ALJABAR LINEAR VEKTOR DAN MATRIKS

Semester Genap 2016-2017

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

Maret 2017

2.1 Fungsi Determinan

- Pada bab ini akan dibahas tentang **Fungsi Determinan** yang merupakan fungsi dari suatu variabel matriks dengan nilai real yang mengasosiasikan suatu bilangan real $f(X)$ dengan suatu matriks bujursangkar X.

2.1 Fungsi Determinan

- Pada bab ini akan dibahas tentang **Fungsi Determinan** yang merupakan fungsi dari suatu variabel matriks dengan nilai real yang mengasosiasikan suatu bilangan real $f(X)$ dengan suatu matriks bujursangkar X.
- Teorema sebelumnya menyatakan bahwa, matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2.1 Fungsi Determinan

- Pada bab ini akan dibahas tentang **Fungsi Determinan** yang merupakan fungsi dari suatu variabel matriks dengan nilai real yang mengasosiasikan suatu bilangan real $f(X)$ dengan suatu matriks bujursangkar X.
- Teorema sebelumnya menyatakan bahwa, matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$. Pernyataan $ad - bc$ disebut **determinan** dari matriks A dan dinyatakan $\det(A)$.

- Pada bab ini akan dibahas tentang **Fungsi Determinan** yang merupakan fungsi dari suatu variabel matriks dengan nilai real yang mengasosiasikan suatu bilangan real $f(X)$ dengan suatu matriks bujursangkar X.
- Teorema sebelumnya menyatakan bahwa, matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$. Pernyataan $ad - bc$ disebut **determinan** dari matriks A dan dinyatakan $\det(A)$.
- Dengan notasi ini, rumus A^{-1}yang dinyatakan sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2.1 Fungsi Determinan

- Pada bab ini akan dibahas tentang **Fungsi Determinan** yang merupakan fungsi dari suatu variabel matriks dengan nilai real yang mengasosiasikan suatu bilangan real $f(X)$ dengan suatu matriks bujursangkar X.
- Teorema sebelumnya menyatakan bahwa, matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$. Pernyataan $ad - bc$ disebut **determinan** dari matriks A dan dinyatakan $\det(A)$.
- Dengan notasi ini, rumus A^{-1}yang dinyatakan sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Selanjutnya kita akan menemukan analog dari rumus ini untuk matriks bujursangkar dengan ordo lebih tinggi.

2.1 Fungsi Determinan

Definition (Permutasi)

Permutasi dari himpunan bilangan bulat atau integer $\{1, 2, ..., n\}$ adalah susunan integer-integer ini menurut suatu aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan.

Example (1 Permutasi dari Tiga Integer)

Untuk himpunan integer $\{1, 2, 3\}$ terdapat 6 permutasi yang berbeda, yaitu

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) \end{array}$$

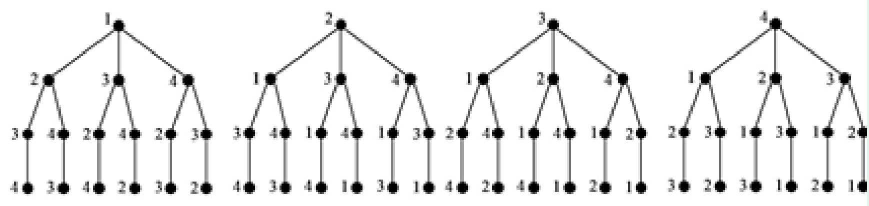
Cara mudah untuk menyusun daftar permutasi secara sistematis dapat menggunakan **Pohon Permutasi**. Metode ini digunakan pada contoh berikut.

Example (2 Permutasi dari Empat Integer)

Buatlah daftar permutasi dari dari himpunan integer $\{1, 2, 3, 4\}$

Solution

Solusi dari permasalahan ini dapat dipecahkan dengan pohon permutasi sebagai berikut



Solution (Lanjutan)

Dengan cara ini, diperoleh:

$$\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3) \\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2) \\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3) \\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1) \\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2) \\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array}$$

- Terdapat **24** permutasi untuk $\{1,2,3,4\}$.

Solution (Lanjutan)

Dengan cara ini, diperoleh:

$$\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3) \\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2) \\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3) \\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1) \\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2) \\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array}$$

- Terdapat **24** permutasi untuk $\{1,2,3,4\}$.
- Karena posisi pertama diisi dengan 4 cara dan posisi kedua dengan 3 cara, maka terdapat $4 \cdot 3$cara untuk mengisi dua posisi pertama.

Solution (Lanjutan)

Dengan cara ini, diperoleh:

$$\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3) \\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2) \\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3) \\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1) \\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2) \\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array}$$

- Terdapat **24** permutasi untuk $\{1, 2, 3, 4\}$.
- Karena posisi pertama diisi dengan 4 cara dan posisi kedua dengan 3 cara, maka terdapat $4 \cdot 3$cara untuk mengisi dua posisi pertama.
- Selanjutnya karena posisi ketiga dapat diisi dengan 2 cara, maka terdapat $4 \cdot 3 \cdot 2$ untuk mengisi tiga posisi pertama.

2.1 Fungsi Determinan

- Posisi terakhir hanya dapat diisi dengan 1 cara, maka terdapat $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ cara untuk mengisi seluruh posisi.

Corollary

Secara umum, himpunan $\{1, 2, ..., n\}$ *akan memiliki* $\mathbf{n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 = n!}$ *permutasi yang berbeda.*

Problem (Menghitung Inversi)

Misal permutasi umum dari himpunan $\{1, 2, ..., n\}$ *adalah* $(j_1, j_2, ..., j_n)$. j_1 *adalah integer pertama dari permutasi,* j_2 *adalah integer kedua dari permutasi dan seterusnya.*
Inversi *atau* **Pembalikan** *dikatakan terjadi dalam suatu permutasi* $(j_1, j_2, ..., j_n)$ *jika integer yang lebih besar mendahului integer yang lebih kecil.*
Total inversi *adalah banyaknya bilangan-bilangan integer yang lebih kecil dan yang mengikutinya dalam permutasi tersebut.*

2.1 Fungsi Determinan

Example

Tentukan banyaknya inversi pada permutasi-permutasi berikut

a) $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$

b) $(2, 4, 1, 3)$

c) $(1, 2, 3, 4)$

Solution

a) Banyaknya inversi adalah $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$

b) Banyaknya inversi adalah $1 + 2 + 0 = 3$

c) Tidak ada inversi

Definition (Permutasi Genap dan Permutasi Ganjil)

Suatu permutasi dikatakan **genap** jika total banyaknya inversi adalah integer genap dan dikatakan **ganjil** jika total banyaknya inversi adalah integer ganjil.

Example

Tabel berikut mengklasifikasikan berbagai permutasi dari $\{1, 2, 3\}$ sebagai genap dan ganjil

Permutasi	**Banyaknya Inversi**	**Klasifikasi**
$(1, 2, 3)$	0	Genap
$(1, 3, 2)$	1	Ganjil
$(2, 1, 3)$	1	Ganjil
$(2, 3, 1)$	2	Genap
$(3, 1, 2)$	2	Genap
$(3, 2, 1)$	3	Ganjil

Definition (Hasil Kali Elementer)

Hasil Kali Elementer dari suatu matriks A, $n \times n$ yaitu hasil kali n entri dari A, yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Example

Buatlah daftar semua hasil kali elementer dari matriks-matriks berikut:

a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Solution

a) *Hasilkali elementer memiliki dua faktor dari baris yang berbeda dapat ditulis*

$$a_{1\ldots}a_{2\ldots}$$

Selanjutnya, nomor kolom yang memungkinkan hanya 1 2 *atau* 2 1, *sehingga hasilkali elementer adalah*

$$a_{11}a_{22} \text{ dan } a_{12}a_{21}$$

Solution

b) Hasilkali elementer memiliki tiga faktor dari baris yang berbeda, dapat ditulis dalam bentuk

$$a_{1\ldots}a_{2\ldots}a_{3\ldots}$$

Selanjutnya, kemungkinan nomor kolom akan membentuk permutasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$.
Permutasi $3! = 6$ *menghasilkan daftar hasilkali elementer berikut:*

$$\begin{array}{ccc} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{21}a_{33} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Dengan demikian, suatu matriks $\mathbf{A}$ ordo $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ memiliki $\mathbf{n}!$ hasil kali elementer. Hasilkali elementer tersebut adalah hasil kali berbentuk

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$$

dimana $(j_1, j_2, ..., j_n)$ adalah permutasi dari himpunan $\{1, 2, ..., n\}$.

2.1 Fungsi Determinan

Definition (Hasilkali Elementer Bertanda)

Hasilkali Elementer Bertanda adalah hasilkali elementer $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ dikalikan ± 1. Tanda $+1$ digunakan jika $(j_1, j_2, ..., j_n)$ adalah **permutasi genap** sedangkan tanda $+1$ digunakan jika $(j_1, j_2, ..., j_n)$ adalah **permutasi ganjil.**

Example

Buatlah daftar semua hasil kali elementer dari matriks-matriks berikut:

$a)$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad$ $b)$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Solution

	Hasilkali Elementer	Permutasi	Genap Ganjil	HE Bertanda
$a)$	$a_{11}a_{22}$	$(1,2)$	*genap*	$a_{11}a_{22}$
	$a_{12}a_{21}$	$(2,1)$	*ganjil*	$-a_{12}a_{21}$

Solution

b)

Hasilkali Elementer	Permutasi	Genap Ganjil	HE Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$(1,2,3)$	*genap*	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	$(1,3,2)$	*ganjil*	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	$(2,1,3)$	*ganjil*	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$(2,3,1)$	*genap*	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$(3,1,2)$	*genap*	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	$(3,2,1)$	*ganjil*	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definition (Determinan)

Misal A matriks bujursangkar. **Determinan** dari matriks A dinotasikan $\det(A)$ adalah jumlah dari semua **hasilkali elementer bertanda** dari matriks A.

2.1 Fungsi Determinan

Example

Berdasarkan contoh sebelumnya, kita peroleh

a) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Example

Hitung determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$\det(A) = [(-2 \cdot 1 \cdot 4) + (7 \cdot -2 \cdot 3) + (6 \cdot 5 \cdot 8)] - [(6 \cdot 1 \cdot 3) + (-2 \cdot -2 \cdot 8)$$

$$= (-8 - 42 + 240) - (18 + 32 + 140) = 190 - 190 = 0$$

Problem (Latihan 2.1)

1. *Hitung determinan matriks berikut*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. *Tentukan nilai λ jika* $\det(A) = 0$

$$a)\ A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

3. *Kelompokkan setiap permutasi dari* $\{1, 2, 3, 4\}$ *sebagai genap atau ganjil*
4. *Gunakan hasil nomor* 3 *untuk menyusun rumus determinan matriks* 4×4
5. *Gunakan rumus nomor* 4 *untuk menghitung*

$$\begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

2.2 Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

- Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa determinan matriks bujursangkar dapat dihitung dengan mereduksi baris menjadi bentuk eselon baris.
- Metode ini penting karena kita tidak perlu melakukan perhitungan panjang sebagaimana jika digunakan definisi determinan secara langsung.

Theorem

Misalkan A suatu matriks bujursangkar.
a) Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$
b) $\det(A) = \det\left(A^T\right)$

Theorem

Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka $\det(A)$ *adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu* $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

2.2 Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Example

Determinan dari matriks segitiga atas

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (2)\,(-3)\,(6)\,(9)\,(4) = -1296$$

Theorem (OBE dan Determinan)

Misal A dan B matriks bujursangkar.

a) *Jika B diperoleh dengan menukarkan dua baris atau kolom pada A, maka* $\det(B) = -\det(A)$

b) *Jika B diperoleh dengan menambahkan kelipatan satu baris atau ke baris atau kolom yang lainnya pada A, maka* $\det(B) = \det(A)$

c) *Jika B diperoleh dengan mengalikan satu baris atau kolom pada A dengan suatu skalar k, maka* $\det(B) = k\ \det(A)$

Example

Hitung determinan matriks berikut dengan **Operasi Baris** Elementer

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-7)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (7)(1)(1)(-1) = -7$$

Example

Hitung determinan matriks berikut dengan **Operasi Kolom** Elementer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} \\ &= (1)(7)(3)(-26) \\ &= -546 \end{aligned}$$

2.2 Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Theorem (Determinan Nol)

Jika A matriks bujursangkar dan memenuhi salah satu kondisi berikut, maka $\det(A) = 0$

a) *Terdapat satu baris (kolom) yang seluruh entrinya adalah nol*

b) *Terdapat dua baris (kolom) yang entri-entrinya identik*

c) *Terdapat baris (kolom) yang merupakan kelipatan dari baris (kolom) lain*

Example

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua matriks berikut diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 18 & 4 \end{bmatrix}$$

Karena baris ketiga merupakan kelipatan dari baris kedua, maka $\det(A) = 0$

2.2 Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Problem (Latihan 2.2)

1. *Buktikan bahwa* $\det(A) = \det(A^T)$ *untuk:*

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2. *Hitung determinan matriks berikut dengan reduksi bentuk eselon baris*

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. *Gunakan reduksi baris untuk menunjukkan bahwa*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Theorem (Sifat Dasar Determinan)

Jika A matriks bujursangkar ukuran $n \times n$ dan k skalar sebarang, maka

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

Proof.

Cukup jelas dari Teorema sebelumnya bahwa faktor bersama dari suatu matriks dapat dikeluarkan melewati tanda matriks, dan tiap baris dari n baris pada kA memiliki faktor bersama k, sehingga $|kA| = k^n |A|$. Sebagai contoh

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

□

Example

Hitung determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 40 \\ 30 & 0 & 50 \\ -20 & -30 & 10 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Karena $A = 10 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$

Maka $|A| = 10^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \cdot 5 = 5000$

Perlu dicatat bahwa hubungan $\det(A + B)$ biasanya *tidak sama* dengan $\det(A) + \det(B)$. Secara umum berlaku hubungan $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

Example

Jika $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, maka

$|A| = 2$ dan $|B| = -3$ namun $|A + B| = \begin{vmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -18$

Theorem (Uji Determinan untuk Keterbalikan)

Suatu matriks bujursangkar A dapat dibalik (nonsingular) jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Example

Tunjukkan apakah matriks berikut mempunyai invers atau tidak

$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $b)\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2.3 Sifat-Sifat Fungsi Determinan

Solution

a) *Karena* $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$

maka matriks A tidak punya invers (singular)

b) *Karena* $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$

maka matriks B punya invers (nonsingular)

Theorem (Determinan Hasilkali Matriks)

Jika A dan B matriks bujursangkar ukuran $n \times n$, maka

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Example

Tunjukkan bahwa $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$ jika diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Silahkan buktikan bahwa

$$\det(A) = -7, \quad \det(B) = 11, \quad \text{dan} \quad \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -77$$

Sehingga $|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$

$$(-7)(11) = -77$$

Theorem (Determinan Invers Matriks)

Jika A memiliki invers, maka $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Proof.

Karena A memiliki invers, maka $AA^{-1} = I$, sehingga
$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$,
Karena $\det(A) \neq 0$, setiap ruas dapat dibagi $\det(A)$ sehingga
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. $\square$

Example

Hitung $\det(A^{-1})$ dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Karena $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$, maka $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{4}$

Theorem (Beberapa Pernyataan yang Akuivalen)

Jika A matriks $n \times n$, maka pernyataan berikut akuivalen:

1. *A dapat dibalik*
2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks $\mathbf{b}$, $n \times 1$*
3. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya memiliki solusi trivial*
4. *Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n*
5. *A dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari matriks-matriks elementer*
6. $\det(A) \neq 0$

Problem (Latihan 2.3)

1. *Buktikan bahwa* $\det(kA) = k^n \det(A)$ *untuk matriks*

$a)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ k = 2 \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix};\ k = -2,$

Problem (Latihan 2.3, Lanjutan)

2. *Buktikan bahwa* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ *untuk*
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. *Manakah dari matriks berikut yang dapat dibalik*
$$a)\ A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$
4. *Tentukan nilai* k *agar matriks* M *dapat dibalik*
$$a)\ M = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix} \qquad b)\ M = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -2 & 0 & -k \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

2.4 Pengantar Nilai Eigen

- Banyak aplikasi aljabar linear yang melibatkan sistem dengan n persamaan linear dan n faktor yang tidak diketahui, dinyatakan dalam bentuk

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

2.4 Pengantar Nilai Eigen

- Banyak aplikasi aljabar linear yang melibatkan sistem dengan n persamaan linear dan n faktor yang tidak diketahui, dinyatakan dalam bentuk
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$
- A matriks $n \times n$, $\mathbf{x}$ matriks taknol $n \times 1$, dan λ adalah skalar.

2.4 Pengantar Nilai Eigen

- Banyak aplikasi aljabar linear yang melibatkan sistem dengan n persamaan linear dan n faktor yang tidak diketahui, dinyatakan dalam bentuk

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- A matriks $n \times n$, $\mathbf{x}$ matriks taknol $n \times 1$, dan λ adalah skalar.
- Sistem ini merupakan bentuk samar dari sistem linear homogen yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

atau dengan menyisipkan suatu matriks identitas kemudian difaktorkan menjadi

$$(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

2.4 Pengantar Nilai Eigen

- Banyak aplikasi aljabar linear yang melibatkan sistem dengan n persamaan linear dan n faktor yang tidak diketahui, dinyatakan dalam bentuk
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$
- A matriks $n \times n$, $\mathbf{x}$ matriks taknol $n \times 1$, dan λ adalah skalar.
- Sistem ini merupakan bentuk samar dari sistem linear homogen yang dapat dinyatakan dalam bentuk
$$\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
atau dengan menyisipkan suatu matriks identitas kemudian difaktorkan menjadi
$$(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
- Dalam hal ini $\det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$ disebut **persamaan karakteristik** dari A, λ disebut **nilai eigen** dari A, dan $\mathbf{x}$ disebut **vektor eigen** dari A yang bersesuaian dengan λ.

2.4 Pengantar Nilai Eigen

Example

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

Jadi, nilai eigen dari A adalah $\lambda = -1$ *dan* $\lambda = 5$

Solution

Untuk menemukan vektor eigen yang bersesuaian, selesaikan sistem linear homogen $(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *yaitu*

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = -1$, *diperoleh*

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini diperoleh $x_1 = 2t, x_2 = -t$ (*buktikan*), *sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan* $\lambda = -1$ *adalah solusi taknol berbentuk*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solution

Untuk $\lambda = 5$, *diperoleh*

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi bentuk $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, *diperoleh* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dengan demikian diperoleh $x_1 = t, x_2 = t$, *sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan* $\lambda = 5$ *adalah solusi taknol berbentuk*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Example

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari

$$\text{matriks} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, nilai eigen dari A adalah $\lambda = -1, \lambda = 1$ dan $\lambda = 3$

Temukan vektor eigen yang bersesuaian untuk masing-masing λ.

Problem (Latihan 2.4)

1. *Tunjukkan bahwa λ_i merupakan nilai eigen dari A dan $\mathbf{x}_i$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian*

   $a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 1,\ x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_2 = -3,\ x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   $b)\ A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 5,\ x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = 1,\ x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. *Temukan* **persamaan karakteristik, nilai eigen, dan vektor eigen** *dari matriks berikut*

   $a)\ A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $b)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Definition (Minor dan Kofaktor)

Jika A matriks bujursangkar, maka **minor** M_{ij} dari entri a_{ij} didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A setelah baris ke-**i** dan kolom ke-**j** dihilangkan, sedangkan **kofaktor** C_{ij} dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

Example

Jika A matriks 3×3, maka minor dari entri a_{21} dan a_{22} ditunjukkan pada diagram berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sementara kofaktor adalah

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = -M_{21} \qquad dan \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{21} = M_{21}$$

2.5 Ekspansi Kofaktor, Aturan Crammer

Perlu diperhatikan bahwa **kofaktor** dan **minor** dari suatu entri a_{ij} hanya berbeda pada tandanya. Untuk mendapatkan **kofaktor** pada suatu matriks, pertama tentukan **minor** kemudian gunakan tanda $+$ dan $-$ mengikuti pola berikut

Matriks 3×3

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriks 4×4

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriks $n \times n$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sebagai **catatan** bahwa, tanda $+$(**positif**) terjadi saat $(i+j)$ **genap**, sedangkan tanda $-$(**negatif**) terjadi saat $(i+j)$ **ganjil.**

Example

$C_{11} = M_{11}, \; C_{21} = -M_{21}, \;\; C_{12} = -M_{12}, \;\;\; C_{22} = M_{22},$ dan seterusnya.

Example

Hitung semua Minor dan Kofaktor dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1, \quad C_{11} = M_{11} = -1$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5, \quad C_{12} = -M_{11} = -(-5) = 5$$

Lakukan cara yang sama sehingga diperoleh

$$\begin{array}{llllll} M_{11} = -1 & M_{12} = -5 & M_{13} = \ 4 & C_{11} = -1 & C_{12} = \ 5 & C_{13} = \ 4 \\ M_{21} = \ 2 & M_{22} = -4 & M_{23} = -8 & C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = \ 8 \\ M_{31} = \ 5 & M_{32} = -3 & M_{33} = -6 & C_{31} = \ 5 & C_{32} = \ 3 & C_{33} = -6 \end{array}$$

Definition (Determinan Matriks)

Jika A matriks bujursangkar (Orde 2 atau lebih), maka **determinan A** adalah jumlah dari hasil kali setiap entri dengan kofaktor-kofaktornya dalam satu baris (kolom) dari matriks A.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n}$$

Example

Hitung determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

Berdasarkan contoh sebelumnya, ditemukan kofaktor dari entri baris pertama, yaitu
$C_{11} = -1,$
$C_{12} = 5,$ *dan*
$C_{13} = 4$
Berdasarkan definisi, maka $|A| = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 14$
Cara ini disebut **Ekspansi Kofaktor** *di sepanjang baris pertama.*
Ekspansi kofaktor *untuk mendapatkan determinan matriks dapat dilakukan sepanjang baris atau kolom yang lainnya.*

2.5 Ekspansi Kofaktor, Aturan Crammer

Definition (Ekspansi Kofaktor)

Misal A matriks bujursangkar dengan orde-n. Determinan matriks A dapat dihitung dengan **Ekspansi Kofaktor** sepanjang baris ke$-i$ atau sepanjang kolom ke$-j$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

atau

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Catatan: Kofaktor dari entri nol adalah nol, sehingga anda dapat menemukan cara cepat menghitung determinan dengan melakukan ekspansi kofaktor disepanjang baris atau kolom yang paling banyak memuat entri nol.

Example

Hitung determinan dari matriks berikut dengan melakukan ekspansi kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solution

Ekspansi kofaktor pertama disepanjang kolom 3,

$$\begin{aligned} |A| &= 3C_{13} + 0C_{23} + 0C_{33} + 0C_{43} \\ &= 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Solution

Sekspansi kofaktor kedua dilakukan disepanjang kolom 1, sehingga

$$\begin{aligned} |A| &= 3\left(-1 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 3 \cdot C_{31}\right) \\ &= 3\left(-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) \\ &= 3\left(16 - 3\right) \\ &= 39 \end{aligned}$$

Definition (Adjoin Matriks)

Jika A matriks $n \times n$ dan C_{ij} kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut **matriks kofaktor dari A**. Transpos dari matriks kofaktor A disebut **adjoin dari A** dan dinyatakan sebagai $\mathbf{adj}(\mathbf{A})$.

Example

Temukan adjoin dari matriks A 3×3 berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

Dari contoh sebelumnya diperoleh kofaktor-kofaktor dari matriks A

$$\begin{array}{lllll} C_{11} = -1 & C_{12} = \ \ 5 & C_{13} = \ 4 & C_{31} = \ 5 & C_{33} = -6 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = \ 8 & C_{32} = \ 3 & \end{array}$$

sehingga matriks kofaktor A adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Adjoin dari A adalah transpos matriks kofaktor, yaitu

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Theorem (Invers Matriks dengan Adjoin)

Jika A matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Proof.

Bukti diserahkan sebagai latihan □

Example

Gunakan adjoin untuk menentukan invers dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

Dengan ekspansi kofaktor diperoleh $\det(A) = 14$, *sehingga*

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} adj(A) \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Theorem (Aturan Cramer)

Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *adalah sistem dari n persamaan linear dan n faktor yang tidak diketahui sedemikian sehingga* $\det(A) \neq 0$, *maka sistem ini memiliki solusi yang unik, yaitu*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dimana A_j *adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri*

pada kolom ke$-j$ *dari* A *dengan entri-entri pada matriks*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Example

Gunakan **Aturan Cramer** untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

Solution

Dari sistem persamaan diperoleh matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad dan \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Solution

Dari A dan $\mathbf{b}$, *diperoleh*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \; dan \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11} \\ x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \\ x_3 &= \frac{\det(A_n)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11} \end{aligned}$$

Problem (Latihan 2.5)

1. *Hitung semua* **minor** *dan* **kofaktor** *dari matriks berikut*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. *Hitung determinan matriks pada soal nomor 1 dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang* **kolom 1, kolom 3, baris 1,** *dan* **bari 4***. Bandingkan hasilnya.*

3. *Hitung invers dari matriks pada nomor 1 dengan terlebih dahulu menentukan adjoinnya.*

Problem

4 *Gunakan* **Aturan Cramer** *untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & & & + & 6x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 12x_4 & = & -2 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \end{array}$$