ALJABAR LINEAR ELEMENTER

Matriks Elementer dan Metode Invers

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

September 2017

○ ○ ○ **Matriks Elementer dan Metode Inversi Matriks** ○ ○○

1.1 Matriks Elementer

Definition

Suatu matriks $n \times n$ disebut **Matriks Elementer** jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas I_n dengan melakukan **operasi baris elemnter tunggal**.

Example

Berikut diberikan contoh matriks elementer dan operasi yang menghasilkannya

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3B_2 \ pada \ I_2 \qquad B_2 \leftrightarrows B_4 \ pada \ I_4 \qquad B_1 + 3B_3 \ pada \ I_3 \qquad 1B_1 I_3$$

1.1 Matriks Elementer

Theorem

Jika E adalah matriks elementer yang diperoleh dengan cara melakukan **operasi baris tertentu** *terhadap I_m dan A adalah matriks ukuran $m \times n$, maka hasilkali EA adalah matriks yang dihasilkan jika* **operasi yang sama** *dilakukan terhadap A.*

Example

Perhatikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{dan matriks elementer} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1 Matriks Elementer

Solution

Jika matriks elementer

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diperoleh dengan operasi baris $\mathbf{B_3}+\mathbf{3B_1}$ *pada matriks* $\mathbf{I_3}$, *maka hasilkali EA*

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

diperoleh dengan **operasi baris yang sama** *pada matriks* **A**.

1.1 Matriks Elementer

Theorem

Setiap matriks elementer dapat dibalik, dan kebalikannya juga merupakan matriks elementer.

Theorem

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka persamaan-persamaan berikut adalah eqivalen. yaitu semuanya benar atau semuanya salah.

1. *A dapat dibalik*
2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial*
3. *Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n*
4. *A dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari matriks-matriks elementer*

Proof.

Bukti diserahkan sebagai latihan. □

1.2 Metode Inversi Matriks

Untuk mencari invers dari matriks A yang dapat dibalik, kita harus mencari suatu urutan operasi baris elementer yang mereduksi A menjadi identitas dan melakukan urutan operasi yang sama terhadap I_n untuk memperoleh A^{-1}.

Example

Tentukan invers dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solution

Invers matriks A melalui OBE pada matriks A dan I mengikuti pola berikut

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right] \underrightarrow{OBE} \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array} \right]$$

1.2 Metode Inversi Matriks

Solution

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2B1+B2 \\ -B1+B3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 2B2+B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad -B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3B3+B1 \\ 3B3+B2 \end{array}$$

1.2 Metode Inversi Matriks

Solution

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad -2B2 + B1$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} I & | & A^{-1} \end{array}\right]$$

Dengan demikian

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2 Metode Inversi Matriks

- Jika suatu matriks $A_{n\times n}$ dapat dibalik atau memiliki invers, maka matriks tersebut dapat direduksi menjadi matriks identitas I_n dengan operasi baris elementer.
- Dengan demikian, jika matriks tersebut **tidak dapat direduksi menjadi matriks identitas** melalui operasi baris elementer, maka matriks tersebut **tidak mempunyai invers**.
- Dalam hal ini, ciri yang mungkin kita dapati saat melakukan operasi baris elementer pada A adalah terdapat paling tidak satu baris bilangan nol.

Example

Lakukan OBE untuk menentukan invers dari matriks berikut (jika ada)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1.2 Metode Inversi Matriks

Solution

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2B1+B2 \\ B1+B3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad B2+B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

OBE diatas menunjukkan bahwa matriks A tidak dapat direduksi menjadi matriks identitas. Dengan demikian A tidak mempunyai invers.

1.3 Latihan 5

1. Tentukan suatu operasi baris yang akan mengembalikan matriks elementer berikut menjadi matriks identitas

$$a)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Misalkan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks-matriks elementer E_1 dan E_2, sehinga

$$\text{a. } E_1A = B \quad \text{b. } E_2B = A$$

1.3 Latihan 5

3. Tentukan dari matriks berikut yang merupakan matriks elementer

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Carilah invers dari matriks-matriks berikut dengan cara reduksi ke matriks identitas

$$a)\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

○ ○ ○ **Sistem Persamaan Linear dan Keterbalikan** ○ ○○

2.1 Penyelesaian SPL dengan Inversi Matriks

Theorem

Jika A adalah matriks $n \times n$ yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks $\mathbf{b}$, $n \times 1$, *sistem persamaan* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *memiliki tepat satu solusi, yaitu*

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Proof.

Karena $A\left(A^{-1}\mathbf{b}\right) = \mathbf{b}$, maka $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ adalah solusi dari persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Misal $\mathbf{x_0}$ adalah sebarang solusi yang lain. kita akan menunjukkan bahwa $\mathbf{x_0}$ juga merupakan solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Karena $\mathbf{x_0}$ adalah sebarang solusi, maka berlaku $A\mathbf{x_0}= \mathbf{b}$.Dengan mengalikan kedua ruas dengan A^{-1}, diperoleh $\mathbf{x_0} = A^{-1}\mathbf{b}$.
Dengan demikian $\mathbf{x_0} = \mathbf{x}$ atau $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hanya memiliki tepat satu solusi. $\square$

2.1 Penyelesaian SPL dengan Inversi Matriks

Example

Tentukan solusi dari sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Solution

Sistem dapat dinyatakan dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *dimana*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

2.1 Penyelesaian SPL dengan Inversi Matriks

Solution

Pada subbab sebelumnya telah ditemukan invers dari A, yaitu

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Catatan: Metode ini hanya berlaku jika banyaknya persamaan SPL sama dengan banyaknya variabel, dan matriks koefisien dapat dibalik.

2.1 Penyelesaian SPL dengan Inversi Matriks

Jika kita menemukan urutan sistem persamaan linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b_1}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b_3}, \quad \cdots, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b_k}$$

Maka, solusinya dapat diperoleh dengan satu inversi matriks dan k perkalian matriks. Adapun metode yang paling efisien adalah dengan membentuk matriks

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} A & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_k \end{array} \right]$$

dimana matriks-matriks koefisien A diperbesar dengan semua k dari matriks $\mathbf{b}_1, \ \mathbf{b}_2, \ \cdots, \ \mathbf{b}_k$

2.1 Penyelesaian SPL dengan Inversi Matriks

Example

Tentukan solusi dari dua sistem persamaan linear berikut

$$a)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad dan \qquad b)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solution

Kedua sistem memiliki matriks koefisien yang sama sehingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

2.1 Penyelesaian SPL dengan Inversi Matriks

Solution

*Dengan mereduksi matriks ini ke bentuk eselon baris tereduksi (**buktikan**), diperoleh*

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Dengan demikian solusi sistem a) adalah $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$, *sementara solusi dari sistem b) adalah* $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

2.2 Sifat Matriks yang Dapat Dibalik

Theorem

Misalkan A matriks bujursangkar.

1. *Jika B matriks bujursangkar yang memenuhi $BA = I$, maka $B = A^{-1}$*
2. *Jika B matriks bujursangkar yang memenuhi $AB = I$, maka $B = A^{-1}$*

Theorem

Jika A matriks $n \times n$, maka pernyataan berikut adalah ekivalen

1. *A dapat dibalik*
2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial*
3. *Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n*
4. *A dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari matriks-matriks elementer*
5. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks $\mathbf{b}$, $n \times 1$.*
6. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks $\mathbf{b}$, $n \times 1$.*

2.3 Masalah Fundamental

Theorem

Misal A dan B matriks-matriks bujursangkar dengan ukuran yang sama. Jika AB dapat dibalik, maka A dan B masing-masing juga harus dapat dibalik.

Masalah Fundamental

Misalkan A adalah sebarang matriks $m \times n$. Tentukan semua matriks $\mathbf{b}$, $m \times 1$, sedemikian sehingga sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten.

Example

Tentukan syarat yang harus dipenuhi b_1, b_2, dan b_3 agar sistem berikut konsisten.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

2.3 Masalah Fundamental

Solution

Matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -B1 + B2 \\ -2B1 + B3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \quad -B2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \qquad B2 + B3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

2.3 Masalah Fundamental

Solution

Berdasarkan matriks terakhir yang telah direduksi, nampak bahwa sistem hanya akan memiliki solusi jika dan hanya jika **b** *adalah matriks dengan bentuk*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

Example

Tentukan syarat yang harus dipenuhi b_1, b_2, dan b_3 agar sistem berikut konsisten.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

2.3 Masalah Fundamental

Solution

Matriks yang diperbesar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Dengan meredkusi matriks tersebut ke bentuk eselon baris tereduksi, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini tidak ada batasan terhadap b_1, b_2, dan b_3. Sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki solusi unik

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3; \; x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3; \; \textit{dan} \; x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3$$

2.3 Latihan 6

1. Selesaikan sistem berikum dengan melakukan inversi matriks terhadap matriks koefisien

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. Tentukan syarat yang harus dipenuhi dipenuhi b_1, b_2, dan b_3 agar sistem berikut konsisten.

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

3. Selesaikan sistem-sistem berikut secara srimultan

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned} \;;\quad \text{a)}\quad \begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 1 \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} b_1 &= -3 \\ b_2 &= 4 \\ b_3 &= -5 \end{aligned}$$