ALJABAR LINEAR ELEMENTER

Sistem Persamaan Linear

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2017

"Sistem Persamaan Linear"

1.1 Pengantar

- Pada bagian ini kita akan melihat bahwa untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

1.1 Pengantar

- Pada bagian ini kita akan melihat bahwa untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

- Seluruh informasi yang dibutuhkan untuk memperoleh soslusinya terangkum dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1.1 Pengantar

- Pada bagian ini kita akan melihat bahwa untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

- Seluruh informasi yang dibutuhkan untuk memperoleh soslusinya terangkum dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Solusinya dapat diperoleh dengan melakukan operasi yang sesuai terhadap matriks ini.

1.1 Pengantar

- Pada bagian ini kita akan melihat bahwa untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

- Seluruh informasi yang dibutuhkan untuk memperoleh soslusinya terangkum dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Solusinya dapat diperoleh dengan melakukan operasi yang sesuai terhadap matriks ini.
- Disamping itu, matriks juga dapat dilihat sebagai suatu objek matematis tersendiri yang memiliki beragam teori penting dengan aplikasi yang luas.

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1 x + a_2 y = b$$

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1x + a_2y = b$$

- a_1, a_2, dan b merupakan kontanta real

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1 x + a_2 y = b$$

- a_1, a_2, dan b merupakan kontanta real
- $a_1 \neq 0$ atau $a_2 \neq 0$.

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1x + a_2y = b$$

- a_1, a_2, dan b merupakan kontanta real
- $a_1 \neq 0$ atau $a_2 \neq 0$.
- Persamaan ini disebut **Persamaan Linear** dengan variabel x dan y.

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1x + a_2y = b$$

- a_1, a_2, dan b merupakan kontanta real
- $a_1 \neq 0$ atau $a_2 \neq 0$.
- Persamaan ini disebut **Persamaan Linear** dengan variabel x dan y.
- **Bentuk Umum Persamaan Linear** dapat dinyatakan dengan n varianel dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1x + a_2y = b$$

- a_1, a_2, dan b merupakan kontanta real
- $a_1 \neq 0$ atau $a_2 \neq 0$.
- Persamaan ini disebut **Persamaan Linear** dengan variabel x dan y.
- **Bentuk Umum Persamaan Linear** dapat dinyatakan dengan n varianel dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan b merupakan kontanta real.

1.2 Persamaan Linear

- Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1x + a_2y = b$$

- a_1, a_2, dan b merupakan kontanta real
- $a_1 \neq 0$ atau $a_2 \neq 0$.
- Persamaan ini disebut **Persamaan Linear** dengan variabel x dan y.
- **Bentuk Umum Persamaan Linear** dapat dinyatakan dengan n varianel dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan b merupakan kontanta real.
- Variabel-variabel dalam persamaan linear sering disebut **faktor-faktor yang tidak diketahui.**

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh persamaan linear :

1. $x + 3y = 7$

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh persamaan linear :

1. $x + 3y = 7$
2. $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh persamaan linear :

1. $x + 3y = 7$
2. $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$
3. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh persamaan linear :

1. $x + 3y = 7$
2. $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$
3. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$

- Perhatikan bahwa persamaan linear **tidak memuat hasilkali atau akar dari variabel.**

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh persamaan linear :

1. $x + 3y = 7$
2. $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$
3. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$

- Perhatikan bahwa persamaan linear **tidak memuat hasilkali atau akar dari variabel.**
- Seluruh variabel hanya dalam bentuk pangkat pertama, dan bukan merupakan argumen dari fungsi-fungsi trigonometri, logaritma, atau eksponensial.

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh yang bukan persamaan linear:

1. $x + 3\sqrt{y} = 5$

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh yang bukan persamaan linear:

1. $x + 3\sqrt{y} = 5$
2. $3x + 2y - z + xz = 4$

1.2 Persamaan Linear

Example

Berikut adalah beberapa contoh yang bukan persamaan linear:

1. $x + 3\sqrt{y} = 5$
2. $3x + 2y - z + xz = 4$
3. $y = \sin\ x$

1.3 Solusi Persamaan Linear

- **Solusi** dari Persamaan Linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

1.3 Solusi Persamaan Linear

- **Solusi** dari Persamaan Linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- adalah urutan dari n bilangan real $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sedimikian sehingga persamaan tersebut akan terpenuhi jika mengantikan $x_1 = r_1, x_2 = r_2, \cdots, x_n = r_n$.

1.3 Solusi Persamaan Linear

- **Solusi** dari Persamaan Linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- adalah urutan dari n bilangan real $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sedimikian sehingga persamaan tersebut akan terpenuhi jika mengantikan $x_1 = r_1, x_2 = r_2, \cdots, x_n = r_n$.
- Kumpulan semua solusi disebut **Himpunan Solusi** atau juga disebut **Solusi Umum** dari persamaan.

1.3 Solusi Persamaan Linear

Example

Tentukan himpunan solusi dari

$$\begin{aligned} a)\ 4x - 2y &= 1 \\ b)\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Solution

1) *Untuk mencaris solusi poin* $a)$, *kita tetapkan nilai sebarang untuk* x *dan menyelesaikannya untuk memperoleh* y, *atau sebaliknya tetapkan nilai sebarang* y *untuk memperoleh* x.

a) *Dengan mengikuti opsi pertama, misal* $x = t$, *maka diperoleh solusi umum :*

$$x = t; \quad y = 2t - \frac{1}{2}$$

Rumus-rumus tersebut menyatakan **Himpunan Solusi** *dalam bentuk nilai sebarang* t *yang disebut* **parameter**.

1.3 Solusi Persamaan Linear

Solution

b) *Dengan mengikuti opsi kedua, misal* $y = t$*, maka diperoleh solusi umum:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ y &= t \end{aligned}$$

Walau rumus-rumus ini berbeda dengan rumus yang diperoleh sebelumnya, namun rumus-rumus ini memberikan **Himpunan Solusi** *yang sama, karena* t *bervariasi untuk semua bilangan real yang memungkinkan.*
Sebagai contoh, solusi umum pertama memberikan solusi $x = 3$*, dan* $y = \frac{11}{2}$ *untuk nilai* $t = 3$*.Demikian juga pada solusi umum kedua memberikan nilai yang sama untuk* $t = \frac{11}{2}$.

1.3 Solusi Persamaan Linear

Solution

2) *Untuk mecari solusi poin b), kita dapat gunakan nilai sebarang untuk 2 variabel dan menyelesaikan persamaan tersebut untuk memperoleh variabel ke-3.*
Misal kita tetapkan $x_2 = s$ dan $s_3 = t$, sehingga diperoleh solusi umum:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 4s - 7t; \\ x_2 &= s; \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

Definition

Sistem Persamaan Linear atau **Sistem Linear** adalah koleksi dari sejumlah berhingga persamaan linear. **Bentuk umum sistem linear** dengan sejumlah m persamaan dan n variabel dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Solusi Sistem Linear dengan n variabel adalah urutan bilangan real

$$x_1 = r_1,\ x_2 = r_2,\ \cdots, x_n = r_n$$

yang memenuhi semua persamaan linear dalam sistem linear tersebut.

1.4 Sistem Persamaan Linear

Example

Sebagai contoh, sistem

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

mempunyai solusi $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \textit{dan}\ x_3 = -1$ karena nilai-nilai tersebut memenuhi untuk kedua persamaan.

Adapun $x_1 = 1,\ x_2 = 8,\ \textit{dan}\ x_3 = 1$ tidak dapat dikatakan sebagai solusi dari sistem ini karena hanya memenuhi persamaan pertama dan tidak memenuhi untuk persamaan kedua.

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.1 Sistem Konsisten dan Tidak Konsisten

Penting untuk diperhatikan bahwa **tidak semua sitem linear mempunyai solusi**.

Example

Sebagai contoh, jika kita mengalikan $\frac{1}{2}$ pada persamaan kedua dari sistem

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

maka akan nampak bahwa **tidak terdapat solusi** karena menghasilkan sistem **equivalen** yang saling bertolak belakang.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.1 Sistem Konsisten dan Tidak Konsisten

Definition

Sistem persamaan yang tidak memiliki solusi disebut **sistem tidak konsisten**, sementara sistem persamaan yang memiliki paling tidak satu solusi disebut **sistem konsisten.**

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.2 Kemungkinan Solusi Sistem Linear

Definition

Setiap sistem linear memungkinkan tidak memiliki solusi, memiliki tepat satu solusi, atau memiliki takhingga banyaknya solusi.

Untuk menggambarkan kemungkinan-kemungkinan tersebut, kita perhatikan sistem linear 2 persamaan

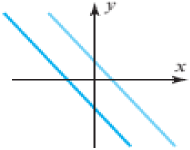
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Grafik kedua persamaan ini merupakan garis lurus l_1 dan l_2. Solusi dari sistem bersesuaian dengan titik-titik perpotongan garis l_1 dan l_2.

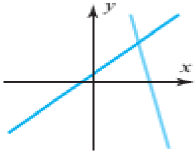
1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.2 Kemungkinan Solusi Sistem Linear

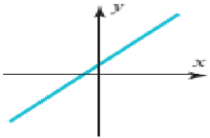
Kemungkinan solusi dari sistem ini dapat digambarkan pada grafik berikut



Tanpa Solusi



Tepat Satu Solusi



Tak Hingga Solusi

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.3 Matriks yang Diperbesar

Pada bagian ini, kita perlu perhatikan posisi $+, \times,\ dan\ =$ dari bentuk umum sistem linear yang memiliki m persmaan dengan n variabel. Dengan demikian, bentuk umum tersebut dapat ditulis secara singkat dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matriks ini disebut **Matriks yang Diperbesar**.

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.3 Matriks yang Diperbesar

Example

Sebagai contoh, diberikan sebuah sistem linear

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks diperbesar dengan memperhatika koefisien disebelah kiri tanda " $=$ " dan kontanta di sebelah kanan tanda " $=$ ",sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
   1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
  1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua persamaan

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
  1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua persamaan
  3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
  1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua persamaan
  3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.
- Karena baris-baris dalam persamaan bersesuaian dengan matriks yang diperbesar, maka operasi ini bersesuaian dengan operasi pada matriks yang diperbesar, yaitu

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
  1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua persamaan
  3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.
- Karena baris-baris dalam persamaan bersesuaian dengan matriks yang diperbesar, maka operasi ini bersesuaian dengan operasi pada matriks yang diperbesar, yaitu
  1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
    1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
    2. Menukarkan posisi dua persamaan
    3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.
- Karena baris-baris dalam persamaan bersesuaian dengan matriks yang diperbesar, maka operasi ini bersesuaian dengan operasi pada matriks yang diperbesar, yaitu
    1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol
    2. Menukarkan posisi dua baris

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
  1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua persamaan
  3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.
- Karena baris-baris dalam persamaan bersesuaian dengan matriks yang diperbesar, maka operasi ini bersesuaian dengan operasi pada matriks yang diperbesar, yaitu
  1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua baris
  3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

- Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang equivalen. Hal ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah:
  1. Mengalikan persamaan dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua persamaan
  3. Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.
- Karena baris-baris dalam persamaan bersesuaian dengan matriks yang diperbesar, maka operasi ini bersesuaian dengan operasi pada matriks yang diperbesar, yaitu
  1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua baris
  3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.
- Operasi ini yang disebut **Operasi Baris Elementer (OBE).**

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Example

Selesaikan SPL berikut dengan melakukan operasi pada SPL dan OBE pada matriks yang diperbesar.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Solution

- *Tambahkan -2 kali persamaan pertama ke persamaan kedua, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -3 kali persamaan pertama ke persamaan ketiga, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -3 kali persamaan pertama ke persamaan ketiga, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

- *Kalikan $\frac{1}{2}$ pada persamaan kedua, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -3 kali persamaan kedua ke persamaan ketiga, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -3 kali persamaan kedua ke persamaan ketiga, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- *Kalikan -2 pada persamaan ketiga, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -1 kali persamaan kedua ke persamaan pertama, diperoleh*

$$
\begin{aligned}
x + \qquad \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\
y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\
z &= 3
\end{aligned}
$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -1 kali persamaan kedua ke persamaan pertama, diperoleh*

$$\begin{aligned} x + \qquad \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

- *Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan pertama dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan kedua, diperoleh*

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 1 \\ y \qquad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

Selanjutnya kita lakukan operasi yang sama dengan OBE pada matriks yang diperbesar.

- *Dari SPL, diperoleh matriks yang diperbesar sebagai berikut*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

Selanjutnya kita lakukan operasi yang sama dengan OBE pada matriks yang diperbesar.

- *Dari SPL, diperoleh matriks yang diperbesar sebagai berikut*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -3 kali baris pertama ke baris ketiga, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan* -3 *kali baris pertama ke baris ketiga, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

- *Kalikan baris kedua dengan* $\frac{1}{2}$ *, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan* -3 *kali baris kedua ke baris ketiga, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan* -3 *kali baris kedua ke baris ketiga, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- *Kalikan baris ketiga dengan* -2 *, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan -1 kali baris kedua ke baris pertama, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan* -1 *kali baris kedua ke baris pertama, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Tambahkan* $-\frac{11}{2}$ *kali baris ketiga ke baris pertama dan* $\frac{7}{2}$ *kali baris ketiga ke baris kedua, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4 Sistem Persamaan Linear

1.4.4 Operasi Baris Elementer

Solution

- *Tambahkan* -1 *kali baris kedua ke baris pertama, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Tambahkan* $-\frac{11}{2}$ *kali baris ketiga ke baris pertama dan* $\frac{7}{2}$ *kali baris ketiga ke baris kedua, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Diperoleh solusi yang sama, yaitu* $x = 1,\ y = 2,\ dan\ z = 3.$

1.5 Latihan 1

1. Tunjukkan dari persamaan berikut yang termasuk persamaan linear dan bukan persamaan linear?
   a. $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$
   b. $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$
   c. $x_1 + 3x_2 - x_1x_3 = 2$
   d. $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$
   e. $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
   f. $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$
2. Jika k merupakan kontanta, manakah dari persmaan berikut yang merupakan persamaan linear?
   a. $x_1 - x_2 + x_3 = \sin\ k$
   b. $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$
   c. $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

1.5 Latihan 1

3. Tentukan himpunan solusi dari masing-masing persamaan linear berikut:
   a. $7x_1 - 5x_2 = 3$
   b. $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
   c. $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$
   d. $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$
4. Tentukan matriks diperbesar dari masing-masing sistem persamaan linear berikut:

a. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.5 Latihan 1

4. Tentukan matriks diperbesar dari masing-masing sistem persamaan linear berikut:

c.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \qquad\quad - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

5. Tentukan sistem persamaan linear dari matriks diperbesar berikut:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.5 Latihan 1

6. Perhatikan sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa agar sistem ini konsisten, maka kontanta a, b, dan c harus memenuhi $c = a + b$.

7. Untuk nilai-nilai kontanta k berapakah, sistem:

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

Tidak memiliki solusi, memiliki tepat satu solusi, memiliki tak hingga solusi? Jelaskan alasan anda.

"Eliminasi Gauss"

2.1 Bentuk Eselon

Suatu matriks bentuk eselon memiliki ciri sebagai berikut:

1. Jika seluruh baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan taknol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut **1 utama.**
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dekelompokkan bersama pada bagian paling bawah matriks.
3. Jika terdapat 2 baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat-tempat selainnya.

Suatu matriks yang meiliki ciri $1-3$ disebut **Bentuk Eselon Baris,** sedangkan matriks yang memiliki ciri $1-4$ disebut **Bentuk Eselon Baris Tereduksi.**

2.1 Bentuk Eselon

Example

Suatu sistem dengan variabel x, y, z dengan reduksi matriks yang diperbesar menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh solusi $x = 1, y = 2, z = 3$. Matriks ini adalah contoh matriks dalam **bentuk eselon baris tereduksi**.

Contoh lain **matriks eselon baris teredukasi** antara lain:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Catatan: * $=$ sebarang bilangan real

2.1 Bentuk Eselon

Adapun Contoh **matriks eselon baris** ditunjukkan pada matriks-matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Catatan: * $=$ sebarang bilangan real

Contoh-contoh diatas menunjukkan bahwa matriks dalam **bentuk eselon baris** *memiliki* **nol di bawah setiap 1 utama**, *sementara matriks dalam* **bentuk eselon baris tereduksi** *memiliki* **nol di bawah dan di atas setiap 1 utama**.

2.1 Bentuk Eselon

Example

Misalkan suatu matriks yang diperbesar dari suatu sistem persamaan linear, telah direduksi melalui OB menjadi bentuk eselon baris tereduksi seperti berikut.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1 Bentuk Eselon

Solution

a) *Dari matriks a) diperoleh sistem yang bersesuaian*

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad &= 5 \\ x_2 \quad\quad &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh solusi, $x_1 = 5,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4.$

b) *Dari matriks b), diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian sebagai berikut:*

$$\begin{aligned} w \quad\quad\quad + 4z &= -1 \\ x \quad + 2z &= 6 \\ y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

2.1 Bentuk Eselon

Solution

b) *Karena $w, x,$ dan y bersesuaian dengan 1 utama pada matriks yang diperbesar, maka ketiganya disebut* **variabel utama,** *sementara z disebut sebagai* **variabel bebas.** *Selanjutnya, kita selesaikan variabel utama terhadap variabel bebas, sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} w &= -1-4z \\ x &= 6-2z \\ y &= 2-3z \end{aligned}$$

Dengan menetapkan t sebarang nilai untuk variabel bebas z, maka diperoleh solusi sistem yang tak terhingga, yaitu

$$w=-1-4t;\ x=6-2t;\ y=2-3t;\ z=t.$$

2.1 Bentuk Eselon

Solution

c. *Dari matriks c), diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian, yaitu*

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad\qquad\quad + 4x_5 &= -2 \\ x_3 \qquad + 3x_5 &= 1 \\ x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Dalam hal ini dapat kita ketahui variabel utama ada pada $x_1, x_3,$ *dan* x_4, *sementara* x_2 *dan* x_5 *sebagai variabel bebas. Dengan menyelesaikan variabel utama terhadap variabel bebas, diperoleh*

$$x_1 = -2 - 6x_2 - 4x_5; \quad x_3 = 1 - 3x_5; \quad x_4 = 2 - 5x_5$$

Dari bentuk ini dapat diperoleh solsusi sistem yang tak hingga yaitu

$$x_1 = -2 - 6s - 4t; \; x_2 = s; \; x_3 = 1 - 3t; \; x_4 = 2 - 5t; \; x_5 = t.$$

2.1 Bentuk Eselon

Solution

d. *Dari matriks d), diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian, yaitu*

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Sistem ini memuat persamaan yang tak dapat dipenuhi pada persamaan ketiga, sehingga sistem tidak memiliki solusi.

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
- Masalah selanjutnya adalah bagaimana prosedur untuk mereduksi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi.

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
- Masalah selanjutnya adalah bagaimana prosedur untuk mereduksi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi.
- Prosedur inilah yang kita sebut dengan prosedur **eliminasi.**

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
- Masalah selanjutnya adalah bagaimana prosedur untuk mereduksi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi.
- Prosedur inilah yang kita sebut dengan prosedur **eliminasi.**
- Prosedur eliminasi pada matriks yang diperbesar ini dapat dilakukan dengan OBE, yaitu

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
- Masalah selanjutnya adalah bagaimana prosedur untuk mereduksi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi.
- Prosedur inilah yang kita sebut dengan prosedur **eliminasi.**
- Prosedur eliminasi pada matriks yang diperbesar ini dapat dilakukan dengan OBE, yaitu
  1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
- Masalah selanjutnya adalah bagaimana prosedur untuk mereduksi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi.
- Prosedur inilah yang kita sebut dengan prosedur **eliminasi.**
- Prosedur eliminasi pada matriks yang diperbesar ini dapat dilakukan dengan OBE, yaitu
  1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua baris

2.2 Metode Eliminasi

- Beberapa contoh sebelumnya menunjukkan kemudahan menentukan solusi suatu SPL jika bentuk matriks yang diperbesarnya telah di reduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.
- Masalah selanjutnya adalah bagaimana prosedur untuk mereduksi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi.
- Prosedur inilah yang kita sebut dengan prosedur **eliminasi.**
- Prosedur eliminasi pada matriks yang diperbesar ini dapat dilakukan dengan OBE, yaitu
  1. Mengalikan baris dengan kontanta taknol
  2. Menukarkan posisi dua baris
  3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.

2.2 Metode Eliminasi

Example

Lakukan eliminasi dengan *OBE* untuk memperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks diperbesar berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution

1. *Tukar $B1$ dan $B2$ untuk menempatkan entri taknol pada kolom pertama bagian atas*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Eliminasi

Solution

2. *Kalikan* $B1$ *dengan* $\frac{1}{2}$ *untuk membentuk 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Eliminasi

Solution

2. *Kalikan $B1$ dengan $\frac{1}{2}$ untuk membentuk 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. *Tambahkan $-2B1$ ke $B3$ untuk menghasilkan semua entri nol dibawah 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Sampai tahap ini dapat dianggap selesai untuk $B1$. Selanjutnya lakukan eliminasi pada $B2$.

2.2 Metode Eliminasi

Solution

4. *Kalikan B2 dengan* $-\frac{1}{2}$ *untuk membentuk 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Eliminasi

Solution

4. *Kalikan B2 dengan* $-\frac{1}{2}$ *untuk membentuk 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

5. *Tambahkan* $-5B2$ *ke B3 untuk menghasilkan entri nol dibawah 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Sampai tahap ini dapat dianggap selesai untuk B2. Selanjutnya lakukan eliminasi pada B3.

2.2 Metode Eliminasi

Solution

6. *Kalikan B3 dengan 2 untuk membentuk 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sampai tahap ini kita telah peroleh **matriks bentuk eselon baris***. Untuk menghasilkan matriks eselon baris tereduksi, perlu dilanjutkan pada langkah selanjutnya.*

2.2 Metode Eliminasi

Solution

6. *Kalikan B3 dengan 2 untuk membentuk 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sampai tahap ini kita telah peroleh **matriks bentuk eselon baris**. *Untuk menghasilkan matriks eselon baris tereduksi, perlu dilanjutkan pada langkah selanjutnya.*

7. *Tambahkan $\frac{7}{2}B3$ ke B2 untuk menghasilkan entri nol diatas 1 utama B3*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Eliminasi

Solution

8. *Kalikan* $-6B3$ *ke* $B1$ *untuk membentuk semua entri nol diatas 1 utama* $B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Eliminasi

Solution

8. *Kalikan* $-6B3$ *ke* $B1$ *untuk membentuk semua entri nol diatas 1 utama* $B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. *Tambahkan* $5B2$ *ke* $B1$ *untuk menghasilkan entri nol diatas 1 utama* $B2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sampai pada tahap ini, kita telah peroleh **matriks eselon baris tereduksi**.

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Catatan:

1. Langkah 1-6 yang menghasilkan **Matriks Eselon Baris** disebut **Eliminasi Gauss**.

Example

Selesaikan sistem linear berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Catatan:

1. Langkah 1-6 yang menghasilkan **Matriks Eselon Baris** disebut **Eliminasi Gauss**.
2. Langkah 1-9 yang menghasilkan **Matriks Eselon Baris Tereduksi** disebut **Eliminasi Gauss-Jordan.**

Example

Selesaikan sistem linear berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

1. *Matriks yang diperbesar dari sistem linear*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

1. *Matriks yang diperbesar dari sistem linear*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

2. *Tambahkan -2B1 ke B2 dan B4, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

3. *Kalikan B2 dengan -1 untuk membentu 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

3. *Kalikan B2 dengan -1 untuk membentu 1 utama*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

4. *Tambahkan -5B2 ke B3 dan -4B2 ke B4, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

5. *Tukarkan B3 dengan B4 untuk menempatkan baris dengan semua entri nol dibawah kemudian kalikan B3 baru dengan* $\frac{1}{6}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

5. *Tukarkan B3 dengan B4 untuk menempatkan baris dengan semua entri nol dibawah kemudian kalikan B3 baru dengan* $\frac{1}{6}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. *Tambahkan -3B3 ke B2, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

7. *Tambahkan 2B2 ke B1, maka diperoleh bentuk eselon baris tereduksi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

7. *Tambahkan 2B2 ke B1, maka diperoleh bentuk eselon baris tereduksi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. *Konversi ke sistem yang bersesuaian*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

9. *Dengan menyelesaikan variabel utama terhadap variabel bebas, diperoleh*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.3 Eliminasi Gauss-Jordan

Solution

9. *Dengan menyelesaikan variabel utama terhadap variabel bebas, diperoleh*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10. *Tetapkan nilai sebarang untuk variabel bebas, misal $x_2 = k, x_4 = l, x_5 = m$, maka diperoleh solusi*

$$\begin{array}{ll} x_1 = -3k - 4l - 2m & x_4 = l \\ x_2 = k & x_5 = m \\ x_3 = -2l & x_6 = \frac{1}{3} \end{array}$$

2.4 Subtitusi Balik

Catatan:

1. Dalam proses penyelesaian SPL, kita boleh memilih untuk menggunakan **eliminasi Gauss-Jordan** atau hanya menggunakan **eliminasi Gauss**.

Example

Eliminasi Gauss pada contoh sebelumnya menghasilkan matriks yang diperbesar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Catatan:

1. Dalam proses penyelesaian SPL, kita boleh memilih untuk menggunakan **eliminasi Gauss-Jordan** atau hanya menggunakan **eliminasi Gauss**.
2. Jika langkah yang dipilih adalah eliminasi Gauss, maka selanjutnya sistem persamaan yang bersesuaian dapat diselesaikan dengan **Metode Subtitusi Balik**.

Example

Eliminasi Gauss pada contoh sebelumnya menghasilkan matriks yang diperbesar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

Dari matriks diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian, yaitu

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dari sistem persamaan linear, dilakukan langkah-langkah subtitusi balik sebagai berikut:

1. *Selesaikan persamaan-persamaan untuk variabel utama*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

2. *Lakukan subtitusi mulai dari persamaan paling bawah berturut-turut ke persamaan di atasnya. Dengan subtitusi* $x_6 = \frac{1}{3}$ *ke persamaan kedua diperoleh*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

2. *Lakukan subtitusi mulai dari persamaan paling bawah berturut-turut ke persamaan di atasnya. Dengan subtitusi* $x_6 = \frac{1}{3}$ *ke persamaan kedua diperoleh*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. *Dengan subtitusi* $x_3 = -2x_4$ *ke persamaan pertama diperoleh*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

2. *Tetapkan nilai-nilai sebarang untuk variabel bebas, jika ada. Misalkan*

$$\begin{aligned} x_2 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

2. *Tetapkan nilai-nilai sebarang untuk variabel bebas, jika ada. Misalkan*

$$\begin{aligned} x_2 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

3. *Maka diperoleh solusi umum*

$$\begin{aligned} x_1 &= -3r - 4s - 2t & \qquad x_4 &= s \\ x_2 &= r & x_5 &= t \\ x_3 &= -2s & x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.4 Subtitusi Balik

Example

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan Eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x - 7y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

Solution

1. *Matriks yang diperbesar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

2. $B1 + B2\ dan\ -3B1 + B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

2. $B1 + B2 \; dan \; -3B1 + B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

3. $-B2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

4. $10B2 + B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

4. $10B2 + B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

5. $-\frac{1}{52}B3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

6. *Sistem yang bersesuaian*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ y - 5z &= -9 \\ z &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 8 - y - 2z \\ y &= -9 + 5z \\ z &= 2 \end{aligned}$$

2.4 Subtitusi Balik

Solution

6. *Sistem yang bersesuaian*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ y - 5z &= -9 \\ z &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 8 - y - 2z \\ y &= -9 + 5z \\ z &= 2 \end{aligned}$$

7. *Dengan subtitusi balik, diperoleh*

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear dikatakan **homogen** jika semua bentuk konstantanya adalah nol

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear dikatakan **homogen** jika semua bentuk konstantanya adalah nol

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

- Sistem linear homogen adalah konsisten karena sistem homogen selalu mempunyai solusi $x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ \cdots, \ x_n = 0$.

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear dikatakan **homogen** jika semua bentuk konstantanya adalah nol

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

- Sistem linear homogen adalah konsisten karena sistem homogen selalu mempunyai solusi $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0.$
- Solusi seperti ini disebut **Solusi Trivial**.

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear **homogen** hanya memiliki 2 kemungkinan untuk solusi-solusinya:

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear **homogen** hanya memiliki 2 kemungkinan untuk solusi-solusinya:
  1. Solusi trivial

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear **homogen** hanya memiliki 2 kemungkinan untuk solusi-solusinya:
    1. Solusi trivial
    2. Solusi takhingga banyaknya

2.5 Sistem Linear Homogen

- Sistem persamaan linear **homogen** hanya memiliki 2 kemungkinan untuk solusi-solusinya:
  1. Solusi trivial
  2. Solusi takhingga banyaknya
- Misal diberikan sistem homogen dengan 2 variabel

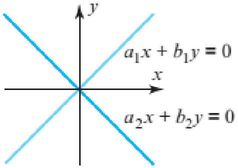
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

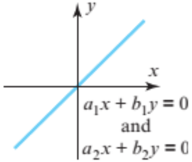
- Sistem persamaan linear **homogen** hanya memiliki 2 kemungkinan untuk solusi-solusinya:
  1. Solusi trivial
  2. Solusi takhingga banyaknya
- Misal diberikan sistem homogen dengan 2 variabel

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$

- Maka kemungkinan solusinya antara lain



Solsui Trivial



Taktrivial

2.5 Sistem Linear Homogen

Catatan:
Ada satu kasus dimana sistem homogen dapat dipastikan mempunyai solusi **Taktrivial**, *yaitu ketika banyaknya variabel lebih besar dari banyaknya persamaan yang terlibat dalam sistem.*

Example

Selesaikan sistem homogen berikut dengan Eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

Solution

1. *Dari sistem homogen diperoleh matriks yang diperbesar*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

Solution

1. *Dari sistem homogen diperoleh matriks yang diperbesar*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. *Dengan mereduksi melalui Eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

Solution

3. *Sistem yang bersesuai dengan matriks tereduksi adalah*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

Solution

3. *Sistem yang bersesuai dengan matriks tereduksi adalah*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. *Dengan menyelesaikan variabel-variabel utama, diperoleh*

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Sistem Linear Homogen

Solution

5. *Dengan demikian, diperoleh solusi umum taktrivial*

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

Solusi trivial akan diperoleh jika $s = t = 0$.

Theorem

Suatu sistem persamaan linear dengan jumlah variabel lebih besar dari jumlah persamaan, memiliki takhingga banyaknya solusi.

2.6 Latihan 2

1. Tentukan apakah matriks berikut termasuk matriks eslon baris, eselon baris tereduksi, keduanya, atau bukan keduanya?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Selesaikan sistem yang diberikan pada nomor 1.

2.6 Latihan 2

3. Selesaikan sistem berikut dengan Eliminasi Gauss-Jordan?

a) $$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$

4. Selesaikan sistem yang diberikan pada nomor 3 dengan eliminasi Gauss.
5. Untuk nilai λ berapakah, sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)\,x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)\,y &= 0 \end{aligned}$$

memiliki solusi taktrivial?

2.6 Latihan 2

6. Untuk nilai a berapakah sistem berikut tidak memiliki solusi? Tepat satu solusi? Takhingga banyaknya solusi?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + \left(a^2 - 14\right) z &= a + 2 \end{aligned}$$

7. Selesaikan sistem homogen berikut dengan metode sebarang.

a) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$