PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

PDB Orde Pertama

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

September 2018

2. Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

2.1 Pengantar PDB Orde Satu

2.1 Pengantar PDB Orde Satu

2.1 Pengantar PDB Orde Satu

- Persamaan diferensial orde satu secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2.1)$$

dimana f adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan.

2.1 Pengantar PDB Orde Satu

- Persamaan diferensial orde satu secara umum dapat ditulis dalam bentuk
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2.1)$$
dimana f adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan.
- Persamaan (2.1) seringditulis dalam bentuk persamaan diferensial baku
$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (2.2)$$

2.1 Pengantar PDB Orde Satu

- Persamaan diferensial orde satu secara umum dapat ditulis dalam bentuk
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2.1)$$
dimana f adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan.
- Persamaan (2.1) seringditulis dalam bentuk persamaan diferensial baku
$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad (2.2)$$
- Hal ini memungkinkan dengan memisalkan $M(x, y) = -f(x, y)$ dan $N(x, y) = 1$ ataupun dengan menggunakan cara lain.

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

- Persamaan diferensial terpisahkan (*separable diferential equation*) adalah persamaan diferensial biasa orde satu yang secara aljabar dapat direduksi ke dalam bentuk baku dengan setiap suku tak nol memuat secara tepat satu variabel.

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

- Persamaan diferensial terpisahkan (*separable diferential equation*) adalah persamaan diferensial biasa orde satu yang secara aljabar dapat direduksi ke dalam bentuk baku dengan setiap suku tak nol memuat secara tepat satu variabel.
- Jika masing-masing suku tak nolnya dalam bentuk baku hanya memuat satu variabel, dalam hal ini M hanya fungsi dari x dan N hanya fungsi dari y, maka persamaan (2.2) dapat diubah menjadi

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad (2.3)$$

Persamaan ini disebut **persamaan diferensial dengan variabel terpisah.**

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

- Persamaan diferensial terpisahkan (*separable diferential equation*) adalah persamaan diferensial biasa orde satu yang secara aljabar dapat direduksi ke dalam bentuk baku dengan setiap suku tak nol memuat secara tepat satu variabel.
- Jika masing-masing suku tak nolnya dalam bentuk baku hanya memuat satu variabel, dalam hal ini M hanya fungsi dari x dan N hanya fungsi dari y, maka persamaan (2.2) dapat diubah menjadi

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad (2.3)$$

Persamaan ini disebut **persamaan diferensial dengan variabel terpisah.**

- Dengan melakukan pengintegralan pada setiap ruas persamaan (2.3), makadiperoleh solusi umum

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C \qquad (2.4)$$

dimana C adalah konstanta

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Definition

Suatu persamaan diferensial biasa orde satu dikatakan terpisah jika dapat ditulis dalam bentuk

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x)$$

Teknik selesaikan dari PD ini diberikan dalam Teorema berikut

Theorem

Jika $p(y)$ dan $q(x)$ keduanya kontinu, maka PD variabel terpisah memiliki solusi umum

$$\int p(y)\,dy = \int q(x)\,dx + C, \quad C = Konstanta$$

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Example

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut

1. $x^2 dx + \left(1 - y^2\right) dy = 0$
2. $e^y y' = x \cos x$

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Solution

1. *Karena PD berbentuk variabel terpisah, maka penyelesaian dapat ditemukan dengan melakukan pengintegralan langsung pada tiap-tiap ruas*

$$\begin{aligned} \int x^2 dx + \int \left(1 - y^2\right) dy &= k \\ \frac{1}{3}x^3 + y - \frac{1}{3}y^3 &= k \end{aligned}$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$x^3 + 3y - y^3 = c; \quad c = 3k$$

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Solution

2. *Perhatikan bahwa PD dapat ditulis kembali dalam bentuk*

$$e^y\,dy = x\cos x\ dx$$

Dengan melakukan pengintegralan dikedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}\int e^y\,dy &= \int x\cos x\ dx\\ e^y &= x\sin x + \cos x + k\end{aligned}$$

secara eksplisit, solusi umum dapat ditulis

$$y = \ln\left[x\sin x + \cos x + k\right]$$

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Example

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut

$$16y\frac{dy}{dx} + 9x = 0$$

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Solution

Ubah bentuk PD ke bentuk variabel terpisah, kemudian selesaikan dengan pengintegralan,

$$\begin{aligned} 16y\ dy + 9x\ dx &= 0 \\ \int 16y\ dy + \int 9x\ dx &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$16y^2 + 9x^2 = c, \qquad c = 2k$$

2.2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Problem

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $x^5\,dx + (y+2)^2\,dy = 0$
2. $9yy' + 4x = 0$
3. $y' - y\sin x = 0$
4. $2xy' + x^2 = 0$
5. $y'e^x + 2xy = 0$
6. $yy' = 3\cos 2x$
7. $3xyy' + y^2 + 1 = 0$

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

- Pada bidang terapan masalah nilai awal memegang peranan penting untuk menentukan penyelesaian khusus dari sebuah persamaan diferensial.

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

- Pada bidang terapan masalah nilai awal memegang peranan penting untuk menentukan penyelesaian khusus dari sebuah persamaan diferensial.
- Nilai awal suatu persamaan diferensial ditulis

$$y(x_0) = y_0$$

jika penyelesaian khusus $g(x)$ memenuhi kondisi awal pada suatu titik tertentu x_0 dan penyelesaian $y(x)$ mempunyai nilai tertentu y_0. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} y(1) &= 0 \text{ artinya } y = 0 \text{ jika } x = 1 \\ y(0) &= 2 \text{ artinya } y = 2 \text{ jika } x = 0 \end{aligned}$$

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

- Pada bidang terapan masalah nilai awal memegang peranan penting untuk menentukan penyelesaian khusus dari sebuah persamaan diferensial.
- Nilai awal suatu persamaan diferensial ditulis

$$y\left(x_0\right) = y_0$$

jika penyelesaian khusus $g(x)$ memenuhi kondisi awal pada suatu titik tertentu x_0 dan penyelesaian $y(x)$ mempunyai nilai tertentu y_0. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} y\left(1\right) &= 0 \text{ artinya } y = 0 \text{ jika } x = 1 \\ y\left(0\right) &= 2 \text{ artinya } y = 2 \text{ jika } x = 0 \end{aligned}$$

- Kondisi awal dari penyelesaian suatu persamaan diferensial disebut nilai awal dan solusinya ditentukan dari penyelesaian khusus yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

Examples

Carilah solusi masalah nilai awal dari persamaan diferensial berikut:

1. $xy' + y = 0, \quad y(1) = 1$
2. $yy' - 2\sin^2 x = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}$

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

Solution

1. *Pertama, temukan solusi umum persamaan diferensial*

$$\begin{aligned}
xy' + y &= 0 \\
x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \\
x\frac{dy}{dx} &= -y \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx \\
\int \frac{1}{y}dy &= -\int \frac{1}{x}dx \\
\ln y &= -\ln x + c \\
y &= e^{-\ln x + c}
\end{aligned}$$

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

Solution

1. *Selanjutnya, gunakan nilai awal untuk menemukan solusi khusus Karena* $y(1) = 1$ *dan* $y(x) = e^{-\ln x + c}$, *maka*

$$\begin{aligned} y(1) &= e^{-\ln(1)+c} \\ 1 &= e^{-\ln(1)+c} \\ 1 &= e^{c} \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi khusus PD, yaitu

$$y(x) = e^{-\ln x}$$

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

Solution

2. *Solusi Umum*

$$
\begin{aligned}
yy' - 2\sin^2 x &= 0 \\
y\frac{dy}{dx} &= 2\sin^2 x \\
y\ dy &= 2\sin^2 x\ dx \\
\int y\ dy &= 2\int \sin^2 x\ dx \\
\frac{1}{2}y^2 &= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 2c\right] \\
y^2 &= [2x - \sin 2x + k] \\
y &= \sqrt{2x - \sin 2x + k}; \quad k = 4c
\end{aligned}
$$

2.3 PD Variabel Terpisah dengan MNA

Solution

2. *Selanjutnya, dengan nilai awal* $y(0) = \sqrt{3}$ *dan* $y(x) = \sqrt{2x - \sin 2x + k}$, *maka*

$$\begin{aligned} y(0) &= \sqrt{2(0) - \sin 0 + k} \\ \sqrt{3} &= \sqrt{k} \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi khusus PD, yaitu

$$y(x) = \sqrt{2x - \sin 2x + 3}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

- Mengacu pada persamaan (2.2) , jika

$$\begin{aligned} M(x,y) &= f_1(x)\, g_1(x) \\ N(x,y) &= f_2(x)\, g_2(x) \end{aligned}$$

maka diperoleh bentuk persamaan diferensial yang dapat direduksi ke bentuk PD variabel terpisah

$$f_1(x)\, g_1(x)\, dx + f_2(x)\, g_2(x)\, dy = 0 \tag{2.5}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

- Mengacu pada persamaan (2.2) , jika

$$\begin{aligned} M(x,y) &= f_1(x)\,g_1(x) \\ N(x,y) &= f_2(x)\,g_2(x) \end{aligned}$$

  maka diperoleh bentuk persamaan diferensial yang dapat direduksi ke bentuk PD variabel terpisah

$$f_1(x)\,g_1(x)\,dx + f_2(x)\,g_2(x)\,dy = 0 \qquad (2.5)$$

- Persamaan (2.5) disebut sebagai bentuk umum persamaan diferensial reduksi variabel terpisah. Bentuk ini dapat direduksi dengan faktor integral

$$\frac{1}{f_2(x)\,g_1(y)}$$

  menjadi

$$\frac{1}{f_2(x)\,g_1(y)}\left[f_1(x)\,g_1(x)\,dx + f_2(x)\,g_2(x)\,dy = 0\right]$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

- Selanjunya, PD akan tereduksi menjadi PD variabel terpisah

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

- sehingga diperoleh solusi umum

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = k; \qquad k = \text{Konstanta}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Examples

Carilah solsui Persamaan Diferensial berikut:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad & (1+2y)+(x-4)\,y' &= 0 \\
&(2) \qquad & \frac{dy}{dx} &= \frac{4y}{xy-3x} \\
&(3) \qquad & \frac{dy}{dx} &= \frac{2x\,(y-1)}{x^2+3}
\end{aligned}
$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Solution

1. *Tulis kembali persamaan diferensial dalam bentuk*

$$(1+2y)\,dx + (x-4)\,dy = 0$$

Tentukan faktor integrasi

$$\frac{1}{(1+2y)\,(x-4)}$$

Kalikan faktor integrasi dengan PD awal untuk memperoleh PD variabel terpisah

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+2y)\,(x-4)}\left((1+2y)\,dx + (x-4)\,dy\right) &= 0 \\ \frac{1}{(x-4)}dx + \frac{1}{(1+2y)}dy &= 0 \end{aligned}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Solution

1. *Tentukan solusi umum dengan mengintegralkan kedua sisi*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-4)}dx + \int \frac{1}{(1+2y)}dy &= c \\
\ln(x-4) + \frac{1}{2}\ln(1+2y) &= c \\
2\ln(x-4) + \ln(1+2y) &= 2c \\
\ln(x-4)^2 + \ln(1+2y) &= 2c \\
\ln(x-4)^2(1+2y) &= 2c \\
(x-4)^2(1+2y) &= e^{2c}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi umum persamaan diferensial

$$(x-4)^2(1+2y) = k; \quad k = e^{2c}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Solution

2. *Tulis kembali persamaan diferensial dalam bentuk*

$$x\,(y-3)\;\;dy = 4y\;\;dx$$

sehingga ditentukan faktor integrasi

$$\frac{1}{xy}$$

Kalikan faktor integrasi dengan PD awal untuk memperoleh PD variabel terpisah

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}\left[x\,(y-3)\;\;dy - 4y\;\;dx\right] &= 0 \\ \frac{y-3}{y}dy - \frac{4}{x}dx &= 0 \end{aligned}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Solution

2. *Tentukan solusi umum dengan teknik pengintegralan*

$$\begin{aligned}
\int \frac{y-3}{y}dy - \int \frac{4}{x}dx &= c \\
\int \left(1 - \frac{3}{y}\right) dy - \int \frac{4}{x}dx &= c \\
y - 3\ln y - 4\ln x &= c \\
y &= 3\ln y + 4\ln x + c \\
y &= \ln y^3 + \ln x^4 + \ln e^c \\
y &= \ln y^3.x^4.e^c
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi umum persamaan diferensial

$$y = \ln kx^4y^3; \quad k = e^c$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Solution

3. *Tulis kembali persamaan diferensial dalam bentuk*

$$\left(x^2+3\right)dy = 2x\left(y-1\right)dx$$

sehingga ditentukan faktor integrasi

$$\frac{1}{\left(x^2+3\right)\left(y-1\right)}$$

Kalikan faktor integrasi dengan PD awal untuk memperoleh PD variabel terpisah

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(x^2+3\right)\left(y-1\right)}\left[\left(x^2+3\right)dy - 2x\left(y-1\right)dx\right] &= 0 \\ \frac{1}{y-1}dy - \frac{2x}{x^2+3}dx &= 0 \end{aligned}$$

2.4 PD Reduksi Variabel Terpisah

Solution

3. *Tentukan solusi umum dengan teknik pengintegralan*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y-1} dy - \int \frac{2x}{x^2+3} dx &= c \\
\ln(y-1) - \ln\left(x^2+3\right) &= c \\
\ln \frac{(y-1)}{(x^2+3)} &= c \\
\frac{(y-1)}{(x^2+3)} &= e^c \\
y &= e^c\left(x^2+3\right)+1
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi umum persamaan diferensial

$$y = k\left(x^2+3\right)+1; \quad k = e^c$$

* Soal-Soal Latihan 2

Latihan 2

* Soal-Soal Latihan 2

Problem

Untuk soal nomor 1-6, tentukan solusi umum dari persamaan diferensial yang diberikan berikut:

1. $xy + \left(1 + x^2\right) y' = 0$
2. $(xy + x) + (xy - y) y' = 0$
3. $y' + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$
4. $5xy + xy' = 0$
5. $yy' = 3 \cos 2x$
6. $y'/2x = 1/\left(x^2 + 1\right)$

* Soal-Soal Latihan 2

Problem

Untuk soal nomor 7-9, selesaikan masalah nilai awal yang diberikan:

7. $\left(1-x^2\right)y' + xy = a; \qquad y\left(0\right) = 2a, \quad a = \textit{konstanta}$
8. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\sin\left(x+y\right)}{\sin y \cos x}; \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
9. $y' = y^3 \sin x; \qquad y\left(0\right) = 0$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "