$, (2) Pola umum suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat tiga adalah $a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$ dengan syarat atau nilai awal a_1, a_2, a_3 dan a_4, solusi umum pola barisan aritmetika tingkat tiga $a_n = c_1 + nc_2 + n^2 c_3 + n^3 c_4$ dan (3) Pola umum suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat empat adalah $a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$. solusi umum pola barisan aritmetika tingkat empat $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3 + c_5 n^4$.

PENDAHULUAN

Barisan aritmetika merupakan salah satu dari barisan bilangan yang menjadi salah satu materi pokok di dalam kurikulum matematika sekolah khsusnya di sekolah menengah. Sebagi ciri utama dari barisan ini adalah setiap suku yang berurutan memiliki selisih atau beda yang sama. Pokok kajian substansi materi ini adalah (1) menentukan beda, (2) menentukan suku ke-n dan (3) menghitung jumlah n buah suku berurutan. Jika ruang lingkup substansi materi barisan ini hanya dibatasi pada tiga hal di atas, maka sering dirasakan belum cukup untuk mengembangkan kemampuan penalaran matematika dalam menyelesaikan masalah yang terkait. Sebagian besar mereka yang pernah mempelajari barisan aritmetika berpendapat bahwa (a_n) = (2, 3, 7, 14, 24, 37, …) bukan merupakan barisan aritmetika. Alasan yang dikemukakan adalah barisan ini tidak memenuhi syarat sebagai barisan aritmetika sebab suku-suku yang berurutan pada barisan ini semuanya berbeda.

Untuk memenuhi kebutuhan dalam pengembangan pemahaman terhadap substansi materi barisan aritmetika, kajian ini memberikan uraian tentang barisan aritmetika tingkat tinggi. Sebagai kajian awal uraian hanya dibatasi pada barisan aritmetika tingkat dua, tingkat tiga dan tingkat empat.

Induktif menjadi pendekatan yang digunakan di dalam kajian ini. Dalam hal ini (1) diberikan sajian contoh barisan aritmetika tingkat dua, tingkat tiga dan tingkat empat, (2) tinjauan suku dan beda, (3) hubungan barisan pada satu tingkat dengan tingkat berikutnya dan (4) pendekatan relasi rekursif dengan akar karakteristik untuk menemukan pola barisan aritmetika tingkat dua, tingkat tiga dan tingkat empat dan (5) penarikan kesimpulan suku ke-n suatu barisan aritmetika tertentu pada tingkat dua, tingkat tiga dan tingkat empat.

TINJAUAN BARISAN ARITMETIKA TINGKAT TINGGI

1.1 Barisan Aritmetika Tingkat Dua

Secara umum barisan bilangan dapat dinyatakan sebagai $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n)$. Dalam hal ini (a_n) nama barisan bilangan, a_1 suku pertama, a_2 suku kedua, a_3 suku ketiga dan seterusnya a_n adalah suku ke-n. Beda dari dua suku yang berutan adalah selisih dari suku sesudahnya dan suku sebelumnya, seperti $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, $a_5 - a_4$ dan seterusnya $a_n - a_{n-1}$.

Misalkan suatu barisan $(a_n) = (2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots)$. Selisih masing-masing suku yang berurutan dari barisan ini berturut-turut sebagai berikut:

$$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 1$$

$$a_3 - a_2 = 7 - 3 = 4$$

$a_4 - a_3 = 14 - 7 = 7$

$a_5 - a_4 = 24 - 14 = 10$

$a_6 - a_5 = 37 - 24 = 13$

dan seterusnya

Jika diperhatikan bilangan-bilangan sebagai beda dari setiap suku berurutan pada barisan (a_n), maka diperoleh barisan (b_n) = (1, 4, 7, 10, 13, …). Sekarang ditemukan bahwa barisan (b_n) adalah barisan aritmetika karena setiap dua suku yang berurutan memiliki beda yang sama yakni k = 3. Barisan (a_n) dan (b_n) dapat disajikan secara bertingkat sebagai berikut.

Tingkat dua	2	3	7	14	24	37	…
Tingkat satu	1	4	7	10	13	…	
Beda		3	3	3	3	…	

Kecermatan kita mengamati barisan di atas menemukan bahwa barisan (a_n) ditingkat dua menghasilkan barisan (b_n) ditingkat satu sebagai barisan aritmetika dengan beda k = 3. Oleh sebab itu (a_n) dinamakan barisan aritmetika tingkat dua.

Definisi 1 : Barisan aritmetika tingkat dua adalah suatu barisan di tingkat dua yang menghasilkan barisan aritmetika di tingkat satu.

Secara umum barisan aritmetika tingkat dua susunannya sebagai tingkatan dimaksus disajikan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & \cdots \\
& b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & \cdots & \\
& & k & & k & & k & & k & & \cdots & &
\end{array}
\qquad (2.1)
$$

Dari (2.1) diperoleh hubungan sebagai berikut

$$
\begin{array}{ll}
a_2 - a_1 = b_1 & b_2 - b_1 = k \\
a_3 - a_2 = b_2 & b_3 - b_2 = k \\
a_4 - a_3 = b_3 & b_4 - b_3 = k \\
a_5 - a_4 = b_4 & b_5 - b_4 = k \\
a_6 - a_5 = b_5 & b_6 - b_5 = k \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
a_n - a_{n-1} = b_n & b_n - b_{n-1} = k
\end{array}
\qquad (2.2)
$$

Dari (2.2) diperoleh :

$$
\begin{array}{l}
a_3 - a_2 = b_2 \\
\underline{a_2 - a_1 = b_1} - \\
a_3 - 2a_2 + a_1 = b_2 - b_1 = k
\end{array}
\qquad (2.3)
$$

$$
\begin{array}{l}
a_4 - a_3 = b_3 \\
\underline{a_3 - a_2 = b_2} - \\
a_4 - 2a_3 + a_2 = b_3 - b_2 = k
\end{array}
\qquad (2.4)
$$

Dari (2.3) dan (2.4) diperoleh :

$$a_4 - 2a_3 + a_2 = a_3 - 2a_2 + a_1$$

$$a_4 = 3a_3 - 3a_2 + a_1 \qquad (2.5)$$

$$
\begin{aligned}
a_6 - a_5 &= b_5 \\
\underline{a_5 - a_4} &\underline{= b_4} \; - \\
a_6 - 2a_5 + a_4 &= b_5 - b_4 = k
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
a_7 - a_6 &= b_6 \\
\underline{a_6 - a_5} &\underline{= b_5} \; - \\
a_7 - 2a_6 + a_5 &= b_6 - b_5 = k
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Dari (2.6) dan (2.7)

$$a_7 - 2a_6 + a_5 = a_6 - 2a_5 + a_4$$

$$a_7 = 3a_6 - 3a_5 + a_4 \tag{2.8}$$

Dari (2.5) dan (2.8) dapat dibuat analog;

$$a_4 = 3a_3 - 3a_2 + a_1$$

$$a_5 = 3a_4 - 3a_3 + a_2$$

$$a_6 = 3a_5 - 3a_4 + a_3$$

$$a_7 = 3a_6 - 3a_5 + a_4$$

.

.

.

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

Pola suku ke-n suatu barisan aritmetika tingkat dua adalah

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \tag{2.9}$$

Rumus suku ke-n dari barisan aritmetika tingkat dua didasarkan pada pola tersebut, jika diselesaikan secara rekursif, maka diperlukan nilai awal a_1, a_2 dan a_3 (disebut tiga nilai awal atau syarat awal).

Secara rekursif dengan metode akar karakteristik beberapa hal yang perlu diperhatikan adalah :

Hal-hal yang dirangkum tentang relasi rekursif dari Budayasa (2010) adalah sebagai berikut :

Untuk $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \ldots + c_n a_{n-k} = 0$

(1) Misalkan $a_n = x^n$, $x \neq 0$;

(2) Substitusikan a_i dengan x^i, $i \in \{n, n-1, n-2, \ldots, n-k\}$, sedemikian sehingga diperoleh bagian rekursif;

(3) Lakukan pembagian dengan x^{n-k}, sedemikian sehingga diperoleh persamaan
$\mathbf{x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k = 0}$ yang disebut persamaan karakteristik dari relasi rekursif yang ini memiliki k buah akar;

(4) Dapatkan solusi umum relasi rekursif tersebut

Sejalan dengan pendapat di atas, Sugirman (204, 117) mengemukakan pada relasi homogen berorder dua secara umum dinyatakan :

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2}\, a_{n-2} = 0;\ n \geq 2.$$

Pada dasarnya kita akan mencari solusi dalam bentuk $a_n = c_{rn}$; dimana $c \neq 0$ dan $r \neq 0$. Pada bagian ini kita akan membahas relasi homogen berorder dua: $C_n r^n + C_{n-1}\, r^{n-1} + C_{n-2}\, r^{n-2} = 0;\ n \geq 2.$

Pada dasarnya kita akan mencari solusi dalam bentuk an = c r^n; dalam hal ini $c \neq 0$ dan $r \neq 0$.

Contoh 1: Menentukan suku ke-n dari $(a_n) = (2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots)$

Pola barisan aritmetika tingkat dua pada (2.9) dapat digunakan untuk menentukan suku ke-n dari (a_n) sebagai berikut:

$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, $n \geq 4$ dengan $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ dan $a_3 = 7$

Misalkan $a_n = x^n$, $x \neq 0$

Substitusi $a_n = x^n$ ke $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, sedemikian sehingga diperoleh bagian rekursif:

$x^n = 3x^{n-1} - 3x^{n-2} + x^{n-3}$, bagilah persamaan ini dengan x^{n-3} sedemikian sehingga diperoleh

$x^3 = 3x^2 - 3x + 1$;

$\Leftrightarrow$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ disebut persamaan karakteristik.

$\Leftrightarrow$ (x – 1) (x – 1)(x – 1) = 0 diperoleh akar-akar :

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dalam hal ini persamaan karakteristik memiliki 3 buah akar rangkap, sehingga solusi umum dari pola di atas dinyatakan sebagai :

$a_n = c_1 x_1^n + c_2 n x_2^n + c_3 n^2 x_3^n$ karena $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, maka

$a_n = c_1(1^n) + c_2 n(1^n) + c_3 n^2(1^n)$

$a_n = c_1 + c_2 n + c_1 n^2$ dinamakan solusi umum.

Karena syarat atau nilai awal $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ dan $a_3 = 7$, maka diperoleh, maka berturut-turut diperoleh :

$a_1 = c_1 + c_2(1) + c_3(1^2) \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 2$ (*)

$a_2 = c_1 + c_2(2) + c_3(2^2) \Rightarrow c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 3$ (**)

$a_3 = c_1 + c_2(3) + c_3(3^2) \Rightarrow c_1 + 3c_2 + 9c_3 = 7$ (***)

Persamaan (*), (**) dan (***) merupakan system persamaan linier dalam c_1, c_2, c_3. Himpunan penyelesaian dari system persamaan linier ini adalah $c_1 = 4,\ c_2 = -\frac{7}{2}$ dan $c_3 = \frac{3}{2}$. Jika nilai-nilai ini disubstitusikan

ke solusi umum, maka diperoleh : $a_n = 4 - \frac{7}{2}n + \frac{3}{2}n^2$

Jadi rumus suku ke-n dari barisan aritmetika tingkat dua dari (a_n) = (2, 3, 7, 14, 24, 37, …) adalah :

$$a_n = 4 - \frac{7}{2}n + \frac{3}{2}n^2 \text{ dengan nilai awal}$$

Cek suku ke-4 : $a_4 = 4 - \frac{7}{2} \times 4 + \frac{3}{2} \times 4^2$

$$a_4 = 4 - \frac{28}{2} + \frac{48}{2} = 14$$

Cek suku ke-6 : $a_4 = 4 - \frac{7}{2} \times 6 + \frac{3}{2} \times 6^2$

$$a_6 = 4 - \frac{42}{2} + \frac{108}{2} = 37$$

1.2 Barisan Aritmetika Tingkat Tiga

Perhatikan barisan (a_n) = (1, 3, 8, 18, 53, 61, 98, 148, …), barisan ini disusun dalam tingkat sebagai berikut

Tingkat tiga	1		3		8		18		35		61		98 …
Tingkat dua		2		5		10		17		26		37 …	
Tingkat satu			3		5		7		9		11 …		
Beda				2		2		2		2 …			

Misalkan barisan di tingkat tiga (a_n) = (1, 3, 8, 18, 53, 61, 98, 148, …)

barisan di tingkat dua (b_n) = (2, 5, 10, 17, 26, 37, …)

barisan di tingkat satu (c_n) = (3, 5, 7, 9, 11, …)

Memperhatikan barisan di atas, ditemukan bahwa barisan (a_n) di tingkat tiga menghasilkan barisan (c_n) di tingkat satu sebagai barisan aritmetika dengan beda k = 2. Oleh sebab itu (a_n) dinamakan barisan aritmetika tingkat tiga.

Definisi 2 : Barisan aritmetika tingkat tiga adalah suatu barisan di tingkat tiga yang menghasilkan barisan aritmetika di tingkat satu.

Secara umum barisan aritmetika tingkat dua dapat susunan barisan dalam tingkatan itu disajikan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
\text{Tingkat tiga} & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & \cdots & a_n & & & \\
\text{Tingkat dua} & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \cdots & b_n & & & & \\
\text{Tingkat satu} & & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & \cdots & c_n & & & & & (3.1) \\
\text{Beda} & & & & k & & k & & k & \cdots & k & & & & & &
\end{array}
$$

Dari (3.1) diperoleh hubungan sebagai berikut

$$
\begin{array}{lll}
a_2 - a_1 = b_1 & b_2 - b_1 = c_1 & c_2 - c_1 = k \\
a_3 - a_2 = b_2 & b_3 - b_2 = c_2 & c_3 - c_2 = k \\
a_4 - a_3 = b_3 & b_4 - b_3 = c_3 & c_4 - c_3 = k \\
a_5 - a_4 = b_4 & b_5 - b_4 = cb_4 & c_5 - c_4 = k \\
a_6 - a_5 = b_5 & b_6 - b_5 = c_5 & c_6 - c_5 = k \qquad (3.2) \\
. & . & . \\
. & . & . \\
. & . & . \\
a_n - a_{n-1} = b_n & b_n - b_{n-1} = c_n & c_n - c_{n-1} = k
\end{array}
$$

Dari (3.2) diperoleh :

$$\begin{array}{l} b_3 - b_2 = c_2 \\ \underline{b_2 - b_1 = c_1} - \\ b_3 - 2b_2 + b_1 = c_2 - c_1 = k \end{array} \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{l} b_4 - b_3 = c_3 \\ \underline{b_3 - b_2 = c_2} - \\ b_4 - 2b_3 + b_2 = c_3 - c_2 = k \end{array} \quad (3.4)$$

Dari (3.3) dan (3.4) diperoleh :

$$b_4 - 2b_3 + b_2 = b_3 - 2b_2 + b_1$$

$$b_4 = 3b_3 - 3b_2 + b_1 \quad (3.5)$$

Dari (3.2) dan (3,5) diperoleh:

$$b_4 = 3b_3 - 3b_2 + b_1$$

$$\Leftrightarrow a_5 - a_4 = 3(a_4 - a_3) - 3(a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$$

$$\Leftrightarrow a_5 = a_4 + 3a_4 - 3a_3 - 3a_3 + 3a_2 + a_2 - a_1$$

$$\Leftrightarrow a_5 = 4a_4 - 6a_3 + 4a_2 - a_1 \quad (3.6)$$

Analog dengan (3.3), (3.4) dan (3.5) dapat ditunjukkan

$$a_6 = 4a_5 - 6a_4 + 4a_3 - a_2$$

$$a_7 = 4a_6 - 6a_5 + 4a_4 - a_3$$

$$a_8 = 4a_7 - 6a_6 + 4a_5 - a_4.$$

$$\vdots$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$$

Jadi pola suku ke-n suatu barisan aritmetika tingkat tiga adalah

$$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4} \tag{3.7}$$

Berdasarkan pola tersebut, selanjutnya rumus suku ke-n dari barisan aritmetika tingkat tiga dapat diselesaikan secara rekursif. Penyelesaian secara rekursif memerlukan 4 buah nilai awal yakni a_1, a_2, a_3 dan a_4

Contoh 2: Menentukan suku ke-n dari (a_n) = (1, 3, 8, 18, 53, 61, 98, 148, …)

Pola barisan aritmetika tingkat tiga pada (3.7) dapat digunakan untuk menentukan suku ke-n dari (a_n) sebagai berikut:

$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$, $n \geq 5$ dengan $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$ dan $a_4 = 18$

Menggunakan pendekatan akar karakteristi, misalkan $a_n = x^n$, $x \neq 0$

Substitusi $a_n = x^n$ ke $a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$, sedemikai sehingga diperoleh bagian rekursif: $x^n = 4x^{n-1} - 6x^{n-2} + 4x^{n-3} - x^{n-4}$, bagilah persamaan ini dengan x^{n-4} sedemikian sehingga diperoleh

$$x^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$$

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ persamaan ini disebut persamaan karakteristik.

Persamaan karakteristik ini ternyata memiliki 4 akar rangkap yaitu:

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, sehingga solusi umum dari pola di atas dinyatakan sebagai :

$a_n = c_1 x_1^n + c_2 n x_2^n + c_3 n^2 x_3^n + c_4 n^3 x_4^n$ karena $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, maka

$a_n = c_1(1^n) + c_2 n(1^n) + c_3 n^2(1^n) + c_3 n^3(1^n)$ diperoleh

$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3$ atau $a_n = c_1 + nc_2 + n^2 c_3 + n^3 c_4$ dinamakan solusi umum yang memerlukan 4 syarat atau nilai awal yakni a_1, a_2, a_3 dan a_4.

Solusi umum ini digunakan untuk menemukan rumus suku ke-n dari bariasan pada barisan (a_n) = (1, 3, 8, 18, 53, 61, 98, 148, …), di dalamnya terdapat syara awal yakni $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$ dan $a_4 = 18$, jika disubstitusikan ke solusi umum, maka diperoleh system persamaan linier dalam 4 variabel yakni c_1, c_2, c_3, c_4 sebagai berikut:

$$a_1 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

$$a_2 = c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 \Rightarrow c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 = 3$$

$$a_3 = c_1 + 3c_2 + 9c_3 + 27c_4 \Rightarrow c_1 + 3c_2 + 9c_3 + 27c_4 = 8$$

$$a_4 = c_1 + 4c_2 + 16c_3 + 64c_4 \Rightarrow c_1 + 4c_2 + 16c_3 + 64c_4 = 18$$

Himpunan penyelesaian dari system persamaan linier ini adalah $c_1 = 0,\ c_2 = \frac{7}{6}$ dan $c_3 = -\frac{1}{2}$ dan $c_4 = \frac{1}{3}$. Jika nilai-nilai ini disubstitusikan ke solusi umum, maka diperoleh : $a_n = \frac{7}{6} n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3$

Jadi rumus suku ke-n dari barisan aritmetika tingkat tiga dari (a_n) = (2, 3, 7, 14, 24, 37, …) adalah :

$$a_n = \frac{7}{6} n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3$$

Cek suku-suku pada barisan (a_n) = (1, 3, 8, 18, 53, 61, 98, 148, …):

$$a_1 = \frac{7}{6}(1) - \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3$$

$$= \frac{7}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} - \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Jadi benar bahwa $a_1 = 1$

$$a_3 = \frac{7}{6}(3) - \frac{1}{2}(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^3$$

$$= \frac{21}{6} - \frac{9}{2} + \frac{27}{3} = \frac{7}{6} - \frac{27}{6} + \frac{54}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

Jadi benar bahwa $a_3 = 8$

$$a_8 = \frac{7}{6}(8) - \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{1}{3}(8)^3$$

$$= \frac{56}{6} - \frac{64}{2} + \frac{512}{3} = \frac{56}{6} - \frac{192}{6} + \frac{1024}{6} = \frac{888}{6} = 148$$

Jadi benar bahwa $a_8 = 148$

1.3 Barisan Aritmetika Tingkat Empat

Misalkan : $(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, ..., a_n$ barisan di tingkat empa.

$(b_n) = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, ..., b_n$ barisan di tingkat tiga.

$(c_n) = c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, ..., c_n$ barisan di tingkat dua.

$(d_n) = d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, ..., d_n$ barisan di tingkat satu.

Secara umum barisan aritmetika tingkat dua susunannya sebagai tingkatan

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & \cdots & a_n \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \cdots & b_n & \end{array}$$

dimaksus disajikan sebagai berikut:

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \cdots \quad c_n$$

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \cdots \quad d_n$$

$$k \quad k \quad \cdots \quad k \tag{4.1}$$

Dari (4.1) diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\begin{array}{llll}
a_2 - a_1 = b_1 & b_2 - b_1 = c_1 & c_2 - c_1 = d_1 & d_2 - d_1 = k \\
a_3 - a_2 = b_2 & b_3 - b_2 = c_2 & c_3 - c_2 = d_2 & d_3 - d_2 = k \\
a_4 - a_3 = b_3 & b_4 - b_3 = c_3 & c_4 - c_3 = d_3 & d_4 - d_3 = k \\
a_5 - a_4 = b_4 & b_5 - b_4 = c_4 & c_5 - c_4 = d_4 & d_5 - d_4 = k \\
a_6 - a_5 = b_5 & b_6 - b_5 = c_5 & c_6 - c_5 = d_5 & d_6 - d_5 = k \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
a_n - a_{n-1} = b_n & b_n - b_{n-1} = c_n & c_n - c_{n-1} = d_n & d_n - d_{n-1} = k
\end{array} \tag{4.2}$$

Bilangan k adalah bilangan tetap yang diperoleh dari selisih setiap dua suku yang berurutan dari barisan (d_n).

Dari (4.2) diperoleh hubungan barisan di tingkat satu dan tingkat dua berikut:

$$\begin{array}{l} c_3 - c_2 = d_2 \\ \underline{c_2 - c_1 = d_1} - \\ c_3 - 2c_2 + c_1 = d_2 - d_1 = k \end{array} \quad \text{dan} \quad \begin{array}{l} c_4 - c_3 = d_3 \\ \underline{c_3 - c_2 = d_2} - \\ c_4 - 2c_3 + c_2 = d_3 - d_2 = k \end{array}$$

sehingga diperoleh $c_3 - 2c_2 + c_1 = c_4 - 2c_3 + c_2$

$$\Leftrightarrow \quad c_4 = 3c_3 - 3c_2 + c_1 \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{l} c_5 - c_4 = d_4 \\ \underline{c_4 - c_3 = d_3} - \\ c_5 - 2c_4 + c_3 = d_2 - d_1 = k \end{array} \quad \text{dan} \quad \begin{array}{l} c_4 - c_3 = d_3 \\ \underline{c_3 - c_2 = d_2} - \\ c_4 - 2c_3 + c_2 = d_3 - d_2 = k \end{array}$$

sehingga diperoleh $c_5 - 2c_4 + c_3 = c_4 - 2c_3 + c_2$

$$c_5 = 3c_4 - 3c_3 + c_2 \qquad (4.4)$$

Dari (4.3) dan (4.4) diperoleh :

$$c_4 = 3c_3 - 3c_2 + c_1$$

$c_5 = 3c_4 - 3c_3 + c_2$. Jika proses di atas dilanjutkan, maka berturut-turut akan diperoleh:

$$c_6 = 3c_5 - 3c_4 + c_3$$

$$c_7 = 3c_6 - 3c_5 + c_4$$

Dari (4.2) diperoleh hubungan barisan di tingkat satu dan tingkat dua berikut:

Dari $c_4 = 3c_3 - 3c_2 + c_1$

$$\Leftrightarrow b_5 - b_4 = 3(b_4 - b_3) - 3(b_3 - b_2) + (b_2 - b_1)$$

$$\Leftrightarrow b_5 = b_4 + 3b_4 - 3b_3 - 3b_3 + 3b_2 + b_2 - b_1$$

$$b_5 = 4b_4 - 6b_3 + 4b_2 - b_1$$

Analog dengan proses 4.4 diperoleh

$$b_6 = 4b_5 - 6b_4 + 4b_3 - b_2$$

$b_7 = 4b_6 - 6b_5 + 4b_4 - b_3$ dan seterusnya sampai dengan

$$b_n = 4b_{n-1} - 6b_{n-2} + 4b_{n-3} - b_{n-4} \qquad (4.4)$$

Hubungan barisan di tingkat tiga dan tingkat empat dengan menggunakan (4.4) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$b_n = 4b_{n-1} - 6b_{n-2} + 4b_{n-3} - b_{n-4}$$

$$a_n - a_{n-1} = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) - 6(a_{n-2} - a_{n-3}) + 4(a_{n-3} - a_{n-4}) - (a_{n-4} - a_{n-5})$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$$

Jadi pola suku ke-n suatu barisan aritmetika tingkat empat adalah

$$a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5} \qquad (4.5)$$

Menggunakan pendekatan akar karakteristi, misalkan $a_n = x^n,\ x \neq 0$

Substitusi $a_n = x^n$ ke (4.5), sedemikian sehingga diperoleh bagian rekursif:

$x^n = 5x^{n-1} - 10x^{n-2} + 10x^{n-3} - 5x^{n-4} + x^{n-5}$, bagilah persamaan ini dengan x^{n-5} sedemikian sehingga diperoleh

$x^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$ atau $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$.

Persamaan $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$ ini disebut persamaan karakteristik.

Persamaan karakteristik ini ternyata memiliki 5 akar rangkap yaitu: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$, sehingga solusi umum dari pola di atas dinyatakan sebagai :

$a_n = c_1 x_1^n + c_2 n x_2^n + c_3 n^2 x_3^n + c_4 n^3 x_4^n + c_5 n^4 x_5^n$ karena di atas diperoleh bahwa $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$, akaibatnya

$$a_n = c_1(1)^n + c_2 n(1)^n + c_3 n^2 (1)^n + c_4 n^3 (1)^n + c_5 n^4 (1)^n$$

diperoleh $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3 + c_5 n^4$.

Jadi solusi umum relasi rekursif di tas merupakan pola umum suatu barisan aritmetika tingkat empat.

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3 + c_5 n^4 \qquad (4.6)$$

dengan nilai atau syarat awal yakni a_1, a_2, a_3, a_4 dan a_5.

Contoh 3: Diberikan barisan (a_n) = (1, 4, 9, 20, 44, 91, 174, 309, …)

Solusi umum ini digunakan untuk menemukan rumus suku ke-n dari bariasan pada barisan (a_n) = (1, 4, 9, 20, 44, 91, 174, 309, …), di dalamnya terdapat syara awal yakni $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 20$ dan $a_5 = 44$, jika disubstitusikan ke solusi umum, maka diperoleh system persamaan linier dalam 5 variabel yakni c_1, c_2, c_3, c_4 dan c_5 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 1\\
a_2 &= c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 + 16c_5 \Rightarrow c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 + 16c_5 = 4\\
a_3 &= c_1 + 3c_2 + 9c_3 + 27c_4 + 81c_5 \Rightarrow c_1 + 3c_2 + 9c_3 + 27c_4 + 81c_5 = 9 \qquad (4.7)\\
a_4 &= c_1 + 4c_2 + 16c_3 + 64c_4 + 256c_5 \Rightarrow c_1 + 4c_2 + 16c_3 + 64c_4 + 256c_5 = 20\\
a_5 &= c_1 + 5c_2 + 25c_3 + 125c_4 + 625c_5 \Rightarrow c_1 + 5c_2 + 25c_3 + 125c_4 + 625c_5 = 44
\end{aligned}
$$

Jadi rumus suku ke-n dari barisan aritmetika tingkat empat dari barisan tingkat empat (a_n) = (1, 4, 9, 20, 44, 91, 172, 305, …) ini dapat diperoleh dengan terlebih dahulu menemukan c_1, c_2, c_3, c_4 dan c_5 sebagai himpunan penyelesaian dari sitem persamaan linier (4.7)

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan hal-hal sebagai beriku:

1) Pola umum suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat dua :

$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ dengan syarat atau nilai awal a_1, a_2 dan a_3. Berdasarkan pola umum diperoleh solusi umum pola barisan aritmetika tingkat dua $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2$. Rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat dua ditentukan oleh c_1, c_2 dan c_3 melalui substitusi suku pertama, kedua, dan ketiga ke pola umum (a_n).

2) Pola umum suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat tiga :

$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$ dengan syarat atau nilai awal a_1, a_2, a_3 dan a_4. Berdaarkan pola umum diperoleh solusi umum pola barisan aritmetika tingkat tiga $a_n = c_1 + nc_2 + n^2 c_3 + n^3 c_4$. Rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat tiga ditentukan oleh c_1, c_2, c_3 dan c_4 melalui substitusi suku pertama, kedua, ketiga dan keempat kedalam pola umum (a_n).

3) Pola umum suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat empat :

$a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$. Berdaarkan pola umum diperoleh solusi umum pola barisan aritmetika tingkat empat $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3 + c_5 n^4$. Rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat empat ditentukan oleh c_1, c_2, c_3, c_4 dan c_5 melalui substitusi suku pertama, kedua, ketiga dan keempat kedalam pola umum.

$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$ dengan syarat atau nilai awal a_1, a_2, a_3 dan a_4. Berdaarkan pola umum diperoleh solusi umum pola barisan aritmetika tingkat tiga $a_n = c_1 + nc_2 + n^2 c_3 + n^3 c_4$. Rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika tingkat tiga ditentukan c_1, c_2, c_3 dan c_4 melalui substitusi suku pertama, kedua, ketiga dan keempat kedalam pola umum (a_n).

1.4 Saran

1) Kajian masih dapat dilanjutkan sampai dengan menemukan rumus suku ke-n dari barisan aritmetika tingkat lima, tingkat enam sampai dengan tingkat ke-n.
2) Diharapkan mengembangkan barisan ini dengan menggunakan pendekatan selain pendekatan relasi rekursif dengan metode akar karakteristik.

DAFTAR PUSTAKA

Edwin J. Purcell dan Dale Vaeberg, 1988 : ***Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid 1***, Bandung : Gelora Aksara Pratama

Endang Dedy, dkk, 2003: ***Kalkulus I***. IMSTEP. Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UPI. Bandung

I Ketut Budayasa, 2001. ***Matematika Diskrit***. Surabaya. Univercity Press

Samuel Wibisono, 2008. ***Matematika Diskrit***. Jogyakarta; Graha Ilmu