ALJABAR LINEAR ELEMENTER

Matriks dan Operasi Matriks

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

September 2017

Matriks dan Operasi Matriks

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- Pada subbab sebelumnya, kita telah menggunakan jajaran empat persegi panjang dari bilangan real untuk menyelesaikan solusi sistem persamaan linear yang disebut Matriks yang Diperbesar.

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- Pada subbab sebelumnya, kita telah menggunakan jajaran empat persegi panjang dari bilangan real untuk menyelesaikan solusi sistem persamaan linear yang disebut Matriks yang Diperbesar.
- Selain pada kasus SPL, terdapat banyak penerapan matriks dalam konteks yang lain. Sebagai contoh, sebuah tabel yang menggambarkan jumlah jam yang dihabiskan mahasiswa untuk mempelajari mata kuliah dalam sepekan sebagai berikut

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu	Ahad
Kalkulus	2	3	2	4	1	4	2
Fiska	0	3	1	4	3	2	2
Kimia	4	1	3	1	0	0	2

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- Jika judul-judul pada tabel dihilangkan, maka akan kita peroleh jajaran empat persegi panjang dengan 3 baris dan 7 kolom yang disebut "Matriks"

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definition

Matriks adalah sejumlah angka atau bilangan yang tersusun membentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam susunan persegi panjang tersebut disebut sebagai **entri** dari matriks.

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

Example

Berikut diberikan beberapa contoh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [5]$$

- **Ukuran Matriks** dinyatakan dengan jumlah **baris** dan **kolom**nya (*baris* $\times$ *kolom*). Misal ukuran matriks pada contoh-contoh matriks di atas berturut-turut adalah 3×2, 1×4, 3×3, 2×1, dan 1×1.

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

Example

Berikut diberikan beberapa contoh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [5]$$

- **Ukuran Matriks** dinyatakan dengan jumlah **baris** dan **kolom**nya (*baris* $\times$ *kolom*). Misal ukuran matriks pada contoh-contoh matriks di atas berturut-turut adalah 3×2, 1×4, 3×3, 2×1, dan 1×1.
- **Matriks Kolom** (atau **Vektor Kolom**) adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom.

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

Example

Berikut diberikan beberapa contoh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [5]$$

- **Ukuran Matriks** dinyatakan dengan jumlah **baris** dan **kolom**nya ($baris \times kolom$). Misal ukuran matriks pada contoh-contoh matriks di atas berturut-turut adalah 3×2, 1×4, 3×3, 2×1, dan 1×1.
- **Matriks Kolom** (atau **Vektor Kolom**) adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom.
- **Matriks Baris** (atau **Vektor Baris**) adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris.

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- **Notasi Matriks** biasa dinyatakan dengan huruf **kapital** sementara **skalar (**kuantitas numerik**)** dinyatakan dengan huruf kecil. Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad atau \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- **Notasi Matriks** biasa dinyatakan dengan huruf **kapital** sementara **skalar** (kuantitas numerik**)** dinyatakan dengan huruf kecil. Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad atau \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- Entri pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ pada suatu matriks dapat dinyatakan dengan a_{ij}, sehingga bentuk umum matriks dapat dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- **Notasi Matriks** biasa dinyatakan dengan huruf **kapital** sementara **skalar (**kuantitas numerik**)** dinyatakan dengan huruf kecil. Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad atau \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- Entri pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ pada suatu matriks dapat dinyatakan dengan a_{ij}, sehingga bentuk umum matriks dapat dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks diatas dapat dinyatakan dalam notasi yang lebih singkat, yaitu

$$[a_{ij}]_{m\times n} \qquad atau \qquad [a_{ij}]$$

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut **Matriks Bujursangkar Ordo** n.

1.1 Notasi dan Istilah Matriks

- Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut **Matriks Bujursangkar Ordo** n.
- Entri $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ pada matriks A berikut disebut **diagonal utama** dari matriks.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.1 Kesetaraan Matriks

Definition

Dua matriks dikatakan **setara** (equal) jika dan hanya jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian sama.

Example

Perhatikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = B$ jika dan hanya jika $x = 5$ sementara untuk nilai x selain 5, $A \neq B$. Tidak ada x dimana $A = C$ karena A dan C memiliki ukuran yang berbeda.

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.2 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Definition

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan **ukuran yang sama,** maka

a. **Jumlah (sum)** $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A.

b. **Selisih (difference)** $A-B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B.

Matriks yang berbeda ukuran tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan

Dalam notasi matriks, jika $A=[a_{ij}]$ dan $B=[b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad dan \qquad (A-B)_{ij}=(A)_{ij}-(B)_{ij}=$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.2 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Example

Perhatikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad dan \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Adapun $A + C$, $B + C$, dan $B - C$ tidak dapat terdefinisi karena ukuran matriks berbeda.

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.3 Hasilkali dan Kelipatan Skalar

Definition

Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka

a. **Hasilkali** cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matris A dengan bilangan c.
b. Matriks cA disebut **Kelipatan Skalar** dari A.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$$(cA)_{ij} = c\left(A_{ij}\right) = ca_{ij}$$

Example

Misalkan diberikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.3 Hasilkali dan Kelipatan Skalar

Solution

Kita memiliki kelipatan-kelipatan matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
2A &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \\
(-1)B &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{3}C &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks

Definition

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka **Hasilkali (Product)** AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut :

a. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B.

b. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut kemudian jumlahkan hasilnya.

Example

Misalkan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks

Solution

Karena A matriks 2×3*, dan B matriks* 3×4*, maka hasilkali AB berukuran* 2×4.

- *Untuk menentukan entri baris 2 kolom 3:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

- *Entri baris 1 kolom 4:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks

Solution

- *Perhitungan untuk hasilkali lainnya*

$$\begin{aligned}
(1\cdot 4)+(2\cdot 0)+(4\cdot 2) &= 12\\
(1\cdot 1)-(2\cdot 1)+(4\cdot 7) &= 27\\
(1\cdot 4)+(2\cdot 3)+(4\cdot 5) &= 30\\
(2\cdot 4)+(6\cdot 0)+(0\cdot 2) &= 8\\
(2\cdot 1)-(6\cdot 1)+(0\cdot 7) &= -4\\
(2\cdot 3)+(6\cdot 1)+(0\cdot 2) &= 12
\end{aligned}$$

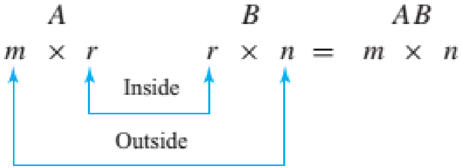
sehingga

$$AB=\begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13\\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks

Perkalian matriks mensyaratkan **jumlah kolom dari matriks pertama harus sama dengan jumlah baris dari matriks kedua**. Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka hasilkali matriks tidak dapat didefinisikan.



1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks

Example

Misalkan matriks A, B, dan C dengan ukuran sebagai berikut

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3 \times 4 & 4 \times 7 & 7 \times 3 \end{array}$$

Maka

1. AB dapat difenisikan sebagai matriks ukuran 3×7,
2. BC dapat didefinisikan sebagai matriks 4×3,
3. CA dapat didefinisikan sebagai matriks 7×4,
4. AC, CB, BA tidak dapat didefinisikan.

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks

Secara umum, jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times r$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $r \times n$, maka

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks dengan Kolom atau Baris

Kita dapat menentukan kolom atau baris tertentu dari matriks AB, tanpa harus menghitung seluruh hasilkali matriks

$$\begin{aligned} \text{Matriks kolom ke} - j \text{ dari } AB &= A\left[\text{Matriks kolom ke} - j \text{ dari } B\right] \\ \text{Matriks baris ke} - i \text{ dari } AB &= \left[\text{Matriks baris ke} - i \text{ dari } A\right] B \end{aligned}$$

Jika $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{2,} \cdots, \mathbf{a}_m$ menyatakan *matriks-matriks baris* dari A dan $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{2,} \cdots, \mathbf{b}_n$ menyatakan *matriks-matriks kolom* dari B,
Maka

a. AB dapat dihitung kolom per kolom

$$AB = A\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_{2,} & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_{2,} & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks dengan Kolom atau Baris

b. atau AB dapat dihitung baris per baris

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}$$

Example

Misal matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.4 Perkalian Matriks dengan Kolom atau Baris

Solution

Maka

- *Matriks kolom ke*-2 *dari* AB *adalah*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- *Matriks baris pertama dari* AB *adalah*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.5 Perkalian Matriks sebagai Kombinasi Linear

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad dan \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots +$$

disebut **kombinasi linear** dari matriks-matriks kolom A dengan koefisien-koefisien yang berasal dari matriks $\mathbf{x}$.

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.5 Perkalian Matriks sebagai Kombinasi Linear

Example

Hasilkali matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dapat dinyatakan sebagai **kombinasi linear** dari matriks-matriks kolom

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.5 Perkalian Matriks sebagai Kombinasi Linear

Example

Hasilkali matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -18 & 35 \end{bmatrix}$$

dapat dinyatakan sebagai **kombinasi linear** dari matriks-matriks baris

$$1 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -18 & 35 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.5 Perkalian Matriks sebagai Kombinasi Linear

Example

Hasilkali matriks

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

dapat dinyatakan sebagai **kombinasi linear** dari matriks-matriks kolom A sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} &= 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} &= 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} &= 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.6 Transpos Matriks

Definition

Jika A matriks $m \times n$, maka **Transpos dari** A dinyatakan dengan A^T dan didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom pada matriks A.

Dengan demikian, Kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, Kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Example

Bebrapa contoh matriks dan transposnya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1.2 Operasi pada Matriks

1.2.7 Trace Matriks

Definition

Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka **Trace dari** A dinyatakan dengan $tr\,(A)$ dan didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. Trace A tidak dapat didefinisikn jika A bukan matriks bujursangkar.

Example

Bebrapa contoh matriks dan tracenya

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow tr\,(A) = 1 + 6 - 2 = 5, \\ B &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow tr\,(B) = -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

1.3 Latihan 3

1. Selesaikan a, b, c dan d pada persamaan matriks berikut

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Misalkan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Gunakan metode perkalian matriks dengan kolom atau baris untuk menetukan

a. Baris pertama AB
b. Baris ketiga AB
c. Kolom kedua AB
d. Kolom pertama BA
e. Baris ketiga AA
f. Kolom ketiga AA

1.3 Latihan 3

3. Misalkan A dan B matriks-matriks pada nomor 2.

   a. Nyatakan setiap matriks kolom AB sebagai kombinasi linear dari mat
   b. Nyatakan setiap matriks kolom BA sebagai kombinasi linear dari ma

4. Misalkan

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \quad dan \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

   Tunjukkan bahwa hasil kali $\mathbf{y}A$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari matriks-matriks baris A dengan koefisien-koefisien skalar yang berasal dari $\mathbf{y}$.

1.3 Latihan 3

5. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitunglah pernyataan-pernyataan berikut jika memungkinkan:

a. $D+E$	d. $-7C$	g. $-3(D+2E)$	j. $tr(D-3E)$
b. $D-E$	e. $2B-C$	h. $A-A$	k. $4\ tr(7B)$
c. $5A$	f. $4E-2D$	i. $tr(D)$	l. $tr(A)$

1.3 Latihan 3

6. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitunglah pernyataan-pernyataan berikut jika memungkinkan:

a. $\left(2D^T - E\right) A$
b. $(4B)\,C + 2B$
c. $(-AC)^T + 5D^T$
d. $\left(BA^T - 2C\right)^T$
e. $B^T\left(CC^T - A^T A\right)$
f. $D^T E^T - (ED)^T$

◦ ◦ ◦ Invers dan Aturan Aritmatika Matriks ◦ ◦◦

2.1 Sifat-Sifat Operasi Matriks

Pada bilangan real, kita mengenal hukum komutatif perkalian, yaitu $ab = ba$, untuk a dan b bilangan real. Perlu diperhatikan bahwa hukum ini **tidak berlaku** pada operasi matriks. Pada sifat operasi matriks, hukum komutatif AB dan BA tidak selalu sama. Kesamaan tidak terjadi karena

1. Hasilkali AB terdefinisi tetapi hasilkali BA tidak terdefinisi.
   Contoh: matriks $A_{2\times 3}$ dan $B_{3\times 4}$
2. Hasilkali AB dan BA terdefinisi, tetapi keduanya memiliki ukuran yang berbeda.
   Contoh: matriks $A_{2\times 3}$ dan $B_{3\times 2}$
3. Hasilkali AB dan BA terdefinisi dan memiliki ukuran yang sama, tetapi $AB \neq BA$.
   Contoh:

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } AB \neq BA$$

2.1 Sifat-Sifat Operasi Matriks

Theorem (Sifat-Sifat Aritmatika Matriks)

Dengan asumsi bahwa ukuran matriks bersesuaian sehingga dapat dioperasikan, maka aturan-aturan aritmatika matriks berikut berlaku:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
4. $A(BC) = (AB)C$
5. $(B \pm C)A = BA \pm CA$
6. $a(B \pm C) = aB \pm aC$
7. $(a \pm b)C = aC \pm bC$
8. $a(bC) = (ab)C$
9. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Example

Diberikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks Nol

Definition

Matriks nol adalah sebuah matriks yang keseluruhan entrinya adalah nol. Misalnya

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [0]$$

Jika A adalah sebarang matriks dan $\mathbf{0}$ adalah matriks nol dengan ukuran yang sama, maka berlaku

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$$

Dalam hal ini matriks $\mathbf{0}$ memainkan peran yang sama dengan bilangan 0 pada operasi numerik $a + 0 = 0 + a = a$.

2.2 Matriks Nol

Penting untuk dicatat bahwa **tidak semua sifat aritmatika pada bilangan real berlaku pada operasi matriks**. Misal, kita perhatikan sifat operasi pada bilangan real:

1. Jika $ab = ac$ dan $a \neq 0$, maka $b = c$, yang disebut *hukum pembatalan.*
2. Jika $ad = 0$, maka paling tidak salah satu dari a atau d adalah 0.

Sifat-sifat aritmatika ini tidak selamanya benar apabila digunakan pada operasi matriks, sebagaimana ditunjukkan pada contoh berikut.

Example

Perhatikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa

$$AB = AC \quad \text{dan} \quad AD = \mathbf{0}$$

2.2 Matriks Nol

Solution

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad dan \quad AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian:

- *Tidak benar untuk membatalkan A dari kedua sisi persamaan $AB = AC$ dan menyatakan $B = C$, meskipun $A \neq 0$*
- *Diperoleh $AD = 0$, meskipun A dan D keduanya bukan nol.*

Theorem (Sifat-Sifat Matriks Nol)

Dengan asumsi ukuran matriks bersesuaian sehingga operasi matriks dapat dilakukan, maka

$$\begin{array}{ll} 1.\ A + 0 = 0 + A = A & 6.\ 0 - A = -A \\ 2.\ A - A = 0 & 7.\ A0 = 0, \quad 0A = 0 \end{array}$$

2.3 Matriks Identitas

Definition

Matriks Identitas adalah sebuah matriks bujursangkar yang memuat entri 1 pada diagonal uatamanya dan 0 pada entri lainnya, dinyatakan dengan I atau $I_{n\times n}$ untuk matriks identitas ukuran $n \times n$. Misalnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

- Jika A matriks ukuran $m \times n$, maka

$$AI_n = A \text{ dan } I_m A = A$$

- Matriks identitas memegang peranan yang sama dengan 1 pada operasi aritmatika bilangan real

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

2.3 Matriks Identitas

Example

Misal diberikan sebarang matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\begin{aligned} I_2A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A \\ AI_3 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

2.3 Matriks Identitas

Definition

- Jika A matriks bujursangkar dan terdapat matriks B yang berukuran sama sedemikian sehingga
  $AB = BA = I$, maka A disebut **dapat dibalik** dan B disebut sebagai **invers dari** A.
- Jika matriks B tidak dapat didefinisikan , maka A dinyatakan sebagai **matriks singular.**

Example

Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ adalah invers dari matriks } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

karena

$$AB = I \quad \text{dan} \quad BA = I$$

2.3 Matriks Identitas

Example

Tunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ adalah matriks singular}$$

Solution

Untuk menunjukkan bahwa matriks A singular, kita hanya perlu menunjukkan bahwa terdapat matriks $B_{3\times 3}$ sedemikian sehingga

$$AB \neq I \quad \text{atau} \quad BA \neq I$$

2.3 Matriks Identitas

Solution

Misal

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Dapat ditunjukkan kolom ketiga dari hasilkali matriks

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga jelas bahwa

$$BA \neq I$$

Dengan demikian, benar bahwa A adalah matriks singular atau matriks yang tidak mempunta invers

2.4 Sifat-Sifat Invers

Theorem

Jika B dan C kedua-duanya adalah invers dari matriks A, maka $B = C$.

Proof.

Karena B invers A, maka

$$BA = I$$

Kalikan kedua ruas dengan C, maka diperoleh

$$\begin{aligned}(BA)\,C &= IC = C \\ (BA)\,C &= B\,(AC) = BI = B\end{aligned}$$

Dengan demikian, $B = C$ □

Corollary

Jika A dapat dibalik, maka inversnya dinyatakan dengan simbol A^{-1}, sehingga

2.4 Sifat-Sifat Invers

Theorem (Invers Matriks 2 x 2)

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, *dan inversnya dapat dihitung dengan*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Proof.

Bukti sebagai latihan, cukup tunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ □

2.4 Sifat-Sifat Invers

Theorem

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka AB dapat dibalik dan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Proof.

Cukup dengan menunjukkan bahwa $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$, maka kita telah menunjukkan bahwa AB dapat dibalik dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Example

Tunjukkan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ jika diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad dan \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.5 Pangkat suatu Matriks

Definition

Jika A matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I, \quad A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \;\; faktor} \qquad (n > 0)$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \;\; faktor}$$

2.5 Pangkat suatu Matriks

Theorem (Hukum Eksponen)

1. *Jika A matriks bujursangkar, r dan s adalah integer, maka*

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

2. *Jika A matriks yang dapat dibalik, maka*

   a. A^{-1} *dapat dibalik dan* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

   b. A^n *dapat dibalik dan* $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n, \; n = 0, 1, 2, \cdots$

   c. *Untuk sebarang skalar taknol k, matriks kA dapat dibalik dan*

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

2.5 Pangkat suatu Matriks

Example

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad dan \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-3} &= \left(A^{-1}\right)^3 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.5 Pangkat suatu Matriks

Pernyataan Polinomial yang Melibatkan Matriks

Jika A matriks bujursangkar, misal $m \times m$ dan jika

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

adalah sebarang polinomial, maka kita definisikan

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

sengan I adalah matriks identitas $m \times m$.

Example

Jika

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad dan \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka tentukan nilai $p(A)$.

2.5 Pangkat suatu Matriks

Solution

$$\begin{aligned} p(A) &= 2A^2 - 3A + 4I \\ &= 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.6 Sifat-Sifat Transpos

Theorem (Sifat-Sifat Transpos)

Jika ukuran matriks bersesuaian sehingga operasi berikut dapat dilakukan, maka:

1. $\left((A)^T\right)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ *dan* $(A-B)^T = A^T - B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$, *k sebarang skalar*
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Theorem (Invers Transpos)

Jika A matriks yang dapat dibalik, maka A^T juga dapat dibalik dan

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

2.6 Sifat-Sifat Transpos

Example

Perhatikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan teorema invers transpos, diperoleh

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \\ \left(A^{-1}\right)^T &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \\ \left(A^T\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.7 Latihan 4

1. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$a = 4 \qquad b = -7$

Tunjukkan bahwa

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

b) $a(B - C) = aB - aC$

c) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

d) $A(B - C) = AB - AC$

e) $a(bC) = (ab)C$

f) $(A^T)^T = A$

g) $(AB)^T = B^T A^T$

h) $(A + B)^T = A^T + B^T$

2. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad dan \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2.7 Latihan 4

2. Buktikan bahwa

   a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ b) $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$ c) $(A^{-1})^{-1} = A$

3. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hitunglah:

   a. A^3 *dan* A^{-3}
   b. $p(A)$, *jika* $p(x) = x^3 - 2x + 4$

4. Suatu matriks bujursangkar A dikatakan **simetrik** jika $A^T = A$ dan **simetrik miring** jika $A^T = -A$. Jika B matriks bujursangkar, tunjukkan bahwa

   a. BB^T dan $B + B^T$ adalah simetrik
   b. $B - B^T$ adalah simetrik miring