ALJABAR LINEAR VEKTOR DAN MATRIKS

Semester Genap 2016-2017

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

Matematika 2017

3.1 Pengantar Vektor

3.1.1 Vektor Geometrik

- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas*, *panjang*, *massa*, *suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.

- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas*, *panjang*, *massa*, *suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.
- Besaran-besaran yang disertai dengan arah disebut sebagai **vektor**. Sebagai contoh;

- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas*, *panjang*, *massa*, *suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.
- Besaran-besaran yang disertai dengan arah disebut sebagai **vektor**. Sebagai contoh;
  - Sebuah kendaraan bergerak dengan kecepatan 70 km/jam ke arah barat. Kecepatan dan arah kendaraan ini membetuk sebuah vektor yang disebut **kecepatan** kendaraan.

- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas*, *panjang*, *massa*, *suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.
- Besaran-besaran yang disertai dengan arah disebut sebagai **vektor**. Sebagai contoh;
  - Sebuah kendaraan bergerak dengan kecepatan 70 km/jam ke arah barat. Kecepatan dan arah kendaraan ini membetuk sebuah vektor yang disebut **kecepatan** kendaraan.
  - Contoh lain dapat kita jumpai saat sebuah meja didorong dengan gaya tertentu sehingga mengalami pergeseran tempat. Dalam kasus seperti ini dapat dijumpai sebuah vektor **gaya** dan **pergeseran**.

- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas, panjang, massa, suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.
- Besaran-besaran yang disertai dengan arah disebut sebagai **vektor**. Sebagai contoh;
  - Sebuah kendaraan bergerak dengan kecepatan 70 km/jam ke arah barat. Kecepatan dan arah kendaraan ini membetuk sebuah vektor yang disebut **kecepatan** kendaraan.
  - Contoh lain dapat kita jumpai saat sebuah meja didorong dengan gaya tertentu sehingga mengalami pergeseran tempat. Dalam kasus seperti ini dapat dijumpai sebuah vektor **gaya** dan **pergeseran**.
- Secara **simbolis**, vektor dapat dinyatakan dengan huruf kecil tebal seperti **a**, **b**, **c**, **x**, **y**, **z**, atau huruf lainnya.

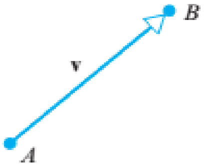
- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas, panjang, massa, suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.
- Besaran-besaran yang disertai dengan arah disebut sebagai **vektor**. Sebagai contoh;
  - Sebuah kendaraan bergerak dengan kecepatan 70 km/jam ke arah barat. Kecepatan dan arah kendaraan ini membetuk sebuah vektor yang disebut **kecepatan** kendaraan.
  - Contoh lain dapat kita jumpai saat sebuah meja didorong dengan gaya tertentu sehingga mengalami pergeseran tempat. Dalam kasus seperti ini dapat dijumpai sebuah vektor **gaya** dan **pergeseran**.
- Secara **simbolis**, vektor dapat dinyatakan dengan huruf kecil tebal seperti **a**, **b**, **c**, **x**, **y**, **z**, atau huruf lainnya.
- Secara **geometrik**, sebuah vektor dapat dinyatakan sebagai ruas garis terarah atau anak panah pada bidang dan ruang.

- Sejumlah besaran beserta kuantitasnya seperti *luas, panjang, massa, suhu*, dan sejenisnya dapat kita sebut sebagai **skalar**.
- Besaran-besaran yang disertai dengan arah disebut sebagai **vektor**. Sebagai contoh;
  - Sebuah kendaraan bergerak dengan kecepatan 70 km/jam ke arah barat. Kecepatan dan arah kendaraan ini membetuk sebuah vektor yang disebut **kecepatan** kendaraan.
  - Contoh lain dapat kita jumpai saat sebuah meja didorong dengan gaya tertentu sehingga mengalami pergeseran tempat. Dalam kasus seperti ini dapat dijumpai sebuah vektor **gaya** dan **pergeseran**.
- Secara **simbolis**, vektor dapat dinyatakan dengan huruf kecil tebal seperti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z},$ atau huruf lainnya.
- Secara **geometrik**, sebuah vektor dapat dinyatakan sebagai ruas garis terarah atau anak panah pada bidang dan ruang.
- Arah anak panah menunjukkan **arah vektor** sedangkan panjang anak panah menunjukkan **besaran vektor**.

Jika sebuah vektor **v** mempunyai titik awal A dan titik akhir B, maka vektor **v** dapat ditulis

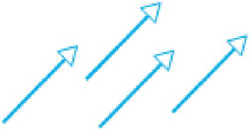
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

dan secara geometris direpresentasikan



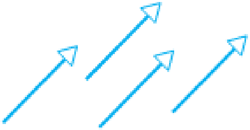
Gambar 3.1.1a

- Vektor dengan arah dan ukuran sama disebut **ekuivalen** dan dinyatakan setara walaupun terletak pada posisi yang berbeda (Gambar 3.1.1b)



Gambar 3.1.1b

- Vektor dengan arah dan ukuran sama disebut **ekuivalen** dan dinyatakan setara walaupun terletak pada posisi yang berbeda (Gambar 3.1.1b)



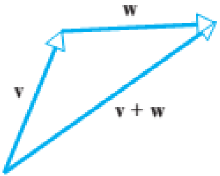
Gambar 3.1.1b

- Dua buah vektor **v** dan **w** yang ekuivalen dinyatakan

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Definition (Jumlah Vektor Metode Segitiga)

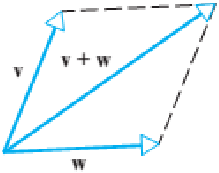
Jika **v** dan **w** adalah sebarang vektor yang diletakkan sedemikian sehingga titik akhir **v** berhimpit dengan titik awal **w**, maka **jumlah vektor v + w** direpresentasikan dengan anak panah dari titik awal **v** hingga titik akhir **w**.**(**Gambar 3.1.1c**)**



Gambar 3.1.1c

Definition (Jumlah Vektor Metode Jajar Genjang)

Jika **v** dan **w** adalah sebarang vektor yang diletakkan sedemikian sehingga titik awalnya saling berhimpit dan masing-masing ujungnya dihubungkan dengan bayangan vektor selainnya, maka **jumlah vektor** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ direpresentasikan dengan anak panah yang berhimpit dengan garis diagonal jajar genjang.**(**Gambar 3.1.1d**)**



Gambar 3.1.1d

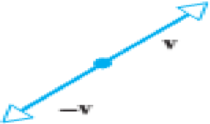
Definition (Vektor Nol dan Negatif)

Vektor nol adalah vektor dengan panjang nol dan dinyatakan sebagai $\mathbf{0}$. Secara geometrik vektor nol dapat direpresentasikan dengan sebuah titik. Vektor nol memiliki sifat

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

Jika $\mathbf{v}$ sebarang vektor taknol, maka $-\mathbf{v}$ adalah **bentuk negatif** dari $\mathbf{v}$ dan didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan $\mathbf{v}$ namun memiliki arah yang berlawanan (Gambar 3.1.1e). Vektor ini memiliki sifat

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$



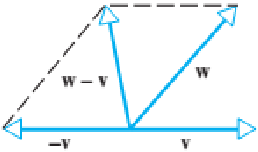
Gambar 3.1.1e

Definition (Selisih Vektor)

Jika $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah dua vektor sebarang, maka **selisih v** dari **w** didefinisikan sebagai

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$$

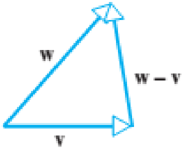
(Gambar 3.1.1f)



Gambar 3.1.1f

Definition (Selisih Vektor)

Tanpa menggambar $-\mathbf{v}$, jika $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah sebarang vektor yang diletakkan sedemikian sehingga titik awalnya saling berhimpit, maka **selisih v** dari **w** adalah vektor yang terbentuk dari titik akhir **v ke titik akhir w. (**Gambar 3.1.1g).



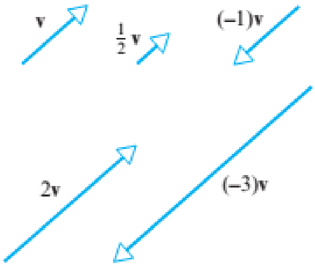
Gambar 3.1.1g

Definition (Kelipatan Skalar)

Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor taknol dan k skalar taknol, maka **hasilkali** $k\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang $\mathbf{v}$.
Jika $k > 0$, maka arahnya sama dengan $\mathbf{v}$,
Jika $k < 0$, maka arahnya berlawanan dengan $\mathbf{v}$,
Jika $k = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, maka $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Vektor $k\mathbf{v}$ disebut **kelipatan skalar** dari $\mathbf{v}$.

Example

Perhatikan Gambar 3.1.1h sebagai ilustrasi hubungan antara vektor **v** dan vektor-vektor $\frac{1}{2}\mathbf{v}$, $(-1)\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}$, dan $(-3)\mathbf{v}$.



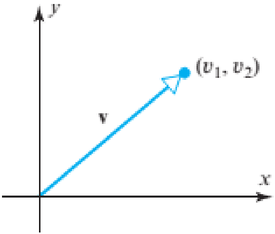
Gambar 3.1.1h

3.1.2 Vektor pada Ruang Berdimensi Dua

Misal $\mathbf{v}$ adalah sebarang vektor yang ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpit dengan titik asal **sistem koordinat** siku-siku. Koordinat (v_1, v_2) dari titik akhir $\mathbf{v}$ disebut **komponen v**, ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

Perhatikan Gambar 3.1.2a



Gambar 3.1.2a

Ekuivalen

Dua vektor ekuivalen secara geometris akan diletakkan saling berhimpit pada bidang koordinat karena mempunyai besaran dan arah yang sama. Dua vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

dikatakan **akuivalen** jika dan hanya jika

$$v_1 = w_1 \text{ dan } v_2 = w_2$$

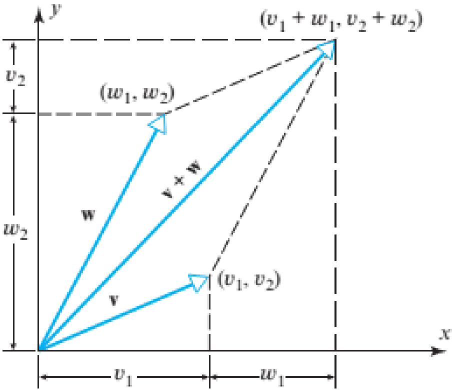
Penjumlahan dan Perkalian Skalar

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ sebarang vektor dan k adalah sebarang skalar, maka

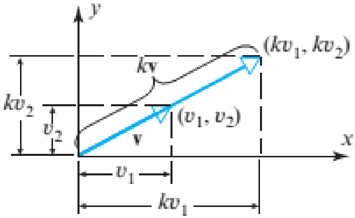
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$$

Gambar 3.1.2b dan Gambar 3.1.2c



Gambar 3.1.2b



Gambar 3.1.2c

Example

Jika $\mathbf{v} = (1, -2)$, $\mathbf{w} = (7, 6)$, dan $k = 4$, maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

$$k\mathbf{v} = 4\,(1, -2) = (4, -8)$$

Pengurangan Vektor

Karena $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$, maka

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$$

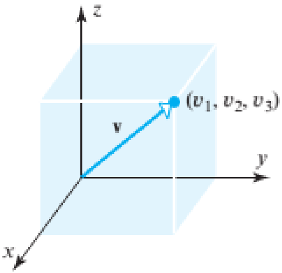
Tugas anda membuktikan bahwa hubungan ini berlaku.

3.1 Pengantar Vektor

3.1.3 Vektor pada Ruang Berdimensi Tiga

Misal **v** adalah sebarang vektor yang ditempatkan sedemikian sehingga titik awalnya berhimpit dengan titik asal **sistem koordinat** siku-siku. Sebagaimana pada Gambar 3.1.3a, koordinat pada titik akhir **v** disebut **komponen v**, ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$



Gambar 3.1.3a

Ekuivalen
Dua vektor ekuivalen secara geometris akan diletakkan saling berhimpit pada bidang koordinat karena mempunyai besaran dan arah yang sama. Dua vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

dikatakan **akuivalen** jika dan hanya jika

$$v_1 = w_1 \text{ , } v_2 = w_2 \text{ dan } v_3 = w_3$$

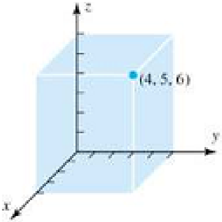
Penjumlahan dan Perkalian Skalar
Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ sebarang vektor dan k adalah sebarang skalar, maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

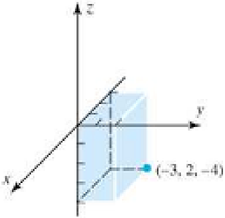
$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

Contoh

Gambar berikut adalah tampilan vektor $(4, 5, 6)$ dan $(-3, 2, -4)$ dalam ruang berdimensi 3.



(a)



(b)

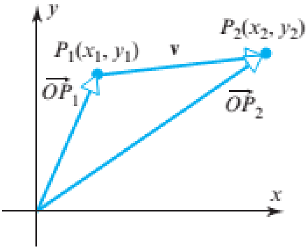
3.1 Pengantar Vektor

3.1.4 Menentukan Komponen Vektor

Pada kondisi tertentu, suatu vektor diletakkan sedemikian sehingga titik awalnya tidak terletak pada titik asal. Jika vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ memiliki titik awal $P_1(x_1, y_1)$ dan titik akhir $P_2(x_2, y_2)$, maka

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Secara geometrik ditampilkan pada Gambar 3.1.4



Gambar 3.1.4

Example

Komponen vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ dengan titik awal $P_1(2, -1, 4)$ dan titik akhir $P_2(7, 5, -8)$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (7, 5, -8) - (2, -1, 4) \\ &= (7-2, 5-(-1), -8-4) \\ &= (5, 6, -12) \end{aligned}$$

Problem (Latihan 3.1)

1. *Buatlah sketsa dari vektor berikut dimana titik awalnya terletak pada titik asal* $a)\ \mathbf{v}_1 = (3, 4, 5)$ $\quad b)\ \mathbf{v}_2 = (3, -4, 5)$
2. *Misal* $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ *dan* $\mathbf{w} = (6, -1, 4)$. *Tentukan komponen-komponen dari* $a)\ 5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$ $\quad b)\ (2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$
3. *Misal vektor-vektor pada soal no.2. Tentukan komponen vektor* $\mathbf{x}$ *yang memenuhi* $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{7x} + \mathbf{w}$
4. *Misal vektor-vektor pada soal no.2. Tentukan skalar* c_1, c_2 *dan* c_3 *yang memenuhi sehingga* $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (2, 0, 4)$
5. *Tentukan vektor taknol* $\mathbf{u}$ *dengan titik awal* $P(-1, 3, 5)$ *sehingga* $\mathbf{u}$ *searah dengan* $\mathbf{v} = (6, 7, 3)$. *Lakukan hal yang sama agar* $\mathbf{u}$ *berlawanan arah dengan* $\mathbf{v}$.
6. *Tentukan vektor taknol* $\mathbf{u}$ *dengan titik akhir* $Q(3, 0, -5)$ *sehingga* $\mathbf{u}$ *searah dengan* $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$. *Lakukan hal yang sama agar* $\mathbf{u}$ *berlawanan arah dengan* $\mathbf{v}$.

3.2 Sifat Aritmatika dan Norma Vektor

3.2.1 Sifat-Sifat Aritmatika Vektor

Theorem (Sifat-Sifat Aritmatika Vektor)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi n dan* k, l *adalah sebarang skalar, maka*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
6. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
7. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Proof.

Bukti Teorema **nomor 2**.

Misal $\mathbf{u}\,(u_1, u_2, ..., u_n)$, $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, ..., v_n)$, $\mathbf{w}\,(w_1, w_2, ..., w_n)$, maka

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= ((u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n)) + (w_1, w_2, ..., w_n) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) + (w_1, w_2, ..., w_n) \\
&= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, ..., (u_n + v_n) + w_n) \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), ..., u_n + (v_n + w_n)) \\
&= (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n) \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}$$

Bukti lain diserahkan sebagai **Latihan** □

Theorem (Perkalian Skalar)

Jika $\mathbf{v}$ *adalah vektor pada ruang berdimensi n dan k adalah sebarang skalar, maka*

1. $\mathbf{0v} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Definition (Kombinasi Linear)

Jika $\mathbf{w}$ adalah vektor di R^n, maka $\mathbf{w}$ dikatakan **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ di R^n jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

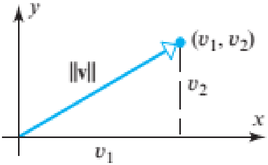
dimana $k_1, k_2, ..., k_r$ adalah skalar yang disebut **koefisien kombinasi linear.**

3.2 Sifat Aritmatika dan Norma Vektor

3.2.2 Norma dan Jarak Vektor

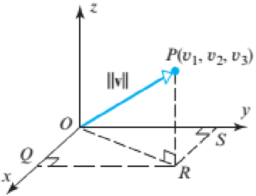
Misal suatu vektor sebarang $\mathbf{v}$. Panjang vektor $\mathbf{v}$ disebut **norma (*norm*)** dari $\mathbf{v}$ dan dinyatakan dengan $\|\mathbf{v}\|$. Berdasarkan Teorema Pythagoras, norma vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pada ruang 2 dimensi (Gambar 3.2.2a) adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + u_2^2}$$



Gambar 3.2.2a

Adapun norma vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pada ruang 3 dimensi (Gambar 3.2.2b) mengikuti Teorema Pythagoras, yaitu



Gambar 3.2.2b

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \end{aligned}$$

Suatu vektor dengan norma satu disebut **vektor satuan**.

Definition (Norma Vektor di R^n)

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah vektor di R^n, maka **norma** dari $\mathbf{v}$ dinotasikan $\|\mathbf{v}\|$ dan didefinisikan mengikuti formula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Example

1. **Norma** dari vektor $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ di R^3 adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

2. **Norma** dari vektor $\mathbf{v} = (2, -1, 3, -5)$ di R^4 adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$$

Theorem

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *adalah vektor di* R^n *dan* k *adalah sebarang skalar, maka*

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{v}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{v}\| = |k| \, \|\mathbf{v}\|$

Proof.

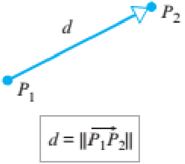
[Akan dibuktikan poin 3]
Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, ..., kv_n)$ sehingga

$$\begin{aligned}\|k\mathbf{v}\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + \cdots + (kv_n)^2} = \sqrt{(k)^2\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)} \\ &= \sqrt{(k)^2}\sqrt{\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)} = |k|\sqrt{\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)}\end{aligned}$$

3.2 Sifat Aritmatika dan Norma Vektor

3.2.2 Norma dan Jarak Vektor

Jika $P_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ dan $P_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ adalah dua titik pada ruang berdimensi 3, maka **jarak** diantara keduanya adalah **norma** dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ (Gambar 3.2.2c)



Gambar 3.2.2c

Karena $\overrightarrow{P_1P_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$, maka

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

Definition (Jarak Vektor di R^n)

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah titik di R^n, maka **jarak** antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dinotasikan $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dan didefinisikan

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Example

Jika $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ dan $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$ adalah titik di R^4, maka jarak antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

Problem (Latihan 3.2)

1. *Misal* $\mathbf{u} = (7, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (9, 6, 6)$ *dan* $\mathbf{w} = (2, 1, -8)$. *Hitunglah:*
    1. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
    2. $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
    3. $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$
    4. $\|3\mathbf{u} - \mathbf{5v} + \mathbf{w}\|$
    5. $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$
    6. $\left\|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$
2. *Tentukan jarak antara* P_1 *dan* P_2 *jika*
    1. $P_1(7, -5, 1)$, $P_2(-7, -2, -1)$
    2. $P_1(3, 3, 3)$, $P_2(6, 0, 3)$
3. *Misal* $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$. *Tentukan semua skalar* k *sehingga* $\|k\mathbf{v}\| = 4$.

3.3 Hasilkali Titik

3.3.1 Hasilkali Titik

Definition (Hasilkali Titik)

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor pada R^2 atau R^3 dan θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka **hasilkali titik** (*hasilkali dalam euclidean*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ didefinisikan oleh

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \ \cos \ \theta$$

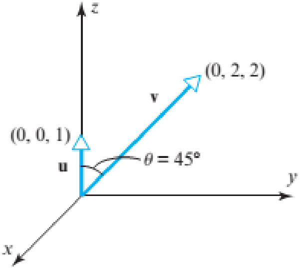
Jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ maka didefinisikan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Berdasarkan definisi ini, jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor taknol maka

$$\cos \ \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

Example

Temukan hasilkali titik dari vektor-vektor yang terdapat pada Gambar 3.3.1



Gambar 3.3.1

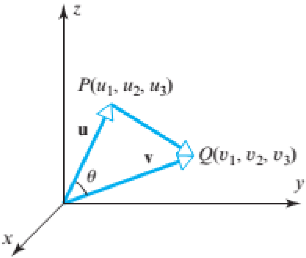
Solution

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\ \cos\ \theta \\
&= \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right)\cos 45^0 \\
&= (1)\left(2\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

3.3 Hasilkali Titik

3.3.2 Bentuk Komponen Hasilkali Titik

Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah dua vektor taknol. Jika θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ (Gambar 3.3.2), maka hukum cosinus menghasilkan



Gambar 3.3.2

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Karena $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, maka

$$\begin{aligned} 2\left\|\mathbf{u}\right\|\left\|\mathbf{v}\right\|\cos\theta &= \left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 \\ \left\|\mathbf{u}\right\|\left\|\mathbf{v}\right\|\cos\theta &= \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2 - \left\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\right\|^2\right) \end{aligned}$$

atau

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2 - \left\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\right\|^2\right)$$

Dengan subtitusi

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{u}\right\|^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,\ \left\|\mathbf{v}\right\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ \left\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\right\|^2 &= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 \end{aligned}$$

diperoleh

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Definition (Hasilkali Titik di R^n)

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah vektor di R^n,maka **hasilkali titik u** dan **v** dinotasikan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan didefinisikan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Example

1. Gunakan definisi ini untuk menyelesaikan masalah pada contoh sebelumnya
2. Hitung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk vektor-vektor di R^4:

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7), \mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

Solution

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 0 + 0 + 2 = 2$
2. $$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0)\\ &= 3 - 12 + 5 + 0\\ &= -4\end{aligned}$$

Example

Misal vektor $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ dan $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$. Tentukan $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ dan sudut θ antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

Penyelesaian

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, maka $\theta = 60^0$

Theorem (Sifat sudut antara dua vektor)

Misal $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor di* R^2 *atau* R^3, *maka*

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ *atau* $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$
2. *Jika* $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *tak nol dan* θ *adalah sudut diantaranya, maka*
   - θ **lancip** *jika dan hanya jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > \mathbf{0}$
   - θ **tumpul** *jika dan hanya jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < \mathbf{0}$
   - θ **siku-siku** *jika dan hanya jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Example

Jika $\mathbf{u} = (1, -2, 3), \mathbf{v} = (-3, 4, 2)$, dan $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5 && \text{(Sudut } \textbf{Tumpul}\text{)} \\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21 && \text{(Sudut } \textbf{Lancip}\text{)} \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0 && \text{(Sudut } \textbf{Siku}\text{)}
\end{aligned}$$

3.3 Hasilkali Titik

3.3.3 Sifat-Sifat Hasilkali Titik

Theorem (Sifat Hasilkali Titik)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada* R^2 *atau* R^3 *dan* k *sebarang skalar, maka*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ *jika* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *dan* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *jika* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Proof.

Akan dibuktikan poin 3, kemudian selebihnya disisakan sebagai **latihan**.
Misal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

$$\begin{aligned} k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &= (ku_1) v_1 + (ku_2) v_2 + (ku_3) v_3 = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Problem (Latihan 3.3)

1. *Tentukan* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
   1. $\mathbf{u} = (-6, -2),\ \mathbf{v} = (4, 0)$
   2. $\mathbf{u} = (1, -5, 4),\ \mathbf{v} = (3, 3, 3)$
   3. $\mathbf{u} = (-2, 2, 3),\ \mathbf{v} = (1, 7, -4)$
2. *Tentukan cosinus dan sudut* θ *antara* $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *pada soal nomor 1.*
3. *Tentukan apakah sudut* $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *membentuk sudut lancip, tumpul, atau tegak lurus.*
   1. $\mathbf{u} = (6, 1, 4),\ \mathbf{v} = (2, 0, -3)$
   2. $\mathbf{u} = (-6, 0, 4),\ \mathbf{v} = (3, 1, 6)$
   3. $\mathbf{u} = (0, 0, -1),\ \mathbf{v} = (1, 1, 1)$
4. *Jika* $\mathbf{p} = (2, k)$ *dan* $\mathbf{q} = (3, 5)$, *tentukan* k *sedemikian sehingga:*
   1. $\mathbf{p}$ *dan* $\mathbf{q}$ *ortogonal*
   2. *Sudut antara* $\mathbf{p}$ *dan* $\mathbf{q}$ *adalah* $\pi/3$
   3. *Sudut antara* $\mathbf{p}$ *dan* $\mathbf{q}$ *adalah* $\pi/4$

3.4 Keortogonalan

3.4.1 Vektor-Vektor Ortogonal

Definition (Vektor Ortogonal)

Dua vektor taknol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di R^n dikatakan **ortogonal** (*saling tegak lurus*) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dan dinotasikan $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
Dengan kata lain, vektor nol di R^n bersifat ortogonal dengan semua vektor di R^n.

Example

Tunjukkan bahwa vektor taknol $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ saling tegak lurus di R^4.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (-2, 3, 1, 4)(1, 2, 0, -1) = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) \\ &= -2 + 6 + 0 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ ortognal di R^4

3.4 Keortogonalan

3.4.2 Proyeksi Ortogonal

- Suatu vektor $\mathbf{u}$ dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol $\mathbf{a}$ dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor $\mathbf{a}$.

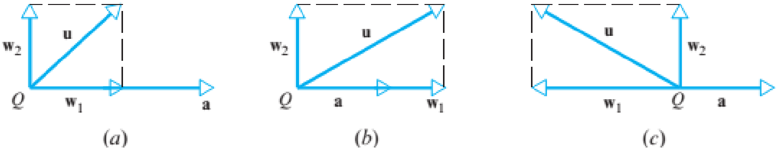
- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):
    1. Tarik sebuah garis dari ujung **u** yang memotong tegak lurus pada vektor **a**,

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):
  1. Tarik sebuah garis dari ujung **u** yang memotong tegak lurus pada vektor **a**,
  2. Buat sebuah vektor $\mathbf{w_1}$ dari Q hingga ke garis tegak lurus tersebut,

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):
  1. Tarik sebuah garis dari ujung **u** yang memotong tegak lurus pada vektor **a**,
  2. Buat sebuah vektor $\mathbf{w_1}$ dari Q hingga ke garis tegak lurus tersebut,
  3. Hitung selisih dari

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$$



Dari Gambar 3.4.2 ditunjukkan bahwa

$$\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = \mathbf{w_1} + (\mathbf{u} - \mathbf{w_1}) = \mathbf{u}$$

- Vektor $\mathbf{w_1}$ disebut **Proyeksi Ortogonal u pada a,** atau disebut **Komponen vektor u disepanjang a,** dinotasikan

$$\mathbf{w_1} = proj_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u}$$

- Vektor $\mathbf{w_2}$ disebut **komponen vektor u yang ortogonal terhadap a,** dinotasikan

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - proj_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u}$$

Theorem (Proyeksi Vektor)

Jika **u** *dan* **a** *adalah vektor di* R^n, *dan jika* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *maka*

$$proj_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\, \mathbf{a} \quad (\textit{Komponen vektor } \mathbf{u} \textit{ sepanjang } \mathbf{a})$$

$$\mathbf{u} - proj_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\, \mathbf{a} \quad (\textit{Komponen vektor } \mathbf{u} \textit{ yang ortogonal terhadap } \mathbf{a})$$

Bukti:
Diserahkan sebagai latihan.

Example

Misal $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ dan $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$. Carilah komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ dan komponen vektor $\mathbf{u}$ yang tegak lurus terhadap $\mathbf{a}$.

Penyelesaian:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$ dan
$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$

Dengan demikian, komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ adalah

$$proj_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

dan komponen vektor $\mathbf{u}$ yang tegak lurus terhadap $\mathbf{a}$ adalah

$$\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

3.4 Keortogonalan

3.4.3 Jarak Titik dan Garis

Theorem (Jarak Titik dan Garis)

1. *Jarak (D) titik $P_0(x_0, y_0)$ dan garis $ax + by + c = 0$ dalam ruang R^2 adalah*
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
2. *Jarak (D) titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan garis $ax + by + cz + d = 0$ dalam ruang R^3 adalah*
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Example

Jarak titik $(1, -4, -3)$ dan garis $2x - 3y + 6z = -1$ adalah

$$D = \frac{|2(1) - 3(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

Problem (Latihan 3.4)

1. *Tentukan apakah* **u** *dan* **v** *vektor ortogonal*
   1. $\mathbf{u} = (6, 1, 4); \mathbf{v} = (2, 0, -3)$
   2. $\mathbf{u} = (3, -2, 1, 3); \mathbf{v} = (-4, 1, -3, 7)$
2. *Tentukan proyeksi ortogonal* **u** *pada* **a**
   1. $\mathbf{u} = (1, -2); \mathbf{a} = (-4, -3)$
   2. $\mathbf{u} = (3, -2, 6); \mathbf{a} = (1, 2, -7)$
3. *Tentukan komponen vektor* **u** *yang ortogonal terhadap* **a***:*
   1. $\mathbf{u} = (2, 1, 1, 2); \mathbf{a} = (4, -4, 2, -2)$
   2. $\mathbf{u} = (5, 0, -3, 7); \mathbf{a} = (2, 1, -1, -1)$
4. *Tentukan jarak antara titik dan garis yang diberikan*
   1. $(-3, 1)\,; 4x + 3y + 4 = 0$
   2. $(3, 1, -2)\,; x + 2y - 2z = 4$

3.5 Hasilkali Silang

3.5.1 Hasilkali Silang Vektor

Definition (Hasilkali Silang)

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor dalam ruang berdimensi tiga, maka **Hasilkali u** dan **v** adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

atau dalam notasi determinan ditulis

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Catatan:

Untuk memudahkan memahami definisi ini, lakukan langkah-langkah berikut:

1. Bentuklah matriks 2×3 yang entri-entrinya terdiri dari komponen **u** pada baris pertama dan komponen **v** pada baris kedua

Catatan:

1. $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$
2. Untuk menghitung komponen pertama dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, hilangkan kolom pertama dan hitung determinannya;
3. Untuk menghitung komponen kedua, hilangkan kolom kedua dan hitung negatif dari determinannya;
4. Untuk menghitung komponen ketiga, hilangkan kolom ketiga dan hitung determinannya.

Example

Hasilkali silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, jika $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$

Theorem (Hubungan Hasilkali Silang dan Hasilkali Titik)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka:*

1. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonal terhadap* $\mathbf{u}$)
2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonal terhadap* $\mathbf{v}$)
3. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (*Identitas Lagrange*) (*Hubungan Hasilkali Silang dan Hasilkali Titik*)
4. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{w}$
5. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$

Example

Misal $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$. Buktikan bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal terhadap $\mathbf{u}$ maupun $\mathbf{v}$.

Solution

Pada contoh sebelumnya telah ditunjukkan bahwa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Karena

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (1, 2, -2)(2, -7, -6) \\ &= (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (3, 0, 1)(2, -7, -6) \\ &= (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0 \end{aligned}$$

Maka, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonal terhadap* $\mathbf{u}$ *maupun* $\mathbf{v}$.

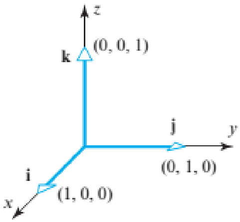
Theorem (Sifat-Sifat Hasilkali Silang)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3 dan* k *adalah skalar sebarang, maka:*

1. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

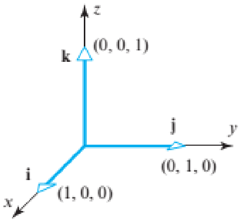
3.5.2 Vektor Satuan Standar

- Perhatikan vektor-vektor pada Gambar 3.5.1 berikut



Gambar 3.5.1

- Perhatikan vektor-vektor pada Gambar 3.5.1 berikut

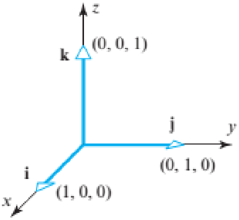


Gambar 3.5.1

- Vektor-vektor ini dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,, \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0)\,, \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

- Perhatikan vektor-vektor pada Gambar 3.5.1 berikut



Gambar 3.5.1

- Vektor-vektor ini dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,, \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0)\,, \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

- Vektor tersebut memiliki panjang 1 sehingga disebut **Vektor Satuan Standar** pada ruang berdimensi 3.

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk **i**, **j**,dan **k** karena dapat dapat ditulis

  $$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\,(1, 0, 0) + v_2\,(0, 1, 0) + v_3\,(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,dan $\mathbf{k}$ karena dapat dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) + v_3 (0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh**

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - \mathbf{3j} + 4\mathbf{k}$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk **i**, **j**,dan **k** karena dapat dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) + v_3 (0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh**

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - \mathbf{3j} + 4\mathbf{k}$$

- Berdasarkan **Definisi Hasilkali Silang**, diperoleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,dan $\mathbf{k}$ karena dapat dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh**

$$(2,-3,4) = 2\mathbf{i} - \mathbf{3j} + 4\mathbf{k}$$

- Berdasarkan **Definisi Hasilkali Silang**, diperoleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,0,1) = \mathbf{k}$$

- Dengan cara ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

3.5 Hasilkali Silang

3.5.3 Bentuk Determinan Hasilkali Silang

- Hasilkali silang dapat dinyatakan dalam bentuk notasi determinan matriks 3×3:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

- Hasilkali silang dapat dinyatakan dalam bentuk notasi determinan matriks 3×3:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh,** jika $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

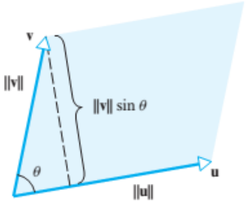
3.5.4 Interpretasi Geometrik Hasilkali Silang

Theorem (Luas Jajar Genjang)

Jika **u** *dan* **v** *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka* **Luas Jajar Genjang** *yang dibatasi oleh* **u** *dan* **v** *adalah* $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

Proof:

Jajar Genjang yang dibatasi oleh **u** dan **v** dapat diilustrasikan seperti Gambar 3.5.4



Gambar 3.5.4

Proof:

Dari Gambar 3.5.4 diperoleh Luas Jajar Genjang

$$A = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\ \theta$$

Menurut **Identittas Lagrange** dan **Hasilkali Titik,**

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \qquad \text{dan} \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\ \theta$$

sehingga

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\ \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \left(1 - \cos^2\ \theta\right) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\ \theta \end{aligned}$$

Dengan demikian

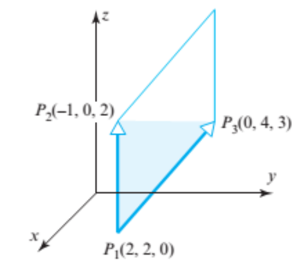
$$\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\ \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Example

Hitung luas segitiga yang dobatasi oleh titik
$P_1\,(2,2,0)$, $P_2\,(-1,0,2)$, dan $P_3\,(0,4,3)$.

Solution

Titik-titik ini dapat diilustrasikan



Solution

Terlihat bahwa Luas Segitiga = 1/2 Luas Jajar Genjang yang dibatasi oleh vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ *dan* $\overrightarrow{P_1P_3}$. *Diketahui bahwa*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2) \quad dan \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$$

sehingga

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-3, -2, 2) \times (-2, 2, 3) = (-10, 5, -10)$$

Dengan demikian,

$$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

Definition (Hasilkali Tripel Skalar)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$,dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

disebut **Hasilkali Tripel Skalar** dari $\mathbf{u}, \mathbf{v}$,dan $\mathbf{w}$.

Hasilkali Tripel Skalar $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$,dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dapat dihitung dengan rumus

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Example

Hitung Hasilkali Tripel Skalar dari vektor-vektor

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solution

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(20) + 2(2) - 5(3) \\ &= 49 \end{aligned}$$

Problem (Latihan 3.5)

1. *Misalkan* $\mathbf{u} = (3, 2, -1), \mathbf{v} = (0, 2, -3)$, *dan* $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. *Hitunglah:*
    1. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
    2. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$
    3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{2w})$
    4. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
2. *Tentukan suatu vektor yang ortogonal baik terhadap* $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$ *maupun terhadap* $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$.
3. *Hitung luas jajar jenjang yang dibatasi oleh* $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$ *dan* $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$.
4. *Hitung luas segitiga yang dibatasi oleh titik* $P(1, -1, 2)$, $P_2(0, 3, 4)$ *dan* $P_3(6, 1, 8)$.
5. *Gunakan hasilkali silang untuk mencari sinus dari sudut antara vektor-vektor* $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ *dan* $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.