PENGANTAR LOGIKA MATEMATIKA

Logika Matematika

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2017

○ ○ ○ **Kalimat Deklaratif** ○ ○○

1.1 Pendahuluan Logika

- Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*), yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi, bukan dengan perasaan atau pengalaman.

1.1 Pendahuluan Logika

- Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*), yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi, bukan dengan perasaan atau pengalaman.
- Pelajaran logika fokus pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*).

1.1 Pendahuluan Logika

- Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*), yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi, bukan dengan perasaan atau pengalaman.
- Pelajaran logika fokus pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*).

Examples

Semua pengedara sepeda motor memakai helm.
Setiap orang yang memakai helm adalah mahasiswa.
Jadi, semua pengedara sepeda motor adalah mahasiswa.

1.1 Pendahuluan Logika

- Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*), yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi, bukan dengan perasaan atau pengalaman.
- Pelajaran logika fokus pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*).

Examples

Semua pengedara sepeda motor memakai helm.
Setiap orang yang memakai helm adalah mahasiswa.
Jadi, semua pengedara sepeda motor adalah mahasiswa.

- Mesipun logika tidak membantu memutuskan suatu pernyataan benar/salah, namun jika pernyataan ke-1 dan ke-2 benar, maka logika akan membawa kita pada kesimpulan bahwa pernyataan ke-3 juga benar.

1.1 Pendahuluan Logika

- Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*), yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi, bukan dengan perasaan atau pengalaman.
- Pelajaran logika fokus pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*).

Examples

Semua pengedara sepeda motor memakai helm.
Setiap orang yang memakai helm adalah mahasiswa.
Jadi, semua pengedara sepeda motor adalah mahasiswa.

- Mesipun logika tidak membantu memutuskan suatu pernyataan benar/salah, namun jika pernyataan ke-1 dan ke-2 benar, maka logika akan membawa kita pada kesimpulan bahwa pernyataan ke-3 juga benar.
- Logika membantu membedakan suatu pernyataan valid/tidak, juga digunakan untuk membuktikan teorema dalam matematika.

1.2 Kalimat Lengkap

Definition

Kalimat dikatakan **lengkap** jika paling sedikit memuat **subjek** dan **predikat.**

Example

1. Ali makan (**L**)
2. Menulis buku (**TL**)
3. Setiap hari, matahari terbit di sebelah timur (**L**)

Definition

Kalimat dikatakan **memiliki arti** jika kalimat tersebut dapat **dipahami** maksudnya dalam pembicaraan, baik tertulis maupun secara lisan.

1.2 Kalimat Lengkap

Examples

1. Senja resah terapung.
2. Dari masing-masing **buku** keluar akar.
3. Barang siapa meniru, memalsukan uang kertas **dan/atau** dengan sengaja menyimpan uang yang patut diduga palsu.
4. Jangan menyontek !
5. Apakah anda sudah makan ?
6. Si Fulan tidak masuk sekolah.

Apakah anda **paham** maksud kalimat di atas?

1.3 Semesta Pembicaraan

"Di bidang **Matematika** setiap simbol, kata atau kalimat harus mempunyai arti yang tunggal"

Definition

Semesta Pembicaraan adalah himpunan semua objek-objek yang berada atau yang dibentangkan di dalam pembicaraan.

Example

Apa yang menjadi semesta pembicaraan dari kalimat berikut?

1. Amir lebih kecil daripada setiap anggota.
2. Ada anggota yang lebih kecil daripada 1.

1.3 Semesta Pembicaraan

Problem

1. *Tentukan semesta pembicaraannya agar persamaan* $x^2 - x - 2 = 0$ *mempunyai*
    1. *Tepat satu penyelesaian*
    2. *Tepat dua penyelesaian*
2. *Tentukan semesta pembicaraannya agar persamaan* $x^2 + 1 = 0$ *mempunyai penyelesaian.*

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI
2. $2 + 2 = 4$

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI
2. $2 + 2 = 4$
3. Ibukota Provinsi Gorontalo adalah Limboto

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI
2. $2 + 2 = 4$
3. Ibukota Provinsi Gorontalo adalah Limboto
4. $13 \geq 15$

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI
2. $2 + 2 = 4$
3. Ibukota Provinsi Gorontalo adalah Limboto
4. $13 \geq 15$
5. Suhu dipermukaan laut 21 derajat

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI
2. $2 + 2 = 4$
3. Ibukota Provinsi Gorontalo adalah Limboto
4. $13 \geq 15$
5. Suhu dipermukaan laut 21 derajat
6. Pemuda itu tinggi

1.4 Proposisi

Definition

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai **benar** atau **salah**, tetapi tidak dapat bernilai keduanya sekaligus. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut **nilai kebenaran**.

Examples

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Soekarno adalah presiden pertama RI
2. $2 + 2 = 4$
3. Ibukota Provinsi Gorontalo adalah Limboto
4. $13 \geq 15$
5. Suhu dipermukaan laut 21 derajat
6. Pemuda itu tinggi
7. Kehidupan hanya di planet Bumi

1.4 Proposisi

Example

Perhatikan kalimat-kalimat berikut:

1. Jam berapa Kereta Api Trans Sulawesi tiba di Gorontalo?
2. Serahkan bukumu sekarang.
3. $x + 3 = 8$
4. $x > 3$

   bukan merupakan proposisi.
5. Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$,maka $2n$ adalah bilangan genap.

   adalah proposisi yang bernilai benar.

Berdasarkan kedua contoh sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa proposisi selalu dinyatakan sebagai kalimat berita, bukan kalimat tanya atau perintah.

1.4 Proposisi

Problem

Tetukan apakah kalimat-kalimat berikut ini merupakan kalimat yang mempunyai arti atau kalimat tanpa arti atau kalimat deklaratif. Jika deklaratif, tentukan merupakan kalimat bernilai benar atau salah.

1. *Semoga Allah mengabulkan permohonanmu.*
2. *Bagaimana kabar anda hari ini?*
3. *Tidak ada bilangan desimal yang lebih kecil dari semua bilangan bulat.*
4. *Bilangan 6 menghabiskan bilangan 72.*
5. *Ada hari dimana manusia tidak membutuhkan oksigen.*
6. *Setiap bilangan jika dikuadratkan hasilnya non-negatif.*
7. *Setiap bilangan pasti rasional atau irrasional*

1.5 Kalimat terbuka

Misal sebuah kalimat:

"x merupakan bilangan negatif"

Kalimat ini tidak dapat dinyatakan benar atau salah karena memuat **variabel bebas**. Kalimat dapat dinyatakan benar atau salah jika variabel x diganti dengan bilangan tertentu.

Definition

Kalimat lengkap yang bukan kalimat tanya, tapi tidak bisa ditentukan benar atau salahnya disebut **kalimat terbuka.**

Example

S_P : Himpunan semua bilangan nyata. tentukan jenis kalimat berikut:

1. "$x < z < y$"
2. "Untuk setiap pasangan x dan y jika $x < y$, maka terdapat z yang memenuhi $x < z < y$"

Problem

1. *Tentukan apakah kalimat-kalimat berikut ini merupakan kalimat terbuka atau kalimat deklaratif. Jika kalimat deklaratif apakah bernilai benar atau salah?*
2. *Kalimat berikut semestanya himpunan semua manusia:*
    1. *Tono lebih tinggi daripada Tini*
    2. *Balita lebih rentan terhadap penyakit daripada lansia*
    3. *Si x lebih pandai daripada si y*
3. *Kalimat berikut semestanya himpunan semua bilangan nyata:*
    1. $xy < x^2$
    2. $x^2 - x - 2 = 0$
    3. $x + (-x) = 0 = -x + x$
    4. $x^2 + 4x - 12 \leq 0$

○ ○ ○ Kalimat Majemuk ○ ○○

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi

1. **Konjungsi** p dan q dinyatakan dengan notasi $p \wedge q$, adalah proposisi "p dan q."

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi

1. **Konjungsi** p dan q dinyatakan dengan notasi $p \wedge q$, adalah proposisi "p dan q."
2. **Disjungsi** p atau q dinyatakan dengan notasi $p \vee q$, adalah proposisi "p atau q."

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi

1. **Konjungsi** p dan q dinyatakan dengan notasi $p \wedge q$, adalah proposisi "p dan q."
2. **Disjungsi** p atau q dinyatakan dengan notasi $p \vee q$, adalah proposisi "p atau q."
3. **Negasi** dari p dinyatakan dengan notasi $\sim p$ adalah proposisi "tidak p atau bukan p."

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Example

Diketahui proposisi-proposisi berikut:
p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah
Maka
$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah
$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah
$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan (Hari ini *tidak* hujan)

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Example

Diketahui proposisi-proposisi berikut:
p : Hari ini hujan
q : Hari ini dingin
Maka
$q \vee \sim p$: Hari ini dingin atau hari ini tidak hujan atau dengan kata lain "Hari ini dingin atau tidak hujan"
$\sim p \wedge \sim q$: Hari ini tidak hujan dan hari ini tidak dingin atau dengan kata lain "Hari ini tidak hujan maupun dingin"
$\sim (\sim p)$: Tidak benar hari ini tidak hujan atau dengan kata lain "Salah bahwa hari ini tidak hujan"

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Example

Diketahui proposisi-proposisi berikut:
p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan
Nyatakan proposisi berikut ke dalam ekspresi logika dalam bentuk notasi simbolik:

1. Pemuda itu tinggi dan tampan
2. Pemuda itu tinggi tetapi tidak tampan
3. Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
4. tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
5. Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
6. tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

1. $p \wedge q$

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

1. $p \wedge q$
2. $p \wedge \sim q$

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

1. $p \wedge q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \wedge \sim q$

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

1. $p \wedge q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \wedge \sim q$
4. $\sim (\sim p \vee \sim q)$

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

1. $p \wedge q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \wedge \sim q$
4. $\sim (\sim p \vee \sim q)$
5. $p \vee (\sim p \wedge q)$

2.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

1. $p \wedge q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \wedge \sim q$
4. $\sim (\sim p \vee \sim q)$
5. $p \vee (\sim p \wedge q)$
6. $\sim (\sim p \wedge q)$

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "Jika p maka q" disebut proposisi bersyarat (**implikasi**) dan dinotasikan dengan

$$p \Rightarrow q$$

Proposisi p disebut **hipotesis** (atau **antesenden** atau **premis** atau **kondisi**) dan proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Example

a. Jika adik lulus ujian, maka ia mendapat hadiah
b. Jika suhu mencapai $80^0\ C$, maka alarm berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Implikasi "$A \Rightarrow B$" yang dinyatakan sesuai fakta (bernilai benar) dapat diucapkan:

1. "Jika A, maka B" atau "Bila A, maka B", atau "B bila A"

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Implikasi "$A \Rightarrow B$" yang dinyatakan sesuai fakta (bernilai benar) dapat diucapkan:

1. "Jika A, maka B" atau "Bila A, maka B", atau "B bila A"
2. "A hanya jika B" atau "A hanya bila B"
   Karena jika tidak B, berarti B tidak terjadi atau dengan kata lain B salah, maka pasti tidak A, artinya A bernilai salah.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Implikasi "$A \Rightarrow B$" yang dinyatakan sesuai fakta (bernilai benar) dapat diucapkan:

1. "Jika A, maka B" atau "Bila A, maka B", atau "B bila A"
2. "A hanya jika B" atau "A hanya bila B"
   Karena jika tidak B, berarti B tidak terjadi atau dengan kata lain B salah, maka pasti tidak A, artinya A bernilai salah.
3. A merupakan syarat cukup untuk B
   Karena jika A benar (terjadi), maka kondisi tersebut mencukupi untuk pasti B terjadi. Dengan kata lain B benar.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Implikasi "$A \Rightarrow B$" yang dinyatakan sesuai fakta (bernilai benar) dapat diucapkan:

1. "Jika A, maka B" atau "Bila A, maka B", atau "B bila A"
2. "A hanya jika B" atau "A hanya bila B"
   Karena jika tidak B, berarti B tidak terjadi atau dengan kata lain B salah, maka pasti tidak A, artinya A bernilai salah.
3. A merupakan syarat cukup untuk B
   Karena jika A benar (terjadi), maka kondisi tersebut mencukupi untuk pasti B terjadi. Dengan kata lain B benar.
4. B merupakan syarat perlu untuk A.
   Terjadinya B merupakan suatu keharusan yang diperlukan agar A terjadi. Karena jika B tidak terjadi, maka A pun tidak terjadi. Sebaliknya, terjadinya B tidak menjadi jaminan pasti terjadinya A. Agar A pasti terjadi, mungkin diperlukan fakta lain.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Example

Misal dosen mengatakan : "Jika nilai UAS anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk mata kuliah ini". Apakah dosen anda berkata jujur atau bohong? Tinjau 4 kasus berikut:

1. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini dosen anda benar.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Example

Misal dosen mengatakan : "Jika nilai UAS anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk mata kuliah ini". Apakah dosen anda berkata jujur atau bohong? Tinjau 4 kasus berikut:

1. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini dosen anda benar.
2. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda tidak mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini dosen anda bohong (pernyataannya salah)

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Example

Misal dosen mengatakan : "Jika nilai UAS anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk mata kuliah ini". Apakah dosen anda berkata jujur atau bohong? Tinjau 4 kasus berikut:

1. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda mendapat nilai A. Dalam kasus ini dosen anda benar.
2. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda tidak mendapat nilai A. Dalam kasus ini dosen anda bohong (pernyataannya salah)
3. Nilai UAS anda dibawah 80, dan anda mendapat nilai A. Dalam kasus ini, dosen anda tidak bisa dikatakan bohong. Mungkin ada pertimbangan lain sehingga memberikan nilai A.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Example

Misal dosen mengatakan : "Jika nilai UAS anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk mata kuliah ini". Apakah dosen anda berkata jujur atau bohong? Tinjau 4 kasus berikut:

1. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini dosen anda benar.
2. Nilai UAS anda diatas 80, dan anda tidak mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini dosen anda bohong (pernyataannya salah)
3. Nilai UAS anda dibawah 80, dan anda mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini, dosen anda tidak bisa dikatakan bohong. Mungkin ada pertimbangan lain sehingga memberikan nilai A.
4. Nilai UAS anda dibawah 80, dan anda tidak mendapat nilai A.
   Dalam kasus ini, dosen anda benar.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Example

Ubahlah proposisi berikut ke dalam bentuk proposisi " Jika p, maka q ":

1. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
2. Orang itu ingin berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
3. Fulan dapat mengambil mata kuliah Pengantar Logika hanya jika ia sudah lulus matematika dasar.
4. Syarat cukup agar anda dapat beasiswa adalah IPK di atas 3.50.
5. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
6. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Jika es yang mencair dikutub, maka permukaan air laut naik.*

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Jika es yang mencair dikutub, maka permukaan air laut naik.*
2. *Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia ingin berangkat.*

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Jika es yang mencair dikutub, maka permukaan air laut naik.*
2. *Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia ingin berangkat.*
3. *Jika Fulan mengambil mata kuliah Pengantar Logika, maka ia sudah lulus matematika dasar.*

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Jika es yang mencair dikutub, maka permukaan air laut naik.*
2. *Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia ingin berangkat.*
3. *Jika Fulan mengambil mata kuliah Pengantar Logika, maka ia sudah lulus matematika dasar.*
4. *Pernyataan yang diberikan equivalen dengan "IPK di atas 3.50 adalah syarat cukup agar anda dapat beasiswa" atau "Jika IPK di atas 3.50, maka anda dapat beasiswa".*

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Jika es yang mencair dikutub, maka permukaan air laut naik.*
2. *Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia ingin berangkat.*
3. *Jika Fulan mengambil mata kuliah Pengantar Logika, maka ia sudah lulus matematika dasar.*
4. *Pernyataan yang diberikan equivalen dengan "IPK di atas 3.50 adalah syarat cukup agar anda dapat beasiswa" atau "Jika IPK di atas 3.50, maka anda dapat beasiswa".*
5. *Pernyataan yang diberikan equivalen dengan "Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia" atau "Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan".*

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Jika es yang mencair dikutub, maka permukaan air laut naik.*
2. *Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia ingin berangkat.*
3. *Jika Fulan mengambil mata kuliah Pengantar Logika, maka ia sudah lulus matematika dasar.*
4. *Pernyataan yang diberikan equivalen dengan "IPK di atas 3.50 adalah syarat cukup agar anda dapat beasiswa" atau "Jika IPK di atas 3.50, maka anda dapat beasiswa".*
5. *Pernyataan yang diberikan equivalen dengan "Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia" atau "Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan".*
6. *Jika hutan ditebangi, maka banjir bandang terjadi.*

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Contoh: Misalkan

x	:	Anda berusia 17 tahun
y	:	Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan proposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

1. Hanya jika anda berusia 17 tahun, maka anda dapat memperoleh SIM.
2. Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
3. Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah berusia 17 tahun.
4. Jika anda tidak dapat memperoleh SIM, maka anda tidak berusia 17 tahun.
5. Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p hanya jika* q. *Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p hanya jika q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.
2. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p syarat cukup bagi q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $p \Rightarrow q$.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p hanya jika q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.
2. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p syarat cukup bagi q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $p \Rightarrow q$.
3. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "q syarat perlu bagi p. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p hanya jika q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.
2. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p syarat cukup bagi q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $p \Rightarrow q$.
3. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "q syarat perlu bagi p. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.
4. $\sim q \Rightarrow \sim p$

2.2 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Solution

1. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p hanya jika q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.
2. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "p syarat cukup bagi q. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $p \Rightarrow q$.
3. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "q syarat perlu bagi p. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $q \Rightarrow p$.
4. $\sim q \Rightarrow \sim p$
5. *Ingat kembali bahwa* $p \Rightarrow q$ *dapat dibaca "q bilamana p. Jadi, pernyataan yang diberikan dinotasikan dengan* $\sim p \Rightarrow \sim q$.

2.3 Bi-Implikasi

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "p jika dan hanya jika q" disebut **bi-implikasi** dan dinotasikan dengan

$$p \Leftrightarrow q$$

Example

Pernyataan majemuk berikut adalah bi-implikasi

a. $1 + 1 = 2$ jika dan hanya jika $2 + 2 = 4$
b. Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembapan udara tinggi
c. Jika anda orang kaya, maka anda mempunyai banyak uang, demikian sebaliknya.

2.3 Bi-Implikasi

Example

Tentukan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "$p \Leftrightarrow q$":

1. Jika udara di luar panas, maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim, maka udara di luar panas.
2. Syarat cukup dan perlu agar anda lulus ujian adalah anda giat belajar.
3. Anda dapat beasiswa jika anda berprestasi dan anda berprestasi jika anda dapat beasiswa.
4. Jika anda lama menonton TV maka mata anda lelah, begitupun sebaliknya.
5. Kereta api datang terlambat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

2.3 Bi-Implikasi

Solution

1. *Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.*

2.3 Bi-Implikasi

Solution

1. *Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.*
2. *Anda giat belajar adalah syarat cukup dan perlu agar anda lulus ujian.*

2.3 Bi-Implikasi

Solution

1. *Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.*
2. *Anda giat belajar adalah syarat cukup dan perlu agar anda lulus ujian.*
3. *Anda dapat beasiswa jika dan hanya jika anda berprestasi.*

2.3 Bi-Implikasi

Solution

1. *Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.*
2. *Anda giat belajar adalah syarat cukup dan perlu agar anda lulus ujian.*
3. *Anda dapat beasiswa jika dan hanya jika anda berprestasi.*
4. *Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton TV.*

2.3 Bi-Implikasi

Solution

1. *Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.*
2. *Anda giat belajar adalah syarat cukup dan perlu agar anda lulus ujian.*
3. *Anda dapat beasiswa jika dan hanya jika anda berprestasi.*
4. *Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton TV.*
5. *Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkannya pada hari itu.*

2.4 Latihan 1

1. Misalkan p adalah Iwan bisa berbahasa Inggris, q adalah Iwan bisa berbahasa Jerman, dan r adalah Iwan bisa berbahasa Prancis. Terjemahkan kalimat berikut ke dalam notasi simbolik:
   a. Iwan bisa berbahasa Jerman tetapi tidak bahasa Prancis
   b. Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Jerman, atau dia tidak bisa berbahasa Prancis atau bahasa Jerman.
   c. Tidak benar bahwa Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Prancis, tetapi tidak bahasa Jerman.
   d. Tidak benar bahwa Iwan tidak bisa berbahasa Inggris, Prancis, maupun Jerman.

2. Nyatakan proposisi berikut sebagai proposisi bersyarat "Jika p maka q"
   a. Mahasiswa bisa lulus sarjana apabila ia telah menyelesaikan 144 SKS.
   b. Syarat cukup bagi Lukman untuk mengambil mata kuliah Pengantar Logika adalah ia sudah lulus mata kuliah Kalkulus 1.
   c. Perlu mendaki 100 meter lagi untuk mencapai gunung semeru.

◦ ◦ ◦ Tabel Kebenaran ◦ ◦◦

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Nilai kebenaran dari kalimat majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya dan dihubungkan dengan operator logika.

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi

1. **Konjungsi** $p \wedge q$ bernilai **benar** jika p dan q keduanya benar, selain itu bernilai **salah**.

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Nilai kebenaran dari kalimat majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya dan dihubungkan dengan operator logika.

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi

1. **Konjungsi** $p \wedge q$ bernilai **benar** jika p dan q keduanya benar, selain itu bernilai **salah**.
2. **Disjungsi** $p \vee q$ bernilai **salah** jika p dan q keduanya salah, selain itu bernilai **benar**.

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Nilai kebenaran dari kalimat majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya dan dihubungkan dengan operator logika.

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi

1. **Konjungsi** $p \wedge q$ bernilai **benar** jika p dan q keduanya benar, selain itu bernilai **salah**.
2. **Disjungsi** $p \vee q$ bernilai **salah** jika p dan q keduanya salah, selain itu bernilai **benar**.
3. **Negasi** p yaitu $\sim p$ bernilai **benar** jika p salah dan bernilai **salah** jika p benar.

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Example

Misalkan
p : 17 adalah bilangan prima
q : Bilangan prima selalu ganjil
Jelas bahwa p bernilai **benar** dan q bernilai **salah** sehingga konjungsi
$p \wedge q$: 17 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil
dinyatakan **salah**.

Salah satu cara praktis untuk menentukan nilai kebenaran suatu kalimat majemuk adalah melalui **Tabel Kebenaran**.

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Berikut Tabel Kebenaran untuk Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	**B**	**B**
B	**S**	**S**
S	**B**	**S**
S	**S**	**S**

Disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	**B**	**B**
B	**S**	**B**
S	**B**	**B**
S	**S**	**S**

Negasi

p	$\sim p$
B	**S**
S	**B**

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Example

Jika p, q dan r adalah proposisi. Buatlah tabel kebenaran dari ekspresi logika

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$$

Solution

Terdapat 3 buah proposisi. Tiap proposisi mempunyai 2 kemungkinan nilai (Benar atau Salah), sehingga banyaknya kombinasi dari semua proposisi adalah $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Catatan: *Jika terdapat n buah proposisi, maka Tabel Kebenaran terdiri dari* 2^n *baris.*

3.1 Konjungsi, Disjungsi, dan Negasi

Solution

Dengan demikian Tabel Kebenaran dinyatakan sebagai berikut:

p	q	r	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim q \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
B	**B**	**B**	*S*	*B*	*S*	*B*
B	**B**	**S**	*S*	*B*	*S*	*B*
B	**S**	**B**	*B*	*S*	*B*	*B*
B	**S**	**S**	*B*	*S*	*S*	*S*
S	**B**	**B**	*S*	*S*	*S*	*S*
S	**B**	**S**	*S*	*S*	*S*	*S*
S	**S**	**B**	*B*	*S*	*B*	*B*
S	**S**	**S**	*B*	*S*	*S*	*S*

3.2 Implikasi dan Bi-Implikasi

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi.

1. **Implikasi** $p \Rightarrow q$ bernilai **salah** hanya jika p benar dan q salah, selain itu bernilai **benar**.

Tabel Kebenaran Implikasi dan Bi-Implikasi dinyatakan sebagai berikut:

Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	**B**	**B**
B	**S**	**S**
S	**B**	**B**
S	**S**	**B**

Bi-Implikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	**B**	**B**
B	**S**	**S**
S	**B**	**S**
S	**S**	**B**

3.2 Implikasi dan Bi-Implikasi

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi.

1. **Implikasi** $p \Rightarrow q$ bernilai **salah** hanya jika p benar dan q salah, selain itu bernilai **benar**.
2. **Bi-Implikasi** $p \Leftrightarrow q$ bernilai **benar** jika p dan q bernilai sama (keduanya benar atau keduanya salah), selain itu bernilai **salah**.

Tabel Kebenaran Implikasi dan Bi-Implikasi dinyatakan sebagai berikut:

Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Bi-Implikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

3.2 Implikasi dan Bi-Implikasi

Example

Sebuah pulau didiami oleh 2 suku asli. Penduduk suku pertama selalu berkata jujur, sementara penduduk suku kedua selalu berkata bohong. Ketika anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk, apakah di pulau ini terdapat emas atau tidak? Ia menjawab "**Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran**". Cari kesimpulan apakah terdapat emas di pulau tersebut?

Solution

Misalkan
p : *Saya selalu mengatakan kebenaran*
q : *Terdapat emas di pulau ini*
Dengan demikian pernyataan penduduk tersebut dapat dinyatakan

$$p \Leftrightarrow q$$

3.2 Implikasi dan Bi-Implikasi

Solution

Selanjutnya kita akan meninjau 2 kemungkinan kasus terkait pernyataan penduduk ini.
Kasus 1: *Penduduk tersebut berasal dari suku yang senantiasa berkata jujur*
Kaus 2: *Penduduk tersebut berasal dari suku yang senantiasa berkata bohong*
Kasus 1: *Penduduk tersebut berkata jujur. Hal ini berarti p benar dan jawaban terhadap pertanyaan kita ($p \Leftrightarrow q$) juga benar. Berdasarkan tabel kebenaran bi-implikasi*

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	**B**	**B**

terlihat bahwa jika p benar dan $p \Leftrightarrow q$ benar, maka q harus benar. Dengan demikian, terdapat emas di pulau tersebut.

3.2 Implikasi dan Bi-Implikasi

Solution

Kaus 2: *Penduduk tersebut berkata bohong. Hal ini berarti p tidak benar dan jawaban terhadap pertanyaan kita* ($p \Leftrightarrow q$) *juga tidak benar. Berdasarkan tabel kebenaran bi-implikasi*

p	q	$p \Leftrightarrow q$
S	**B**	**S**

terlihat bahwa jika p tidak benar dan $p \Leftrightarrow q$ *tidak benar, maka q harus benar. Dengan demikian, tidak terdapat emas di pulau tersebut.*

3.3 Tautologi dan Kontradiksi

Kalimat majemuk dapat selalu bernilai benar untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya atau selalu bernilai salah untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya. Kondisi semacam ini dinyatakan dalam definisi berikut.

Definition

Sebuah kalimat majemuk disebut **Tautologi** jika ia **benar** untuk semua kasus dan disebut **Kontradiksi** jika ia **salah** untuk semua kasus.

Example

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah sebuah Tautologi sedangkan $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi. Buktikan dengan Tabel Kebenaran.

3.3 Tautologi dan Kontradiksi

Solution

1.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
B	**B**	B	S	**B**
B	**S**	S	B	**B**
S	**B**	S	B	**B**
S	**S**	S	B	**B**

3.3 Tautologi dan Kontradiksi

Solution

1.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
B	**B**	B	S	**B**
B	**S**	S	B	**B**
S	**B**	S	B	**B**
S	**S**	S	B	**B**

2.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
B	**B**	B	B	S	**S**
B	**S**	S	B	S	**S**
S	**B**	S	B	S	**S**
S	**S**	S	S	B	**S**

3.3 Equivalen

Terkadang dua buah proposisi majemuk dapat dikombinasikan dalam berbagai cara namun semua kombinasi tersebut tetap menhasilkan tabel kebenaran yang sama. Hal seperti ini disebut equivalen secara logika dan dinyatakan dalam definisi sebagai berikut.

Definition

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, \cdots)$ dan $Q(p, q, \cdots)$ disebut **equivalen** secara logika, dinotasikan $P(p, q, \cdots) \equiv Q(p, q, \cdots)$ jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang **identik**.

Example

Misalkan p dan q adalah proposisi. Tunjukkan bahwa proposisi majemuk $\sim (p \wedge q)$ equivalen dengan proposisi majemuk $\sim p \vee \sim q$ dengan Tabel Kebenaran.

3.3 Equivalen

Solution

1.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
B	**B**	B	**S**
B	**S**	S	**B**
S	**B**	S	**B**
S	**S**	S	**B**

3.3 Equivalen

Solution

1.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
B	**B**	B	**S**
B	**S**	S	**B**
S	**B**	S	**B**
S	**S**	S	**B**

2.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
B	**B**	S	S	**S**
B	**S**	S	B	**B**
S	**B**	B	S	**B**
S	**S**	B	B	**B**

Dengan demikian $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ *dengan urutan nilai kebenaran* S, B, B, B.

3.3 Equivalen

Example

Dua orang pedagang mengeluarkan motto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar motto "**Barang bagus tidak murah**", sedangkan pedagang kedua mempunyai motto "**Barang murah tidak bagus**". Apakah kedua motto pedagang tersebut sama?

Solution

Untuk menguji kesamaan kedua motto tersebut, kita perlu menggunakan Tabel Kebenaran. Misalkan

p : *Barang itu bagus*

q : *Barang itu murah*

Sehingga

Motto 1: Jika barang itu bagus, maka barang itu tidak murah, $p \Rightarrow \sim q$

Motto 2: Jika barang itu murah, maka barang itu tidak bagus, $q \Rightarrow \sim p$

3.3 Equivalen

Solution

Tabel kebenaran dari kedua motto tersebut dinyatakan sebagai berikut:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow \sim p$
B	**B**	*S*	*S*	**S**	**S**
B	**S**	*S*	*B*	**B**	**B**
S	**B**	*B*	*S*	**B**	**B**
S	**S**	*B*	*B*	**B**	**B**

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa motto dari kedua pedagang tersebut sama.

3.3 Equivalen

Example

Tunjukkan bahwa $p \Rightarrow q$ equivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$, atau $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

Solution

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	**B**	*S*	**B**	**B**
B	**S**	*S*	**S**	**S**
S	**B**	*B*	**B**	**B**
S	**S**	*B*	**B**	**B**

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $p \Rightarrow q$ equivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

3.4 Disjungsi Ekslusif

Kata "atau" dalam operasi logika dapat digunakan dengan 2 cara, yaitu cara **inklusif** dan **ekslusif**. Dikatakan **disjungsi inklusif** jika dalam bentuk "p atau q atau keduanya" sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya, artinya disjungsi "p atau q" bernilai benar jika salah satu dari proposisinya benar atau keduanya benar. Adapun **disjungsi ekslusif** jika dalam bentuk "p atau q tetapi bukan keduanya", artinya disjungsi "p atau q" bernilai benar hanya jika salah satu proposisinya bernilai benar (tapi bukan keduanya).

Definition

Misalkan p dan q adalah proposisi. **Ekslusif or** p dan q, dinyatakan dengan notasi $p \veebar q$ adalah proposisi yang bernilai benar hanya jika salah satu dari p dan q bernilai benar, selain itu bernilai salah.

3.4 Disjungsi Ekslusif

Example

Misalkan kalimat:

1. Tenaga pengajar yang dibutuhkan harus menguasai **Matematika atau Biologi**.
2. Pemenang lomba akan mendapatkan hadiah berupa **TV atau Uang Tunai**.

Lakukan identifikasi, diantara 2 kalimat ini, mana yang termasuk disjungsi inklusif dan mana yang termasuk disjungsi ekslusif?

Tabel kebenaran untuk Disjungsi Ekslusif dinyatakan sebagai berikut

p	q	$p \underline{\vee} q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

3.5 Latihan 2

1. Gunakan tabel kebenaran untuk menunjukkan bahwa tiap implikasi berikut adalah tautologi

   a. $[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$
   b. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   c. $\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim q$
   d. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

2. Tuliskan tabel kebenaran untuk setiap proposisi berikut:

   a. $(p \vee q) \wedge \sim p$
   b. $\sim (p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$
   c. $(\sim p \vee \sim q) \vee p$
   d. $\sim (p \wedge q) \wedge (r \wedge \sim p)$
   e. $(p \vee q) \Rightarrow \sim$
   f. $(\sim q \Rightarrow p) =$

3. Gunakan tabel kebenaran untuk memperlihatkan hukum distributif

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$$

4. Perlihatkan bahwa $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ *dan* $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ **tidak akivalen**.

○ ○ ○ **Negasi Kalimat Majemuk** ○ ○○

4.1 Negasi Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Bi-Implikasi

4.1.1 Negasi Konjungsi

Negasi dari konjungsi $p \wedge q$ dinotasikan dengan $\overline{p \wedge q}$, yaitu $\overline{p} \vee \overline{q}$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran sebagai berikut

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$		$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$
B	B	B	**S**		**S**	S	S
B	S	S	**B**	$\equiv$	**B**	B	S
S	B	S	**B**		**B**	S	B
S	S	S	**B**		**B**	B	B

Tabel nilai kebenaran menunjukkan bahwa nilai kebenaran dari $\overline{p \wedge q}$ identik dengan $\overline{p} \vee \overline{q}$.

Example

Negasi dari kalimat "**Dia pandai berbahasa Inggris dan pandai matematika**", adalah "**Dia tidak pandai bahasa Inggris atau tidak pandai matematika**".

4.1 Negasi Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Bi-Implikasi

4.1.2 Negasi Disjungsi

Negasi dari disjungsi $p \vee q$ dinotasikan dengan $\overline{p \vee q}$, yaitu $\overline{p} \wedge \overline{q}$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran sebagai berikut

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$		$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$
B	B	B	**S**		**S**	S	S
B	S	B	**S**	$\equiv$	**S**	B	S
S	B	B	**S**		**S**	S	B
S	S	S	**B**		**B**	B	B

Tabel nilai kebenaran menunjukkan bahwa nilai kebenaran dari $\overline{p \vee q}$ identik dengan $\overline{p} \wedge \overline{q}$.

Example

Negasi dari kalimat "**Mahasiswa tersebut lulus mata kuliah matematika atau lulus mata kuliah fisika**", adalah "**Mahasiswa tersebut tidak lulus mata kuliah matematika dan tidak lulus mata kuliah fisika**".

4.1 Negasi Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Bi-Implikasi

4.1.3 Negasi Implikasi

Negasi dari disjungsi $p \Rightarrow q$ dinotasikan dengan $\overline{p \Rightarrow q}$, yaitu $p \wedge \overline{q}$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran sebagai berikut

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$		$p \wedge \overline{q}$	$\overline{q}$	p
B	B	B	**S**		**S**	S	B
B	S	S	**B**	$\equiv$	**B**	B	B
S	B	B	**S**		**S**	S	S
S	S	B	**S**		**S**	B	S

Tabel nilai kebenaran menunjukkan bahwa nilai kebenaran dari $\overline{p \Rightarrow q}$ identik dengan $p \wedge \overline{q}$.

Example

Negasi dari kalimat "**Jika dia rajin belajar, maka dia lulus ujian**", adalah "**Dia rajin belajar dan dia tidak lulus ujian**".

4.1 Negasi Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Bi-Implikasi

4.1.4 Negasi Bi-Implikasi

Negasi dari disjungsi $p \Leftrightarrow q$ dinotasikan dengan $\overline{p \Leftrightarrow q}$, yaitu $(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran sebagai berikut

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p \Leftrightarrow q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$(\overline{p} \wedge q)$	$(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$
B	B	B	**S**	S	S	S	S	**S**
B	S	S	**B**	S	B	B	S	**B**
S	B	S	**B**	B	S	S	B	**B**
S	S	B	**S**	B	B	S	S	**S**

Tabel nilai kebenaran menunjukkan bahwa nilai kebenaran dari $\overline{p \Leftrightarrow q}$ identik dengan $(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$.

4.1 Negasi Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Bi-Implikasi

Example

Negasi dari kalimat "*Mahasiswa dapat meraih gelar sarjana jika dan hanya jika dia berhasil menyelesaikan 140 SKS*", adalah "*Mahasiswa meraih gelar sarjana dan dia tidak menyelesaikan 140 SKS* atau *Mahasiswa tidak meraih gelar sarjana walaupun dia menyelesaikan 140 SKS*".

Problem

Tentukan negasi dari kalimat berikut:

1. *Amir mahasiswa terpandai di angkatannya.*
2. *Ada mahasiswa yang kaya dan mempunyai IPK 3,80.*
3. *Setiap mahasiswa pernah bolos kuliah atau tidak mengerjakan tugas.*
4. *Jika mahasiswa berprestasi, maka dia diberi bantuan beasiswa.*

4.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Terdapat bentuk implikasi lain yang berkaitan dengan $p \Rightarrow q$, yaitu proposisi sederhana yang merupakan varian dari bentuk implikasi. Ketiga varian tersebut adalah konvers, invers, dan kontraposisi.

Definition

Misalkan p dan q proposisi. Jika diketahui suatu implikasi $p \Rightarrow q$, maka

1. **Konvers** didefinisikan dengan $q \Rightarrow p$
2. **Invers** didefinisikan dengan $\sim p \Rightarrow \sim q$
3. **Kontraposisi** didefinisikan dengan $\sim q \Rightarrow \sim p$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui Tabel Kebenaran.

4.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Tabel Kebenaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisi.

				Implikasi	*Konvers*	*Invers*	*Kontraposisi*
p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	**B**	B	B	**B**
B	S	S	B	**S**	B	B	**S**
S	B	B	S	**B**	S	S	**B**
S	S	B	B	**B**	B	B	**B**

Tabel ini menunjukkan bahwa proposisi bersyarat $p \Rightarrow q$ equivalen secara logika dengan kontraposisinya, $\sim q \Rightarrow \sim p$.

4.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Example

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari kalimat: "Jika Amir mempunyai sebuah mobil, maka ia termasuk orang yang kaya raya".

Solution

Konvers: *Jika Amir orang yang kaya raya, maka ia mempunyai sebuah mobil.*
Invers: *Jika Amir tidak mempunyai sebuah mobil, maka ia bukan orang yang kaya raya.*
Kontraposisi : *Jika Amir bukan orang yang kaya raya, maka ia tidak mempunyai sebuah mobil.*

4.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Problem

Tentuka konvers, invers, dan kontraposisi dari kalimat berikut:

1. *Jika dia bersalah, maka ia dimasukkan ke dalam penjara.*
2. *Jika 6 lebih besar dari 10, maka 6 bukan bilangan negatif.*
3. *Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.*
4. *Hanya jika ia tidak terlambat, maka ia akan mendapatkan pekerjaan itu.*
5. *Perlu ada angin agar layang-layang dapat terbang.*
6. *Cukup hari hujan agar hari ini dingin*

4.3 Latihan 3

1. Diberikan pernyataan "Perlu memiliki IPK diatas 3.00 agar anda bisa dapat bantuan beasiswa"
   a. Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "Jika p, Maka q"
   b. Tentukan negasi, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyaatn tersebut
2. Tentukan negasi dari kalimat berikut:
   a. Bilangan x lebih besar daripada 1 dan lebih kecil daripada 10
   b. Anda lulus ujian jika dan hanya jika anda mampu meraih angka di atas 70
3. Nyatakan inkaran, konvers dan kontraposisi dari implikasi berikut
   a. Sebuah bilangan positif hanya prima jika ia tidak mempunyai pembagi selain 1 dan dirinya sendiri
   b. Sebuah program dikatakan bagus hanya jika waktu eksekusinya singkat atau kebutuhan memorinya sedikit

◦ ◦ ◦ Hukum-Hukum Logika Proposisi ◦ ◦◦

5.1 Hukum Identitas

1. Hukum Identitas

$$a)\ p \vee \mathbf{S} \Leftrightarrow p$$
$$b)\ p \wedge \mathbf{B} \Leftrightarrow p$$

2. Tabel Kebenaran

$a)\ p \vee \mathbf{S} \Leftrightarrow p$:

p	$\mathbf{S}$	$p \vee \mathbf{S}$
B	S	**B**
S	S	**S**

$b)\ p \wedge \mathbf{B} \Leftrightarrow p$:

p	$\mathbf{B}$	$p \wedge \mathbf{B}$
B	B	**B**
S	B	**S**

5.2 Hukum null/Dominasi

1. Hukum null/Dominasi

$$\begin{aligned} a)\ p \vee \mathbf{B} &\Leftrightarrow \mathbf{B} \\ b)\ p \wedge \mathbf{S} &\Leftrightarrow \mathbf{S} \end{aligned}$$

2. Tabel Kebenaran

$a)\ p \vee \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B}$:

p	$\mathbf{B}$	$p \vee \mathbf{B}$
B	**B**	**B**
S	**B**	**B**

$b)\ p \wedge \mathbf{S} \Leftrightarrow \mathbf{S}$:

p	$\mathbf{S}$	$p \wedge \mathbf{S}$
B	**S**	**S**
S	**S**	**S**

5.3 Hukum Negasi dan Hukum Idempoten

1. Hukum Negasi

$$a)\ p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{B}$$
$$b)\ p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{S}$$

2. Hukum Idempoten

$$a)\ p \vee p \Leftrightarrow p$$
$$b)\ p \wedge p \Leftrightarrow p$$

Problem

Buatlah Tabel Kebenaran dari kedua hukum ini.

5.4 Hukum Involusi dan Hukum Absorpsi

1. Hukum Inovasi (Negasi Ganda)

$$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$$

2. Hukum Absorpsi (Penyerapan)

$$\begin{aligned} a)\ p \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow p \\ b)\ p \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow p \end{aligned}$$

Problem

Buatlah Tabel Kebenaran dari Hukum Absorpsi.

5.5 Hukum Komutatif dan Hukum Asosiatif

1. Hukum Komutatif

$$\begin{aligned} a)\ p \vee q &\Leftrightarrow q \vee p \\ b)\ p \wedge q &\Leftrightarrow q \wedge p \end{aligned}$$

2. Hukum Asosiatif

$$\begin{aligned} a)\ p \vee (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \\ b)\ p \wedge (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \end{aligned}$$

Problem

Buatlah Tabel Kebenaran dari kedua hukum tersebut.

5.6 Hukum Distributif dan Hukum De Morgan

1. Hukum Distributif

$$\begin{aligned} a)\ p \vee (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ b)\ p \wedge (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}$$

2. Hukum De Morgan

$$\begin{aligned} a) \quad \sim \quad (p \wedge q) &\Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \\ b) \quad \sim \quad (p \vee q) &\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \end{aligned}$$

Problem

Buatlah Tabel Kebenaran dari kedua hukum tersebut.

5.7 Pembuktian Keeqivalenan dengan Hukum Logika

Jika proposisi majemuk memiliki n buah proposisi atomik, maka terdapat 2^n baris kombinasi tabel kebenaran, sehingga akan sangat tidak praktis membuktikannya dengan Tabel Kebenaran. Sebagai solusi, pembuktiannya dapat dilakukan dengan menggunakan hukum-hukum logika di atas. Hukum-Hukum tersebut dapat digunakan untuk membuktikan keekivalenan dua buah proposisi tanpa menggunakan Tabel Kebenaran.

Example

Tunjukan bahwa $p \vee \sim (p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

5.7 Pembuktian Keeqivalenan dengan Hukum Logika

Solution

$$
\begin{aligned}
p\vee \sim (p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \textit{(Hukum De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (p\vee \sim p) \wedge (p\vee \sim q) && \textit{(Hukum Distributif)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{B} \wedge (p\vee \sim q) && \textit{(Hukum Negasi)}\\
&\Leftrightarrow p\vee \sim q && \textit{(Hukum Identitas)}
\end{aligned}
$$

Example

Buktikan hukum penyerapan $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$.

Solution

$$
\begin{aligned}
p \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow (p \vee \mathbf{S}) \wedge (p \vee q) && \textit{(Hukum Identitas)}\\
&\Leftrightarrow p \vee (\mathbf{S} \wedge q) && \textit{(Hukum Distributif)}\\
&\Leftrightarrow p \vee \mathbf{S} && \textit{(Hukum Null)}\\
&\Leftrightarrow p && \textit{(Hukum Identitas)}
\end{aligned}
$$

5.8 Latihan 4

1. Gunakan hukum-hukum logika proposisi untuk menunjukkan bahwa pernyataan berikut keduanya adalah tautologi
   (i) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   (ii) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
2. Gunakan hukum-hukum logika proposisi untuk menentukan inkaran dan kontraposisi dari pernyataan berikut:
   "Dia tidak pergi ke kampus maupun ke perpustakaan bilamana hari ini hujan"
3. Perlihatkan bahwa pernyataan $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ dan $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ tidak eqivalen.

○ ○ ○ Inferensi atau Penarikan Kesimpulan ○ ○○

6.1 Inferensi

Jika kita diberikan beberapa proposisi, maka kita dapat menarik kesimpulan baru dari deretan proposisi tersebut. Proses penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi disebut **inferensi.**

Terdapat beberapa kaidah inferensi atau penarikan kesimpulan, diantarabnya:

1. Modus Ponen
2. Modus Tollen
3. Silogisme Hipotesis
4. Silogisme Disjungtif
5. SImplikasi
6. Penjumlahan
7. Konjungsi

6.2 Modus Ponen

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$, yang dalam hal ini p dan $p \Rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah kesimpulan atau konklusi. Kaidah modus ponen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Simbol $\therefore$ dibaca "jadi" atau "oleh karena itu". Modes ponen menyatakan bahwa jika hipotesis p dan implikasi $p \Rightarrow q$ benar, maka konklusi q benar.

6.2 Modus Ponen

Example

Misalkan implikasi "Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap" dan hipotesis "20 habis dibagi 2" keduanya benar, maka menurut modus ponen, inferensi berikut benar.

Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap
20 habis dibagi 2

$\therefore$ 20 bilangan genap

6.3 Modus Tollen

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \sim p$, yang dalam hal ini $\sim q$ dan $p \Rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan $\sim p$ adalah kesimpulan atau konklusi. Kaidah modus tollen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Example

Misalkan implikasi "Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil" dan hipotesis "n^2 bernilai genap" keduanya benar, maka menurut modus tollen, inferensi berikut benar.

$$\begin{array}{ll} & \text{Jika } n \text{ bilangan ganjil, maka } n^2 \text{ bernilai ganjil} \\ & n^2 \text{ bernilai genap} \\ \hline \therefore & n \text{ bukan bilangan ganjil} \end{array}$$

6.4 Silogisme Hipotesis

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Example

Misalkan implikasi "Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian" dan implikasi "Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah" keduanya benar, maka menurut kaidah silogisme hipotesis, inferensi berikut benar.

$$\begin{array}{c} \text{Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian} \\ \text{Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah} \\ \hline \therefore \ \text{Jika saya belajar dengan giat, maka saya cepat menikah} \end{array}$$

6.5 Silogisme Disjungtif

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Example

Misalkan disjungsi "Anda belajar dengan giat atau anda menikah tahun depan" dan hipotesis "Anda tidak belajar dengan giat" keduanya benar, maka menurut kaidah silogisme disjungtif, inferensi berikut benar.

$$\begin{array}{c} \text{Anda belajar dengan giat atau anda menikah tahun depan} \\ \text{Anda tidak belajar dengan giat} \\ \hline \therefore \text{Anda menikah tahun depan} \end{array}$$

6.6 Simplikasi

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \Rightarrow q$, yang dalam hal ini, p dan q adalah hipotesis, sedangkan p adalah konklusi. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Example

Penarikan kesimpulan berikut menggunakan kaidah simplikasi:
"Ungke adalah mahasiswa UNG dan mahasiswa IAIN. Oleh karena itu, Ungke adalah mahasiswa UNG."
Inferensi ini juga dapat ditulis

$$\frac{\text{Ungke adalah mahasiswa UNG dan mahasiswa IAIN}}{\therefore \text{Ungke adalah mahasiswa UNG}}$$

6.7 Penjumlahan

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $p \Rightarrow (p \vee q)$. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

Example

Penarikan kesimpulan berikut menggunakan kaidah simplikasi:
"Ungke memprogramkan mata kuliah Pengantar Dasar Logika. Oleh karena itu, Ungke memprogramkan mata kuliah Pengantar Dasar Logika atau mengulang mata kuliah Aljabar Linear"
Inferensi ini juga dapat ditulis

$$\frac{\text{Ungke memprogramkan mata kuliah Pengantar Dasar Logika}}{\therefore \text{Ungke memprogramkan mata kuliah Pengantar Dasar Logika atau mengulang mata kuliah Aljabar Linear}}$$

6.8 Konjungsi

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $((p) \wedge (q)) \Rightarrow (p \wedge q)$. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Example

$$\begin{array}{c} \text{Ungke memprogramkan matakuliah Pengantar Dasar Logika} \\ \text{Ungke mengulang matakuliah Aljabar Linear} \\ \hline \therefore \text{Ungke memprogramkan mata kuliah Pengantar Dasar Logika} \\ \text{dan mengulang mata kuliah Aljabar Linear} \end{array}$$

6.9 Latihan 5

1. Sebagian besar orang percaya bahwa harimau jawa telah punah. Tetapi, pada suatu hari Agus membuat pernyataan kontroversial berikut:

   (i) Saya melihat harimau di hutan
   (ii) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat serigala.

   Misal kita diberitahu bahwa Agus terkadang berbohong dan kadang jujur, gunakan tabvel kebenaran untuk memeriksa apakah Agus benar-benar melihat harimau atau tidak?

2. Periksa kesahihan argumen berikut:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim q \\ \sim r \Rightarrow p \\ q \\ \hline \therefore r \end{array}$$