PEMODELAN MATEMATIKA

Pemodelan dengan Persamaan Diferensial

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

15 September 2017

1.1 Pendahuluan

"Barangsiapa yang dua harinya (hari ini dan kemarin) sama maka ia telah merugi, barangsiapa yang harinya lebih jelek dari hari sebelumnya maka ia tergolong orang-orang yang terlaknat" (HR. Al Baihaqy)

1.1 Pendahuluan

- Kita sering menyaksikan fenomena yang berhubungan dengan laju perubahan suatu kuantitas terhadap satu atau beberapa kuantitas lainnya.

1.1 Pendahuluan

- Kita sering menyaksikan fenomena yang berhubungan dengan laju perubahan suatu kuantitas terhadap satu atau beberapa kuantitas lainnya.
- Dengan menyaksikan perubahan tersebut, kita bisa dapatkan informasi mengenai hubungan fungsional antara kuantitas-kuantitas tersebut.

1.1 Pendahuluan

- Kita sering menyaksikan fenomena yang berhubungan dengan laju perubahan suatu kuantitas terhadap satu atau beberapa kuantitas lainnya.
- Dengan menyaksikan perubahan tersebut, kita bisa dapatkan informasi mengenai hubungan fungsional antara kuantitas-kuantitas tersebut.
- Misal, jika P menyatakan jumlah manusia dalam suatu populasi yang besar pada waktu t, maka sangat beralasan untuk mengatakan bahwa laju perubahan populasi terhadap waktu bergantung pada ukuran populasi pada saat ini.

1.1 Pendahuluan

- Kita sering menyaksikan fenomena yang berhubungan dengan laju perubahan suatu kuantitas terhadap satu atau beberapa kuantitas lainnya.
- Dengan menyaksikan perubahan tersebut, kita bisa dapatkan informasi mengenai hubungan fungsional antara kuantitas-kuantitas tersebut.
- Misal, jika P menyatakan jumlah manusia dalam suatu populasi yang besar pada waktu t, maka sangat beralasan untuk mengatakan bahwa laju perubahan populasi terhadap waktu bergantung pada ukuran populasi pada saat ini.

1.1 Pendahuluan

- Kita sering menyaksikan fenomena yang berhubungan dengan laju perubahan suatu kuantitas terhadap satu atau beberapa kuantitas lainnya.
- Dengan menyaksikan perubahan tersebut, kita bisa dapatkan informasi mengenai hubungan fungsional antara kuantitas-kuantitas tersebut.
- Misal, jika P menyatakan jumlah manusia dalam suatu populasi yang besar pada waktu t, maka sangat beralasan untuk mengatakan bahwa laju perubahan populasi terhadap waktu bergantung pada ukuran populasi pada saat ini.

Problem:

Bagaimana menjelaskan mekanisme pada perubahan populasi dan bagaimana mengonstruksi suatu model yang dapat menjelaskna perubahan populasi tersebut untuk memprediksi ukuran populasi dimasa yang akan datang.

"Model Pertumbuhan Populasi Malthus"

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Problem:
Bagaimana menjelaskan hubungan antara ukuran populasi P dan waktu t untuk memprediksi ukuran populasi P pada waktu yang akan datang?

- Misal $P(t) =$ Ukuran populasi pada saat sekarang
  $P(t + \Delta t) =$ Ukuran populasi pada saat $t + \Delta t$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Problem:
Bagaimana menjelaskan hubungan antara ukuran populasi P dan waktu t untuk memprediksi ukuran populasi P pada waktu yang akan datang?

- Misal $P(t) =$ Ukuran populasi pada saat sekarang
  $P(t + \Delta t) =$ Ukuran populasi pada saat $t + \Delta t$
- Maka perubahan populasi (ΔP) selama periode waktu Δt diberikan oleh

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Problem:
Bagaimana menjelaskan hubungan antara ukuran populasi P dan waktu t untuk memprediksi ukuran populasi P pada waktu yang akan datang?

- Misal $P(t) =$ Ukuran populasi pada saat sekarang
  $P(t + \Delta t) =$ Ukuran populasi pada saat $t + \Delta t$
- Maka perubahan populasi (ΔP) selama periode waktu Δt diberikan oleh
$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$$
- Dari sekian banyak faktor yang mempengaruhi pertumbuhan populasi dalam suatu wilayah, seperti faktor emigrasi, imigrasi, usia, gender, kelahiran, dan kematian, kita asumsikan hanya mempertimbangkan prinsip proporsionalitas, yaitu pertumbuhan populasi proporsional terhadap ukuran populasi.

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

- Asumsikan: Jumlah kelahiran dan kematian proporsional terhadap ukuran populasi dan interval waktu tertentu Δt, yaitu

$$\begin{aligned} \text{Jumlah Kelahiran} &= bP\Delta t \\ \text{Jumlah Kematian} &= dP\Delta t \end{aligned}$$

b dan d kontanta positif.

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

- Asumsikan: Jumlah kelahiran dan kematian proporsional terhadap ukuran populasi dan interval waktu tertentu Δt, yaitu

$$\begin{aligned} \text{Jumlah Kelahiran} &= bP\Delta t \\ \text{Jumlah Kematian} &= dP\Delta t \end{aligned}$$

  b dan d kontanta positif.

- Dengan demikian, perubahan populasi ΔP dalam interval waktu Δt diberikan oleh

$$\begin{aligned} \Delta P &= \textit{Banyaknya Kelahiran} - \textit{Banyaknya Kematian} \\ &= bP\Delta t - dP\Delta t \\ &= (b-d)\,P\Delta t \\ &= kP\Delta t \end{aligned}$$

  dimana $k = b - d$.

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

- Rata-rata laju perubahan populasi selama periode waktu Δt diberikan oleh
$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

- Rata-rata laju perubahan populasi selama periode waktu Δt diberikan oleh
$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP$$
- Dengan mengambil Δt cukup kecil atau mendekati nol, diperoleh Persamaan Diferensial menggunakan definisi turunan
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = kP$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

- Rata-rata laju perubahan populasi selama periode waktu Δt diberikan oleh

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP$$

- Dengan mengambil Δt cukup kecil atau mendekati nol, diperoleh Persamaan Diferensial menggunakan definisi turunan

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = kP$$

- Persamaan ini menyatakan laju perubahan sesaat populasi terhadap waktu proporsional dengan ukuran populasi pada wktu t.

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

- Rata-rata laju perubahan populasi selama periode waktu Δt diberikan oleh
$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP$$
- Dengan mengambil Δt cukup kecil atau mendekati nol, diperoleh Persamaan Diferensial menggunakan definisi turunan
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = kP$$
- Persamaan ini menyatakan laju perubahan sesaat populasi terhadap waktu proporsional dengan ukuran populasi pada wktu t.
- Persamaan ini juga dikenal sebagai **Model Pertumbuhan Populasi Malthus.**

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Problem

Tentukan solusi umum dan solusi khusus dari **Model Pertumbuhan Populasi Malthus**

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Dari model*

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Dari model*

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

- *Diperoleh Solusi Umum*

$$P(t) = Ce^{kt}$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Dari model*

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

- *Diperoleh Solusi Umum*

$$P(t) = Ce^{kt}$$

- *Untuk memperoleh Solusi Khusus, berikan nilai awal*

$$P(t_0) = P_0 > 0$$

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Dari model*

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

- *Diperoleh Solusi Umum*

$$P(t) = Ce^{kt}$$

- *Untuk memperoleh Solusi Khusus, berikan nilai awal*

$$P(t_0) = P_0 > 0$$

- *Dengan demikian diperoleh*

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$$

$P_0 =$ *Populasi Awal*, $P(t) =$ *Populasi pada waktu* t.

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Solusi ini menunjukkan bahwa prediksi ukuran populasi akan bergantung pada nilai k:*

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Solusi ini menunjukkan bahwa prediksi ukuran populasi akan bergantung pada nilai k:*
  1. *Jika $k > 0$, maka populasi akan tumbuh secara eksponensial tanpa batas.*

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Solusi ini menunjukkan bahwa prediksi ukuran populasi akan bergantung pada nilai k:*
  1. *Jika $k > 0$, maka populasi akan tumbuh secara eksponensial tanpa batas.*
  2. *Jika $k < 0$, maka populasi akan meluruh secara eksponensial menuju nol.*

1.2 Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Solusi ini menunjukkan bahwa prediksi ukuran populasi akan bergantung pada nilai k:*
  1. *Jika $k > 0$, maka populasi akan tumbuh secara eksponensial tanpa batas.*
  2. *Jika $k < 0$, maka populasi akan meluruh secara eksponensial menuju nol.*
  3. *Jika $k = 0$, maka ukuran populasi tidak akan mengalami perubahan, $P(t) = P_0$ untuk setiap waktu t.*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Example

Perhatikan data penduduk RRC pada tabel berikut

Tahun	Rata-Rata Populasi
1950	546.815.000
1951	557.480.000
1952	568.910.000
1953	581.390.000
1954	595.310.000

Gunakan Model Pertumbuhan Populasi Malthus untuk melakukan prediksi jumlah penduduk RRC pada 1951-1955 dan 2000-2003. Bandingkan dengan data populasi sesungguhnya.

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Diketahui :*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Malthus*

$$P(t) = P(0)e^{k(t-t_0)}$$

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Malthus*

$$P(t) = P(0)e^{k(t-t_0)}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Malthus*

$$P(t) = P(0)e^{k(t-t_0)}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*
  - $P(0) = 546.815.000$

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Malthus*

$$P(t) = P(0)e^{k(t-t_0)}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*
  - $P(0) = 546.815.000$

- *Estimasi nilai parameter k :*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Malthus*

$$P(t) = P(0)e^{k(t-t_0)}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*
  - $P(0) = 546.815.000$

- *Estimasi nilai parameter k :*
  - *Gunakan $P(0)$ dan $P(1)$ untuk melakukan estimasi pada k (coba bandingkan dengan penggunaan data lainnya):*

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 e^{k(t-t_0)} \Leftrightarrow P(1) = P(0)e^k \\ &\Leftrightarrow 557.480.000 = 546.815.000e^k \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{557.480}{546.815} = k \\ &\Leftrightarrow k \approx 0,01931609 \end{aligned}$$

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Dengan demikian, dengan menggunakan $P(0)$ dan k, dapat dihasilkan prediksi pada tahun-tahun berikutnya pada tabel berikut:*

Tahun	Rata-Rata Populasi	Nilai Prediksi	Error
1951	557.480.000	557.479.999	1
1952	568.910.000	568.353.007	556.993
1953	581.390.000	579.438.080	1.951.920
1954	595.310.000	590.739.355	4.570.645
1955	608.655.000	602.261.048	6.393.952
⋮	⋮	⋮	⋮
2000	1.262.645.000	1.436.428.404	173.783.404
2001	1.271.850.000	1.464.444.292	192.594.292
2002	1.280.400.000	1.493.006.598	212.606.598
2003	1.288.400.000	1.522.125.978	233.725.978

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Jika diperhatikan, hasil prediksi cukup akurat di beberapa tahun awal, namun tidak pada tahun-tahun 2000-2003 yang menunjukkan selisih yang cukup besar antara data sesungguhnya dengan nilai predikasi.*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Jika diperhatikan, hasil prediksi cukup akurat di beberapa tahun awal, namun tidak pada tahun-tahun 2000-2003 yang menunjukkan selisih yang cukup besar antara data sesungguhnya dengan nilai predikasi.*
- *Hal ini menujukkan bahwa model tidak dapat digunakan untuk memprediksi secara akurat dalam rentan waktu yang lama.*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Jika diperhatikan, hasil prediksi cukup akurat di beberapa tahun awal, namun tidak pada tahun-tahun 2000-2003 yang menunjukkan selisih yang cukup besar antara data sesungguhnya dengan nilai predikasi.*
- *Hal ini menujukkan bahwa model tidak dapat digunakan untuk memprediksi secara akurat dalam rentan waktu yang lama.*
- *Dengan demikian asumsi yang digunakan pada Model Pertumbuhan Populasi Malthus perlu* **DIREVISI**.

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Jika diperhatikan, hasil prediksi cukup akurat di beberapa tahun awal, namun tidak pada tahun-tahun 2000-2003 yang menunjukkan selisih yang cukup besar antara data sesungguhnya dengan nilai predikasi.*
- *Hal ini menujukkan bahwa model tidak dapat digunakan untuk memprediksi secara akurat dalam rentan waktu yang lama.*
- *Dengan demikian asumsi yang digunakan pada Model Pertumbuhan Populasi Malthus perlu* **DIREVISI**.
    - *Asumsi kelahiran dan kematian bernilai konstan pada model ini perlu ditinjau kembali.*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Jika diperhatikan, hasil prediksi cukup akurat di beberapa tahun awal, namun tidak pada tahun-tahun 2000-2003 yang menunjukkan selisih yang cukup besar antara data sesungguhnya dengan nilai predikasi.*
- *Hal ini menujukkan bahwa model tidak dapat digunakan untuk memprediksi secara akurat dalam rentan waktu yang lama.*
- *Dengan demikian asumsi yang digunakan pada Model Pertumbuhan Populasi Malthus perlu* **DIREVISI**.
    - *Asumsi kelahiran dan kematian bernilai konstan pada model ini perlu ditinjau kembali.*
    - *Faktanya, ternyata populasi tidak dapat bertumbuh secara eksponensial tanpa batas.*

1.3 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Populasi Malthus

Solution

- *Jika diperhatikan, hasil prediksi cukup akurat di beberapa tahun awal, namun tidak pada tahun-tahun 2000-2003 yang menunjukkan selisih yang cukup besar antara data sesungguhnya dengan nilai predikasi.*
- *Hal ini menujukkan bahwa model tidak dapat digunakan untuk memprediksi secara akurat dalam rentan waktu yang lama.*
- *Dengan demikian asumsi yang digunakan pada Model Pertumbuhan Populasi Malthus perlu* **DIREVISI**.
  - *Asumsi kelahiran dan kematian bernilai konstan pada model ini perlu ditinjau kembali.*
  - *Faktanya, ternyata populasi tidak dapat bertumbuh secara eksponensial tanpa batas.*
  - *Fakta menunjukkan bahwa ketika ukuran populasi cukup besar, maka laju pertumbuhan akan menjadi terbatas karena adanya keterbatasan daya dukung lingkungan seperti keterbatasan makanan, sumber daya alam, dan faktor lingkungan lainnya.*

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.
  - Dalam hal ini diasumsikan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh tanpa batas

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.
  - Dalam hal ini diasumsikan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh tanpa batas
  - Terdapat jumlah populasi maksimal, misal K yang dapat ditampung dengan baik secara berkelanjutan oleh lingkungannya.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.
  - Dalam hal ini diasumsikan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh tanpa batas
  - Terdapat jumlah populasi maksimal, misal K yang dapat ditampung dengan baik secara berkelanjutan oleh lingkungannya.
- Kontanta k pada Model Malthus dianggap tak selamanya konstan karena ketika populasi sudah padat, maka laju pertumbuhan populasi akan berkurang.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.
  - Dalam hal ini diasumsikan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh tanpa batas
  - Terdapat jumlah populasi maksimal, misal K yang dapat ditampung dengan baik secara berkelanjutan oleh lingkungannya.
- Kontanta k pada Model Malthus dianggap tak selamanya konstan karena ketika populasi sudah padat, maka laju pertumbuhan populasi akan berkurang.
  - Dengan demikian, diasumsikan bahwa pertumbuhan populasi akan bergantung pada ukuran populasi pada waktu t.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.
  - Dalam hal ini diasumsikan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh tanpa batas
  - Terdapat jumlah populasi maksimal, misal K yang dapat ditampung dengan baik secara berkelanjutan oleh lingkungannya.
- Kontanta k pada Model Malthus dianggap tak selamanya konstan karena ketika populasi sudah padat, maka laju pertumbuhan populasi akan berkurang.
  - Dengan demikian, diasumsikan bahwa pertumbuhan populasi akan bergantung pada ukuran populasi pada waktu t.
  - Ketika populasi membesar mendekati ukuran populasi maksimal K, maka laju k akan menurun.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Tahun 1837, seorang ahli matematika biologi Belanda bernama Pierre-Francois Verhulst megusulkan modifikasi pada Model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi.
  - Dalam hal ini diasumsikan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh tanpa batas
  - Terdapat jumlah populasi maksimal, misal K yang dapat ditampung dengan baik secara berkelanjutan oleh lingkungannya.
- Kontanta k pada Model Malthus dianggap tak selamanya konstan karena ketika populasi sudah padat, maka laju pertumbuhan populasi akan berkurang.
  - Dengan demikian, diasumsikan bahwa pertumbuhan populasi akan bergantung pada ukuran populasi pada waktu t.
  - Ketika populasi membesar mendekati ukuran populasi maksimal K, maka laju k akan menurun.
  - Bentuk fungsi sederhana yang dapat menggambarkan hal ini adalah

$$k = r\,(K - P)\,; \qquad r \text{ kontanta positif.}$$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Dengan mengganti $k = r\left(K - P\right)$ pada Model Malthus, diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = rP(K - P)$$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Dengan mengganti $k = r\left(K - P\right)$ pada Model Malthus, diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = rP(K - P)$$

- Model ini kemudian dikenal dengan nama model Verhulst atau **Model Pertumbuhan Logistik**.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

Problem

Tentukan solusi dari Model Pertumbuhan Logistik

$$\frac{dP}{dt} = rP(K - P)$$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Model Pertumbuhan Logistik dapat ditulis kembali dalam bentuk*

$$\frac{dP}{P(K-P)} = rdt$$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Model Pertumbuhan Logistik dapat ditulis kembali dalam bentuk*

$$\frac{dP}{P(K-P)} = rdt$$

- *Dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh*

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rKt + C \quad ; \quad C = \text{ Kontanta Integrasi}$$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Model Pertumbuhan Logistik dapat ditulis kembali dalam bentuk*

$$\frac{dP}{P(K-P)} = rdt$$

- *Dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh*

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rKt + C \quad ; \quad C = \text{ Kontanta Integrasi}$$

- *Dengan nilai awal $P_0 = P(t_0)$ untuk $t = t_0$, diperoleh solusi model*

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K-P_0)\, e^{-rK(t-t_0)}}$$

yang menunjukkan populasi menuju titik maksimal pada saat t

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Untuk mengetahui **Pertumbuhan Maksimal** populasi, model pertumbuhan logistik diturunkan kembali terhadap waktu

$$\frac{dP}{dt} = rP(K-P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = rK\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = r\frac{dP}{dt}(K-2P)$$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Untuk mengetahui **Pertumbuhan Maksimal** populasi, model pertumbuhan logistik diturunkan kembali terhadap waktu

$$\frac{dP}{dt} = rP(K-P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = rK\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = r\frac{dP}{dt}(K-2P)$$

* Bentuk ini memberikan $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ketika $P = \frac{K}{2}$

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Untuk mengetahui **Pertumbuhan Maksimal** populasi, model pertumbuhan logistik diturunkan kembali terhadap waktu

$$\frac{dP}{dt} = rP(K - P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = rK\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = r\frac{dP}{dt}(K - 2P)$$

* Bentuk ini memberikan $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ketika $P = \frac{K}{2}$
* Jika $P < \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi naik

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Untuk mengetahui **Pertumbuhan Maksimal** populasi, model pertumbuhan logistik diturunkan kembali terhadap waktu

$$\frac{dP}{dt} = rP(K-P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = rK\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = r\frac{dP}{dt}(K-2P)$$

* Bentuk ini memberikan $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ketika $P = \frac{K}{2}$
* Jika $P < \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi naik
* Jika $P > \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi turun

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Untuk mengetahui **Pertumbuhan Maksimal** populasi, model pertumbuhan logistik diturunkan kembali terhadap waktu

$$\frac{dP}{dt} = rP(K-P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = rK\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = r\frac{dP}{dt}(K-2P)$$

  * Bentuk ini memberikan $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ketika $P = \frac{K}{2}$
  * Jika $P < \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi naik
  * Jika $P > \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi turun
  * Hal ini menunjukkan bahwa **nilai maksimum** $\frac{dP}{dt}$ terjadi pada saat $P = \frac{K}{2}$ dan selanjutnya akan berkurang menuju nol.

1.4 Model Pertumbuhan Logistik

- Untuk mengetahui **Pertumbuhan Maksimal** populasi, model pertumbuhan logistik diturunkan kembali terhadap waktu

$$\frac{dP}{dt} = rP(K-P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = rK\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = r\frac{dP}{dt}(K-2P)$$

  - Bentuk ini memberikan $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ketika $P = \frac{K}{2}$
  - Jika $P < \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi naik
  - Jika $P > \frac{K}{2}$, maka $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$, artinya $\frac{dP}{dt}$ fungsi turun
  - Hal ini menunjukkan bahwa **nilai maksimum** $\frac{dP}{dt}$ terjadi pada saat $P = \frac{K}{2}$ dan selanjutnya akan berkurang menuju nol.

- Nilai maksimum $\frac{dP}{dt}$ yang terjadi pada saat $P = \frac{K}{2}$ dapat digunakan untuk **estimasi nilai K**.

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Example

Diberikan data rata-rata populasi pada tabel berikut

Tahun	Rata-Rata Populasi
1950	546.815.000
1951	557.480.000
1952	568.910.000
1953	581.390.000
1954	595.310.000

Gunakan Model Pertumbuhan Logistik untuk Tentukan nilai prediksi jumlah penduduk pada 1951-1955 dan 2000-2003 dengan model pertumbuhan logistik, jika diberikan nilai $K = 1.393.000.000$ dan $r = 4,30725 \times 10^{-11}$. Bandingkan dengan data populasi sesungguhnya.

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Diketahui :*

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Diketahui :*
    - *Model Pertumbuhan Logistik*

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\, e^{-rK(t-t_0)}}$$

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Pertumbuhan Logistik*

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\, e^{-rK(t-t_0)}}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Pertumbuhan Logistik*

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\, e^{-rK(t-t_0)}}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*
  - $P(0) = 546.815.000$

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Diketahui :*
  - *Model Pertumbuhan Logistik*

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\, e^{-rK(t-t_0)}}$$

  - t_0 *bersesuaian dengan tahun 1950.*
  - $P(0) = 546.815.000$

- *Dengan nilai estimasi*

$$K = 1.393.000.000$$
$$r = 4,30725 \times 10^{-11}$$

Diperoleh nilai prediksi pada tahun-tahun berikutnya.

1.5 Contoh Kasus Model Pertumbuhan Logistik

Solution

- *Nilai prediksi pada tahun-tahun berikutnya ditampilkan pada tabel berikut:*

Tahun	Rata-Rata Populasi	Nilai Prediksi	Error
1951	557.480.000	566.868.206	9.388.206
1952	568.910.000	587.146.538	18.236.538
1953	581.390.000	607.616.743	26.226.743
1954	595.310.000	628.244.241	32.934.241
1955	608.655.000	648.993.347	40.338.347
⋮	⋮	⋮	⋮
2000	1.262.645.000	1.293.354.179	30.709.179
2001	1.271.850.000	1.298.764.535	26.914.535
2002	1.280.400.000	1.303.901.369	23.501.369
2003	1.288.400.000	1.308.776.349	20.376.349

Latihan

1. Perhatikan data pada Tabel berikut

Tahun	Rata-Rata Populasi
1950	546.815.000
1951	557.480.000
1952	568.910.000
1953	581.390.000
1954	595.310.000

   a. Gunakan data pada Tahun 1950 dan 1952 pada untuk estimasi nilai k pada model $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$.
   b. Estimasi nilai rata-rata populasi dari tahun 1951-1960.

2. Anggaplah bahwa laju kelahiran suatu populasi adalah 150 setiap 1000 (per tahun) dan laju kematiannya 125 setiap 1000 (per tahun), dan diketahui ukuran populasi pada tahun 2010 adalah sebesar 2000. Tentukan model pertumbuhan populasi tersebut dan nilai prediksi ukuran populasi pada tahun 2020.