

PEMODELAN MATEMATIKA

Pemodelan Matematika Epidemi

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

September 2017

1.1 Pendahuluan

Rosulullah Shallallahu 'alaihi wasallam bersabda:
"Sesungguhnya Allah benar-benar akan menguji hamba-Nya dengan **penyakit**, sehingga ia **menghapuskan setiap dosa** darinya"
(HR. Al Hakim, Shohih menurut Syaikh Albani)

1.1 Pendahuluan

Dari Abu Hurairoh Radiallahu 'anhu, dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda:

"Tidaklah seorang muslim ditimpa keletihan, **penyakit** yang berkepanjangan, kesusahan, kesedihan, gangguan, kegelisahan, hingga duri yang menusuknya melainkan Allah akan **menghapuskan dosa-dosanya** dengan sebab tersebut"
(HR. Bukhari)

1.1 Pendahuluan

Dari Usamah bin Zaid Radiallahu 'anhu, dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda:

"Apabila tha'un (penyakit menular) mewabah di suatu negeri, maka **janganlah kalian memasukinya**. Dan apabila dia mewabah di negeri yang kalian berada di dalamnya, maka **janganlah kalian keluar darinya**" (HR. Ahmad)

○ ○ ○ **Model SIR** ○ ○ ○

1.2 Model Epidemi SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$

1.2 Model Epidemi SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$
- **Susceptible** (S) dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga golongan ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas infected (I).

1.2 Model Epidemi SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$
- **Susceptible** (S) dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga golongan ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas infected (I).
- **Infected** (I) merupakan individu yang dapat menularkan penyakit pada individu susceptible. Waktu yang diperlukan oleh penderita infeksi penyakit disebut periode penyakit. Setelah melalui periode penyakit, maka individu akan sembuh dan berpindah ke kelas recovered (R).

1.2 Model Epidemi SIR

- Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu Susceptible (S), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + I + R$
- **Susceptible** (S) dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga golongan ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas infected (I).
- **Infected** (I) merupakan individu yang dapat menularkan penyakit pada individu susceptible. Waktu yang diperlukan oleh penderita infeksi penyakit disebut periode penyakit. Setelah melalui periode penyakit, maka individu akan sembuh dan berpindah ke kelas recovered (R).
- **Recovered** (R) merupakan individu yang telah sembuh dari penyakit atau kebal dalam kehidupannya.

1.2 Model Epidemi SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini

1.2 Model Epidemi SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
 - 1 Populasi konstan

1.2 Model Epidemi SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
 - 1 Populasi konstan
 - 2 Laju kelahiran sama dengan laju kematian

1.2 Model Epidemi SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
 - 1 Populasi konstan
 - 2 Laju kelahiran sama dengan laju kematian
 - 3 Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.

1.2 Model Epidemi SIR

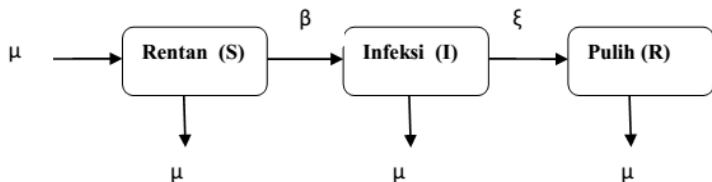
- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
 - 1 Populasi konstan
 - 2 Laju kelahiran sama dengan laju kematian
 - 3 Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.
 - 4 Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan peluang konstan sepanjang waktu.

1.2 Model Epidemi SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
 - 1 Populasi konstan
 - 2 Laju kelahiran sama dengan laju kematian
 - 3 Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.
 - 4 Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan peluang konstan sepanjang waktu.
 - 5 Diasumsikan juga bahwa sekali seorang individu telah terinfeksi dan kemudian telah pulih, maka individu tersebut tidak akan terjangkit kembali karena adanya kekebalan tubuh yang kuat

1.2 Model Epidemi SIR

- Beberapa asumsi yang digunakan pada model ini
 - 1 Populasi konstan
 - 2 Laju kelahiran sama dengan laju kematian
 - 3 Perubahan individu susceptible dan infected proporsional terhadap jumlah populasi.
 - 4 Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan peluang konstan sepanjang waktu.
 - 5 Diasumsikan juga bahwa sekali seorang individu telah terinfeksi dan kemudian telah pulih, maka individu tersebut tidak akan terjangkit kembali karena adanya kekebalan tubuh yang kuat
- Diagram Kompartemen



1.2 Model Epidemi SIR

- Dengan menganggap bahwa tingkat penularan penyakit sebanding dengan jumlah pertemuan antara individu rentan dan individu yang terinfeksi, maka model *SIR* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \zeta I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \zeta I - \mu R\end{aligned}$$

1.2 Model Epidemi SIR

- Dengan menganggap bahwa tingkat penularan penyakit sebanding dengan jumlah pertemuan antara individu rentan dan individu yang terinfeksi, maka model *SIR* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \zeta I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \zeta I - \mu R\end{aligned}$$

- Keterangan

N : Total populasi individu

S : Individu yang rentan terinfeksi penyakit

I : Individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh

R : Individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit

1.2 Model Epidemi SIR

- Keterangan

β : Laju penularan penyakit

ξ : Laju kesembuhan

μ : Laju kelahiran dan laju kematian

1.2 Model Epidemi SIR

- Keterangan
 - β : Laju penularan penyakit
 - ξ : Laju kesembuhan
 - μ : Laju kelahiran dan laju kematian
- Populasi S akan meningkat seiring dengan bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.

1.2 Model Epidemi SIR

- Keterangan
 - β : Laju penularan penyakit
 - ξ : Laju kesembuhan
 - μ : Laju kelahiran dan laju kematian
- Populasi S akan meningkat seiring dengan bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.
- Populasi I akan meningkat dengan bertambahnya individu yang terinfeksi dari kelas S .

1.2 Model Epidemi SIR

- Keterangan
 - β : Laju penularan penyakit
 - ξ : Laju kesembuhan
 - μ : Laju kelahiran dan laju kematian
- Populasi S akan meningkat seiring dengan bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.
- Populasi I akan meningkat dengan bertambahnya individu yang terinfeksi dari kelas S .
- Kekebalan tubuh yang terinfeksi akan berubah seiring dengan berjalannya waktu, maka individu yang terinfeksi akan pulih memasuki individu R , sehingga populasi R akan meningkat sesuai dengan meningkatnya individu yang pulih dari infeksi dan akan berkurang seiring dengan perubahan kekebalan.

1.2 Model Epidemi SIR

- Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad r = \frac{R}{N}$$

1.2 Model Epidemi SIR

- Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad r = \frac{R}{N}$$

- sehingga diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - (\zeta + \mu) i$$

$$\frac{dr}{dt} = \zeta i - \mu r$$

○ ○ ○ **Model SIR dengan Vaksinasi** ○ ○ ○

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunakan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunakan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
 - 1 Jumlah populasi diasumsikan cukup besar

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunakan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
 - 1 Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
 - 2 Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunakan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
 - 1 Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
 - 2 Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut
 - 3 Jumlah kelahiran dan kematian dalam tiap satuan waktu diasumsikan sama

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunakan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
 - 1 Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
 - 2 Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut
 - 3 Jumlah kelahiran dan kematian dalam tiap satuan waktu diasumsikan sama
 - 4 Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lainnya

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Model endemik SIR dengan memperhatikan faktor vaksinasi diturunkan ulang dari model endemi SIR klasik. Model penyebaran penyakit diturunkan menggunakan asumsi atau batasan tertentu. Hethcote (2000) menyebutkan bahwa asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit sebagai berikut:
 - 1 Jumlah populasi diasumsikan cukup besar
 - 2 Populasi diasumsikan tertutup, oleh karena itu tidak ada populasi yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi tersebut
 - 3 Jumlah kelahiran dan kematian dalam tiap satuan waktu diasumsikan sama
 - 4 Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lainnya
 - 5 Individu yang terinfeksi penyakit dapat sembuh dari penyakit dan dapat pula menimbulkan kematian akibat penyakit tersebut

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:
 - 1 Vaksinasi hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau yang masih dalam usia anak- anak (< 12 tahun)

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

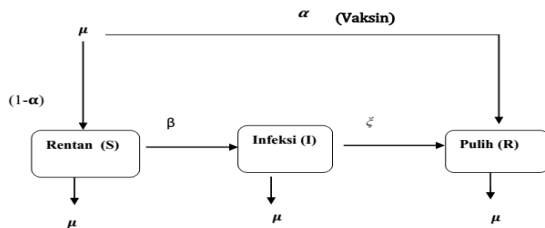
- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:
 - 1 Vaksinasi hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau yang masih dalam usia anak- anak (< 12 tahun)
 - 2 Keampuhan vaksinasi adalah 100%, hal ini berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal dari penyakit. Kekebalan yang terjadi karena vaksinasi bersifat permanen

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:
 - 1 Vaksinasi hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau yang masih dalam usia anak- anak (< 12 tahun)
 - 2 Keampuhan vaksinasi adalah 100%, hal ini berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal dari penyakit. Kekebalan yang terjadi karena vaksinasi bersifat permanen
 - 3 Jumlah individu yang memperoleh vaksin proposional dengan jumlah kelahiran. Dengan demikian, jumlah individu yang kebal dari penyakit karena telah memperoleh vaksinasi dinyatakan dengan $\alpha\mu N$, α : parameter vaksinasi.

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

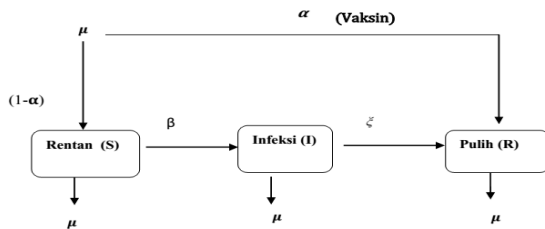
- Diagram Kompartemen



Gambar 2. Dinamika populasi dalam model SIR dengan pengaruh vaksinasi

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Diagram Kompartemen



Gambar 2. Dinamika populasi dalam model SIR dengan pengaruh vaksinasi

- Berdasarkan diagram kompartemen diperoleh model sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = (1 - \alpha) \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \zeta I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha \mu N + \zeta I - \mu R$$

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Untuk menyederhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad r = \frac{R}{N}$$

1.2 Model Epidemi SIR dengan Vaksinasi

- Untuk menyederhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad r = \frac{R}{N}$$

- sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \mu(1 - \alpha) - \beta si - \mu s \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - (\zeta + \mu) i \\ \frac{dr}{dt} &= \alpha\mu + \zeta i - \mu r\end{aligned}$$

○ ○ ○ **Model SEIR** ○ ○ ○

1.4 Model Epidemi SEIR

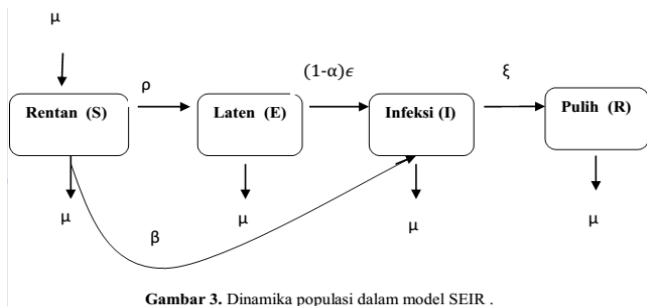
- Model ini secara umum identik dengan penurunan model SIR, hanya mengalami penambahan sebuah variabel Exposed (E), yaitu individu yang telah terpapar oleh penyakit namun belum sepenuhnya terinfeksi.

1.4 Model Epidemi SEIR

- Model ini secara umum identik dengan penurunan model SIR, hanya mengalami penambahan sebuah variabel Exposed (E), yaitu individu yang telah terpapar oleh penyakit namun belum sepenuhnya terinfeksi.
- Dalam hal ini populasi dibagi menjadi 4 kelompok, yaitu Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + E + I + R$ yang sifatnya konstan.

1.4 Model Epidemi SEIR

- Model ini secara umum identik dengan penurunan model SIR, hanya mengalami penambahan sebuah variabel Exposed (E), yaitu individu yang telah terpapar oleh penyakit namun belum sepenuhnya terinfeksi.
- Dalam hal ini populasi dibagi menjadi 4 kelompok, yaitu Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), dan Recovered (R). Total keseluruhan populasi adalah $N = S + E + I + R$ yang sifatnya konstan.
- Diagram Kompartemen



Gambar 3. Dinamika populasi dalam model SEIR .

1.4 Model Epidemi SEIR

- Berdasarkan diagram kompartemen diperoleh model sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \rho S - \beta S \frac{I}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \rho S - (1 - \alpha) \beta E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} + (1 - \alpha) \beta E - \zeta I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \zeta I - \mu R$$

1.4 Model Epidemi SEIR

- Berdasarkan diagram kompartemen diperoleh model sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \rho S - \beta S \frac{I}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \rho S - (1 - \alpha) \beta E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} + (1 - \alpha) \beta E - \zeta I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \zeta I - \mu R$$

- Keterangan

E : Individu laten/ terpapar

β : Laju penularan penyakit

ζ : Laju kesembuhan

μ : Laju kelahiran dan laju kematian

α : Laju vaksinasi

ρ : Laju kekebalan tubuh

1.4 Model Epidemi SEIR

- Untuk menyederhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad r = \frac{R}{N}$$

1.4 Model Epidemi SEIR

- Untuk menyederhanakan persamaan dan memudahkan analisis model, maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad \text{dan} \quad r = \frac{R}{N}$$

- sehingga diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - (\rho + \mu) s$$

$$\frac{de}{dt} = \rho s - (1 - \alpha) \beta e - \mu e$$

$$\frac{di}{dt} = (1 - \alpha) \beta e + \beta si - (\zeta + \mu) i$$

$$\frac{dr}{dt} = \zeta i - \mu r$$

1.5 Latihan

Problem

- 1 *Buatlah modifikasi pada model klasik yang telah diberikan kemudian rumuskan model matematika hasil modifikasi yang anda berikan.*
- 2 *Lakukan penyederhanaan dengan proses linearisasi pada model yang anda temukan.*