

ANALISIS DINAMIK SISTEM *PREDATOR-PREY* MODEL *LESLIE-GOWER* DENGAN PEMANENAN SECARA KONSTAN TERHADAP *PREDATOR*

Hasan S. Panigoro¹

Diterima: 12 November 2013, Disetujui: 29 Desember 2013

Abstrak

Paper ini mempelajari sistem *Predator-Prey* model *Leslie-Gower* dengan pemanenan terhadap *Predator*. Diasumsikan *Predator* dipanen dengan jumlah konstan. Tujuan utama dalam paper ini adalah memperlihatkan pengaruh dari pemanenan *Predator* terhadap dinamik dari sistem. Diperlihatkan bahwa sistem memiliki paling banyak dua titik ekuilibrium yang memberikan dinamik berbeda disekitar titik ekuilibrium tersebut ketika pemanenannya divariasikan. Dengan menetapkan pemanenan sebagai parameter yang divariasikan, juga diperlihatkan terjadi bifurkasi *Hopf* pada sistem.

Kata kunci: Bifurkasi, *Leslie-Gower*, Pemanenan, *Predator-Prey*

Abstract

In this paper, Leslie-Gower Predator-Prey system with predator harvesting is studied. It assume that the predator is continuously being harvested at constant rate. The main purpose of this paper is to show the effect of harvesting to the dynamic of system. Its shown that the system has at most two equilibrium point and give the different stability of equilibrium when harvesting is variated. By regarding the predator harvesting as bifurcation parameter, the existence of hopf bifurcation is shown.

Keywords: Bifurcation, *Leslie-Gower*, Harvesting, *Predator-Prey*

1 Pendahuluan

The study of the dynamics of Predator-Prey System is one of dominant subjects in ecology and mathematical ecology due to its universal existence and impotence [8]. Sistem *predator-prey* adalah suatu model yang sudah lama dipelajari karena berhubungan langsung dengan alam dan eksistensi makhluk yang ada didalamnya. Model ini sangat populer sehingga banyak peneliti yang kemudian mempelajari, mengembangkan dan memodifikasi model dengan tujuan agar bersesuaian dengan kondisi sebenarnya di alam. Model ini membahas tentang dua spesies yang saling berinteraksi, dimana salah satu darinya memangsa yang lainnya dengan tujuan untuk bertahan hidup. Dalam paper ini dipelajari tentang salah

¹ *Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo,
Jln. Jend. Sudirman, No.6, kota Gorontalo. Telp.0435-821752, Fax.0435-827213
email : hspanigoro@ung.ac.id*

satu model *predator-prey* yang dikenal dengan kelas *semi-ratio-dependent* dengan fungsi respon. Model tersebut yaitu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - p(x)y \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{ny}{x}\right)\end{aligned}\quad (1)$$

dimana $x(t) > 0$, $y(t) \geq 0$ sepanjang $t \geq 0$, dan r, s, K, n bilangan real positif. Variabel x menyatakan populasi dari *prey* dan variabel y menyatakan populasi dari *predator*. Pada sistem (1) diasumsikan besaran *prey* tumbuh secara logistik dengan daya tampung K dan pertumbuhan intrinsik r dengan adanya y sebagai *predator*. *Predator* memangsa *prey* dengan fungsi respon $p(x)$ yang juga tumbuh secara logistik dengan pertumbuhan intrinsik s dan daya tampung bergantung secara proposional terhadap jumlah prey. Parameter n adalah angka yang menyatakan besaran *prey* yang dibutuhkan untuk mendukung eksistensi bagi satu *predator* [1].

Dalam paper ini, fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon *Holling Tipe-I* yang dituliskan:

$$p(x) = mx. \quad (2)$$

Sistem (1) dengan fungsi respon (2) dikenal dengan sistem *predator-prey* model *Leslie-Gower* [4] yang dituliskan:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - mxy \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{ny}{x}\right)\end{aligned}\quad (3)$$

dengan m adalah nilai maksimum dimana tingkat penurunan per kapita dari mangsa dapat tercapai.

Dalam suatu lingkungan ataupun suatu ekosistem yang memperlihatkan adanya hubungan antara *predator* dan *prey*, peran serta manusia dalam eksistensi *predator* dan *prey* tidak dapat dipisahkan. Misalkan model mangsa dan pemangsa antara Hiu dan suatu spesies ikan di lingkungannya. Dalam sistem tersebut, ternyata manusia melakukan perburuan terhadap hiu. Dalam beberapa kondisi peranan manusia terhadap sistem (3) dapat terjadi baik terhadap *predator* maupun terhadap *prey*. Oleh karena itu, paper ini membahas sistem *predator-prey* model *Leslie-Gower* (3) dengan menambahkan parameter perburuan (pemanenan) secara konstan. Sistem tersebut dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - mxy - h_x \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{ny}{x}\right) - h_y\end{aligned}\quad (4)$$

dimana h_x dan h_y masing-masing menunjukkan adanya pemanenan secara konstan terhadap prey dan predator. Pada saat tidak terjadi pemanenan baik terhadap predator maupun prey ($h_x = h_y = 0$), sistem berbentuk (4). Dalam Hsu & Huang [1] ditunjukkan bahwa sistem (4) memiliki titik ekuilibrium tunggal dengan dinamikanya bersifat stabil asimtotik secara global.

Pada saat pemanenan secara konstan terjadi pada *prey* dan tidak terjadi pemanenan

terhadap predator ($h_y = 0$), maka sistem menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - mxy - h_x \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{ny}{x}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Zhu & Lan [9] memperlihatkan bahwa terjadi bifurkasi *saddle-node*, bifurkasi *hopf* superkritikal, bifurkasi *hopf* subkritikal, dan bifurkasi *Bogdanov-Takens* pada sistem (5). Pada saat pemanenan secara konstan terjadi pada predator ($h_x = 0$), maka sistem menjadi:

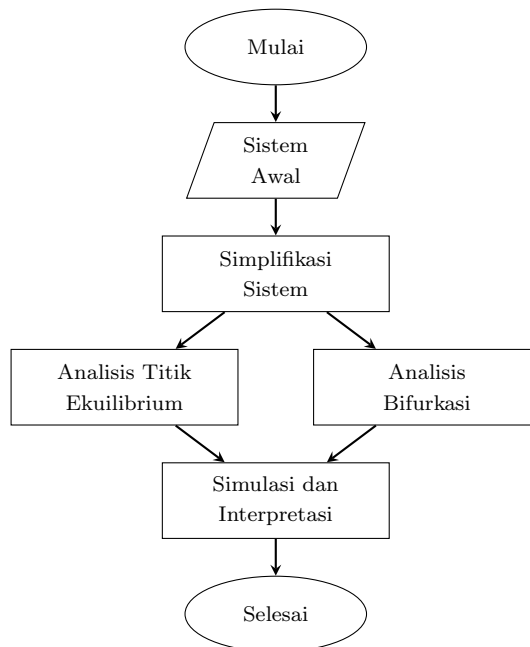
$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - mxy \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{ny}{x}\right) - h_y \end{aligned} \tag{6}$$

Sistem inilah yang akan dibahas pada paper ini.

2 Metode Penelitian

Dalam menganalisa sistem ini, ada beberapa tahap yang dilakukan yaitu:

- Melakukan simplifikasi terhadap sistem apabila memungkinkan. Tujuan dari simplifikasi adalah mereduksi sistem sehingga sistem lebih sederhana yang tentunya tetap mempertahankan dinamik dari sistem awal secara kualitatif.
- Mengidentifikasi titik ekuilibrium pada sistem.



Gambar 1: Diagram Alir Penelitian

- Mengidentifikasi kestabilan lokal disekitar titik ekuilibrium dari sistem. Tahap ini dilakukan secara numerik dengan bantuan Matcont (suatu toolbox yang berjalan pada MATLAB).
- Mengidentifikasi terjadinya bifurkasi satu parameter pada sistem dengan mengkon-tinuasi satu titik ekuilibrium sistem.

Seluruh proses yang dilakukan pada tahapan diatas dengan memperhatikan pengaruh pe-manenan pada sistem terhadap analisis yang dilakukan. Hal ini berarti melihat pengaruh parameter h_y terhadap kestabilan titik ekuilibrium, dan bifurkasi yang mungkin terjadi jika parameter tersebut divariasikan. Untuk lebih jelasnya, perhatikan diagram alir pada gambar (1).

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Simplifikasi Sistem

Untuk simplifikasi sistem (6), dilakukan penskalaan. Penskalaan yang dilakukan yaitu penskalaan variabel bebas waktu (t), dan variabel terikat yaitu *prey* (x) dan *predator* (y). Penskalaan yang dilakukan yaitu:

$$(t, x, y) \rightarrow \left(rt, \frac{1}{K}x, \frac{m}{r}y \right) \quad (7)$$

Penskalaan (7) terhadap sistem (6) mengakibatkan sistem tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x - y) \\ \dot{y} &= \alpha y - \beta \frac{y^2}{x} - h \end{aligned} \quad (8)$$

dimana:

$$\alpha = \frac{s}{r}, \quad \beta = \frac{sn}{mK}, \quad h = \frac{mh_y}{r^2}.$$

Berdasarkan kondisi biologis (bahwa tidak ada populasi negatif), maka diasumsikan bahwa yang dipelajari adalah kuadran pertama $R_+^2 := \{(x, y) | x > 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ dari sistem. Dengan mudah dapat kita pastikan bahwa titik asal $(0, 0)$ bukan merupakan titik ekuilibrium.

3.2 Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya

Langkah termudah dalam mempelajari dinamik dari suatu sistem persamaan diferensial yaitu dengan mengidentifikasi titik ekuilibrium yang dilanjutkan dengan analisis dinamik disekitar titik ekuilibrium tersebut. Titik ekuilibrium sistem (8) didapatkan dari persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 1 - x - y &= 0 \\ \alpha y - \beta \frac{y^2}{x} - h &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Solusi persamaan (8) ada di \mathbb{R}_+^2 jika $x = 1 - y$, $0 < x \leq 1$ dan $\frac{h}{\alpha} < y < 1$. Persamaan

ini memiliki paling banyak dua titik ekuilibrium positif yaitu:

$$\begin{aligned}
 E_1 &:= \left(\frac{\alpha+2\beta-h-\sqrt{D(h)}}{2(\alpha+\beta)}, \frac{\alpha+h+\sqrt{D(h)}}{2(\alpha+\beta)} \right) \\
 E_2 &:= \left(\frac{\alpha+2\beta-h+\sqrt{D(h)}}{2(\alpha+\beta)}, \frac{\alpha+h-\sqrt{D(h)}}{2(\alpha+\beta)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

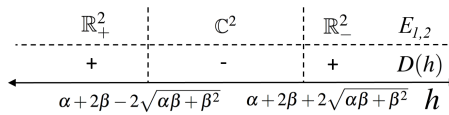
dimana $D(h) = h^2 - 2(\alpha + 2\beta)h + \alpha^2$. Untuk memfasilitasi dalam menganalisa titik ekuilibrium, didefinisikan:

$$D(h) := (h - h_1)(h - h_2)$$

dimana:

$$\begin{aligned}
 h_1 &:= \alpha + 2\beta - 2\sqrt{\alpha\beta + \beta^2}, \\
 h_2 &:= \alpha + 2\beta + 2\sqrt{\alpha\beta + \beta^2},
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

dengan h_1 dan h_2 bilangan konstan positif. Perhatikan diagram berikut:

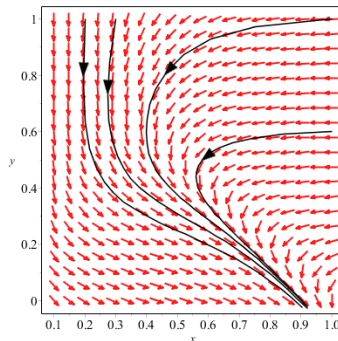


Gambar 2: Diagram titik ekuilibrium

Perhatikan bahwa:

- a. Jika $0 < h < h_1$ maka $D(h) > 0$, sehingga ada dua titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+^2 .
- b. Jika $h = h_1$, maka $D(h) = 0$ sehingga ada satu titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+^2 .
- c. Jika $h > h_1$ maka $D(h) < 0$ sehingga tidak ada titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+^2 . Gambar (3) memperlihatkan bahwa seluruh solusi akan bergerak mendekati sumbu- x , yang berarti predator akan mengalami kepunahan.

Perhatikan juga bahwa ketika $h \geq h_2$ mengakibatkan titik ekuilibrium yang muncul tidak berada di \mathbb{R}_+^2 .



Gambar 3: Potret Fase pada saat $h > h_1$, tidak ada titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+^2

Selanjutnya untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium dari sistem (6), dilakukan pelinearannya terhadap sistem (6) yang memberikan matriks *Jacobian*:

$$\begin{bmatrix} \bar{y} - 1 & \bar{y} - 1 \\ \frac{\beta \bar{y}^2}{(\bar{y}-1)^2} & \frac{(\alpha+2\beta)\bar{y}-\alpha}{\bar{y}-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

dengan $(1 - \bar{y}, \bar{y})$ adalah titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium didapatkan dengan melihat nilai eigen dari (12) yaitu:

$$\lambda_{1,2} := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(J) \pm \sqrt{\text{tr}(J)^2 - 4 \det(J)} \right) \quad (13)$$

dimana:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J) &= \frac{\bar{y}^2 + (\alpha + 2\beta - 2)\bar{y} + (1 - \alpha)}{\bar{y} - 1} \\ \det(J) &= \frac{\alpha \bar{y}^2 - 2(\alpha + \beta)\bar{y} + \alpha}{\bar{y} - 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Titik ekuilibrium Tunggal pada saat $h = h_1$

Pada saat $h = h_1$ mengakibatkan hanya ada satu titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+^2 . Jika $h = h_1$ maka $D(h) = 0$ sehingga:

$$\beta = \frac{(\alpha - h)^2}{4\alpha}. \quad (15)$$

Dengan demikian titik ekuilibrium menjadi:

$$E := \left(\frac{\alpha - h}{\alpha + h}, \frac{2h}{\alpha + h} \right). \quad (16)$$

Titik ekuilibrium ini memberikan:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J) &= \frac{(h^2 + h) - (1 - h)\alpha}{\alpha + h} \\ \det(J) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

sehingga $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = \text{tr}(J)$.

Teorema 3.1. *Jika $h = h_1$, maka titik ekuilibrium dari sistem (8) tunggal dan tidak ada orbit tertutup (limit cycle) di \mathbb{R}_+^2 .*

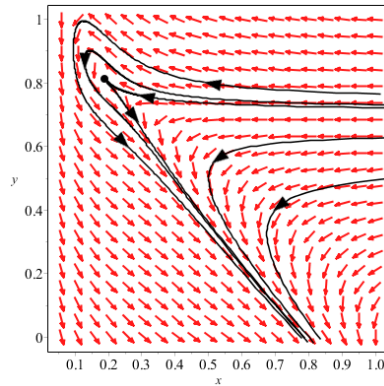
Bukti 3.1. Ketunggalan dari titik ekuilibrium pada saat $h = h_1$ sangat jelas karena kondisi ini mengakibatkan $D(h) = 0$ sehingga $E_1 = E_2 = E$ (16). Selanjutnya andaikan ada orbit tertutup di \mathbb{R}_+^2 maka harus ada titik ekuilibrium tunggal. Karena titik ekuilibrium (16) *cusps* atau *saddle* (lihat teorema (3.2)), maka tidak mungkin ada orbit tertutup tersebut.

Teorema 3.2. *Jika $h = h_1$, maka ada tiga kasus titik ekuilibrium (16) yaitu:*

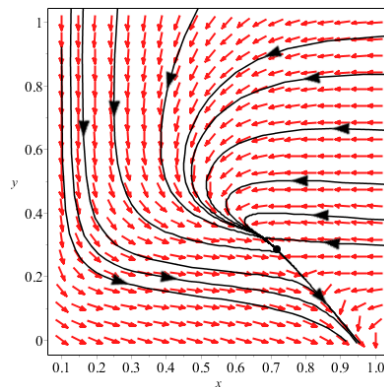
- Jika $\alpha = \frac{h^2 + h}{1 - h}$ maka titik ekuilibrium (16) merupakan titik *cusps*.*
- Jika $\alpha > \frac{h^2 + h}{1 - h}$ maka titik ekuilibrium (16) merupakan titik *saddle* dan bersifat *attracting*.*
- Jika $\alpha < \frac{h^2 + h}{1 - h}$ maka titik ekuilibrium (16) merupakan titik *saddle* dan bersifat *repelling*.*

Bukti 3.2. Lihat J Huang & y. Gong [2].

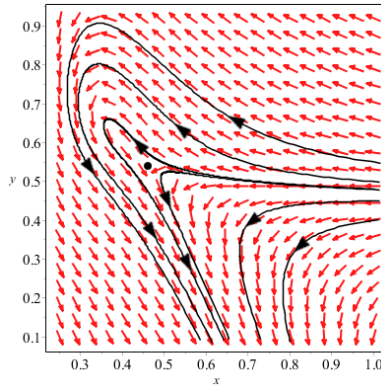
Perhatikan gambar (4), (5), (6). Pada gambar (4) diperlihatkan bahwa titik ekuilibrium (16) merupakan titik *cusp*. Solusi cenderung menjauhi titik ekuilibrium, namun ada solusi yang akan terus mendekati titik ekuilibrium. Pada gambar (5) diperlihatkan solusi yang tidak stabil dimana semua solusi akan bergerak mendekati titik ekuilibrium (16) yang pada t tertentu akan menjauhi titik ekuilibrium tersebut. Pada gambar (6) diperlihatkan bahwa seluruh solusi akan bergerak menjauhi titik ekuilibrium. Dapat dilihat pada simulasi potret fase dari ketiga gambar (4), (5), (6) bahwa titik ekuilibrium tunggal cenderung tidak stabil (kecuali untuk gambar (4) dimana ada kondisi solusi yang mendekati titik ekuilibrium) dan bergerak mendekati sumbu- x yang merepresentasikan kepunahan *predator* akibat pemanenan terhadapnya.



Gambar 4: Potret fase pada saat $\alpha = \frac{h^2+h}{1-h}$



Gambar 5: Potret fase pada saat $\alpha > \frac{h^2+h}{1-h}$



Gambar 6: Potret fase pada saat $\alpha < \frac{h^2+h}{1-h}$

Titik Ekuilibrium pada Saat $0 < h < h_1$

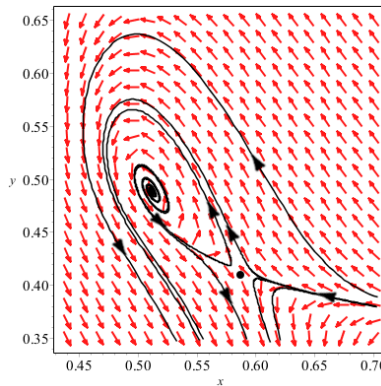
Pada saat $0 < h < h_1$, ada dua titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+^2 . Kondisi ini mengakibatkan $D(h) > 0$ sehingga titik ekuilibrium adalah titik (9). J.Huang & Y. Gong [2] memperlihatkan kestabilan titik ekuilibrium E_2 dari (9) sebagai titik *saddle* dan kestabilan titik ekuilibrium E_1 dari (9) sebagai berikut:

Teorema 3.3. Misalkan:

$$h_3 = \frac{1}{4}(6\beta - 4\beta^2 + 3\alpha - 6\alpha\beta - 2\alpha^2 - 1 + 2\beta + 2\alpha)\sqrt{-8\beta + 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2}.$$

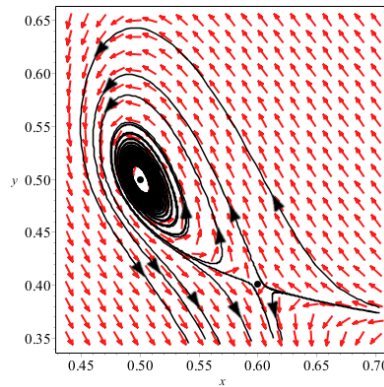
- a. Jika $h > h_3$ maka E_1 titik ekuilibrium tidak stabil (*unstable node*). (Gambar 7)
- b. Jika $h = h_3$ maka E_1 titik ekuilibrium tipe *center* (*weak focus*). (Gambar 8)
- c. Jika $h < h_3$ maka E_1 titik ekuilibrium stabil (*stable node*). (Gambar 9)

Bukti 3.3. Lihat J. Huang & Y. Gong [2].



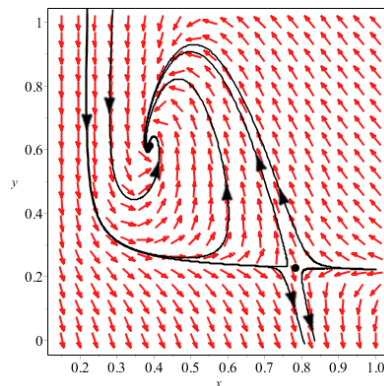
Gambar 7: Potret fase pada saat $h > h_3$

Gambar (7) memperlihatkan bahwa pada kondisi $h > h_3$, titik ekuilibrium E_2 bertipe *saddle*, dan E_1 merupakan titik ekuilibrium tidak stabil.



Gambar 8: Potret fase pada saat $h = h_3$

Gambar (8) memperlihatkan bahwa pada kondisi $h = h_3$, titik ekuilibrium E_2 bertipe *saddle* dan E_1 merupakan titik ekuilibrium tidak stabil tipe center.



Gambar 9: Potret fase pada saat $h < h_3$

Gambar (9) memperlihatkan bahwa pada kondisi $h < h_3$, titik ekuilibrium E_2 bertipe *saddle*, dan E_1 merupakan titik ekuilibrium stabil.

4 Bifurkasi *Saddle-Node*

Bifurkasi *saddle-node* merupakan tipe bifurkasi yang muncul dengan memvariasikan satu parameter, yang mengakibatkan dari tidak adanya titik ekuilibrium, muncul 2 titik

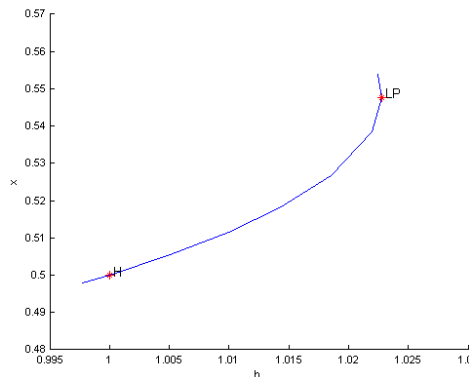
ekuilibrium. Kemunculan 2 titik ekuilibrium ini harus diawali dengan muncul 1 titik ekuilibrium terlebih dahulu dengan titik ekuilibrium tersebut bertipe *saddle*.

Dari teorema (3.2), perhatikan bahwa jika $\alpha \frac{h^2+h}{1-h}$, maka kita memiliki titik ekuilibrium tipe *saddle*. Perhatikan juga jumlah titik ekuilibrium berubah ketika parameter h melewati h_1 . Bifurkasi *saddle-node* terjadi dimana dari tidak adanya titik ekuilibrium kemudian muncul satu titik tipe *saddle* dan pecah menjadi dua titik ekuilibrium. Dengan demikian $h = h_1$ merupakan titik bifurkasi *saddle-node*. Dengan demikian variasi parameter parameter h mengakibatkan terjadinya bifurkasi *saddle-node* dengan syarat $\alpha \frac{h^2+h}{1-h}$. Bifurkasi *saddle-node* juga dapat diidentifikasi secara numerik yang terlihat pada gambar (10).

5 Bifurkasi Hopf

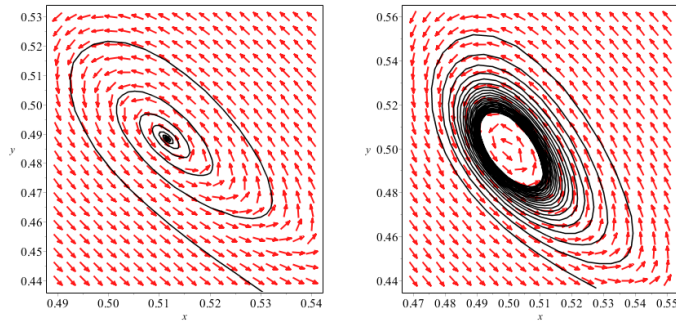
Perhatikan bahwa kondisi $h = h_3$ mengakibatkan titik ekuilibrium E_1 merupakan titik center, yang sebelumnya titik ekuilibrium tidak stabil dengan nilai eigennya merupakan nilai eigen kompleks. Dengan demikian ada peluang variasi parameter h akan mengakibatkan terciptanya solusi periodik yang merupakan salah satu ciri dari munculnya bifurkasi *hopf*.

Untuk mempermudah identifikasi, bifurkasi *hopf* pada paper ini diidentifikasi secara numerik dengan menggunakan *matcont* yang merupakan toolbox pada MATLAB, yang kemudian disimulasikan dengan *Maplesoft Maple 18*. Ditetapkan nilai $\alpha = 3,5$ dan $\beta = 1,5$. Pemilihan nilai ini disesuaikan pada kasus $h = h_3$. Kemudian dilakukan variasi parameter h sehingga didapatkan hasil simulasi numerik seperti pada gambar (10).



Gambar 10: Diagram bifurkasi satu parameter yang memperlihatkan secara numerik bahwa terjadi bifurkasi *saddle-node* dan *hopf*

Hasil numerik memperlihatkan bahwa terjadi bifurkasi *saddle-node* di $h = 1,0227$ dan bifurkasi *hopf* di $h = 0,999$. Perhatikan bahwa pada saat h bergerak ke arah kiri setelah terjadinya bifurkasi *saddle-node*, pergerakan solusi sangat lambat pada kondisi yang semakin dekat ke titik ekuilibrium. Hal ini mengindikasikan akan terbentuknya *limit-cycle* di sekitar titik ekuilibrium tersebut.



Gambar 11: Titik ekuilibrium yang mengalami bifurkasi Hopf

6 Kesimpulan dan Saran

Parameter *harvesting* (pemanenan) terhadap *predator* sangat berpengaruh terhadap kestabilan dari sistem ini. Hampir seluruh kondisi parameter dengan adanya pemanenan terhadap *predator* berakibat akan punahnya *predator* tersebut dalam kurun waktu tertentu. Namun ada beberapa peluang bagi *predator* untuk tetap mempertahankan spesiesnya, yaitu dengan melakukan pemanenan sesuai kondisi yang diperlihatkan pada titik ekuilibrium di gambar (8) dan (9).

Dalam sistem ini juga diperlihatkan adanya bifurkasi *saddle-node* dan bifurkasi *hopf*. Pada saat bifurkasi *hopf* tercipta solusi periodik yang menjamin bahwa jika kondisi awal berada dalam interior solusi periodik, maka kedua spesies baik *predator* ataupun *prey* dapat dipertahankan.

Secara analitik, kondisi akhir adanya solusi periodik dapat menjadi bahan penelitian lanjutan, dimana kita bisa mempelajari apakah ada bifurkasi lain ketika kita mengkontinuasi solusi periodik dengan tetap mevariasikan parameter pemanenan (*harvesting*). Selain itu, ada satu hal yang menarik yaitu apabila sistem dengan model ini dimodifikasi dengan mengasumsikan bahwa daya dukung (*carrying capacity*) juga turut berubah terhadap waktu, sehingga model yang baru berupa sistem persamaan diferensial nonlinear di \mathbb{R}^3 .

Referensi

- [1] Hsu, S. B. and Huang, T. W., (1995), *Global stability for a class of predator-prey system*, SIAM J. Appl. Math., 55 , 763-783.
- [2] Huang, J., Gong, Y., (2013), *Bifurcation Analysis in a Predator-Prey Model with Constant-Yield Predator Harvesting*, Discrete and Continuous Dynamical System Series B 21011-212.
- [3] Kuznetsov, Y. A. (1998), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York
- [4] Leslie, P. H. & Gower, J. C. (1960), *The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species*, Biometrika, 47, 219-234.
- [5] Perko, L., (1996), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Second edition, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York.
- [6] Verhulst, F. (1996), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [7] Wiggins, S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York.

- [8] Zhang, W., Liu, W., Xu, C., *Bifurcation Analysis for a Leslie-Gower Predator-Prey System with Time Delay*, International Journal of Nonlinear Science, Vol.15 No.1, pp. 35-44.
- [9] Zhu, C. R. and Lan, K. Q., (2010), *Phase portraits, Hopf bifurcation and limit cycles of Leslie-Gower predator-prey systems with harvesting rates*, Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B, 14, 289-306.