PENGANTAR LOGIKA MATEMATIKA

Induksi Matematika

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

Oktober 2017

◦ ◦ ◦ Induksi Matematika ◦ ◦ ◦

1.1 Proposisi tentang Bilangan Bulat

- Proposisi dalam ini mengaitkan suatu masalah yang dihubungkan dengan bilangan bulat.
- Dalam matematika, kita banyak menjumpai teorema yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Dalam hal ini $p(n)$ disebut **fungsi proposisi**.

Example

Misalkan sebuah proposisi
$p(n)$: Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah $\frac{n(n+1)}{2}$.
Buktikan bahwa $p(n)$ benar.

1.1 Proposisi tentang Bilangan Bulat

Solution

Kita dapat menduga bahwa $p(n)$ *benar, dengan mencoba beberapa biangan bulat. Misal :*
Untuk $n = 3$,

$$p(3) = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3(3+1)}{2}$$

Untuk $n = 5$,

$$p(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5(5+1)}{2}$$

Dengan nilai-nilai n *yang lain kita akan dapat kesimpulan yang serupa. Walaupun demikian, pendekatan semacam ini* **tidak cukup untuk digunakan sebagai alat bukti** *bahwa* $p(n)$ *benar untuk semua* n.

1.1 Proposisi tentang Bilangan Bulat

Example

Beberapa contoh proposisi yang serupa:

1. Setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.
2. Jumlah n buah bilangan ganjil positif yang pertama adalah n^2.
3. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.
4. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n.

Proposisi-proposisi seperti ini dapat dibuktikan kebenarannya dengan **Induksi Matematika**.

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Prinsip Induksi Sederhana:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bilangan bulat yang berlaku untuk semua bilangan bulat positif n.
Proposisi ini dapat dibuktikan kebenarannya jika memenuhi basis dan hipotesis berikut:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ benar untuk setiap $k \geq 1$.
   Akibatnya, $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 disebut **basis induksi**.
Langkah 2 disebut **hipotesis induksi**.
Dengan menunjukkan bahwa kedua langkah ini benar, maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

- **Basis induksi** digunakan untuk menunjukkan bahwa **pernyataan benar** bila n diganti dengan 1 (bilangan bulat terkecil).
- Selanjutnya kita harus memperlihatkan bahwa **implikasi** $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ **juga benar** untuk setiap bilangan bulat positif.
- Dalam hal ini, kita perlu menunjukkan bahwa $p(k+1)$ tidak mungkin salah jika $p(k)$ benar.

- Induksi matematika tidak mengasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk semua bilangan bulat positif.
- Hanya ditunjukkan bahwa jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ juga benar.

Dari asumsi ini, setelah menunjukkan bahwa $p(1)$ benar, maka $p(2)$ benar. Karena $p(2)$ benar, berarti $p(3)$ juga benar, dan seterusnya.
Dengan demikian, secara intuitif kita telah menunjukkan bahwa Langkah 1 dan Langkah 2 menunujukkan bahwa $p(1), p(2), \cdots, p(n)$ semuanya benar.

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Example

Tunjukkan melalui induksi matematika bahwa:

"Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah $\dfrac{n(n+1)}{2}$."

Solution

Diketahui

$$p(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$$

1. *Basis Induksi*
   $p(1)$ *benar, karena untuk* $n = 1$, *diperoleh:*

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

2. *Hipotesis induksi*

   Misal $p(n)$ benar untuk $n = k$, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

   Kita harus menunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

2. *Untuk itu, kita tunjukkan bahwa:*

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+3+\cdots+k)+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

2. *Karena Langkah 1 dan Langkah 2 telah terbukti benar, maka untuk setiap bulangan bulat positif n, terbukti benar proposisi*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$$

Example

Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa "jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2."

$$p(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

Diketahui

$$p\left(n\right):1+3+5+\cdots+\left(2n-1\right)=n^{2}$$

1. *Basis Induksi*
   $p(1)$ *benar, karena untuk* $n=1$, *diperoleh:*

$$\begin{aligned} 1 &= 1^{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

Diketahui

$$p\left(n\right): 1+3+5+\cdots+\left(2n-1\right)=n^2$$

1. *Basis Induksi*
   $p(1)$ benar, karena untuk $n=1$, diperoleh:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. *Hipotesisi induksi*
   Asumsikan $p(n)$ benar, untuk $n=k$, yaitu

$$p\left(k\right): 1+3+5+\cdots+\left(2k-1\right)=k^2$$

Jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ harus benar.

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

2. *Hipotesisi induksi*

   Jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ harus benar, yaitu

$$p\,(k+1) : 1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$$

   Oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar:

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) &= [1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+ \\ &= k^2+(2k+1) \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

   Dengan demikian $p\,(n)$ benar.

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Example

Untuk semua $n \geq 1$, tunjukkan melalui induksi matematika bahwa:

$$"n^3 + 2n \text{ adalah kelipatan } 3"$$

Solution

Diketahui

$$p(n) : n^3 + 2n \; adalah \; kelipatan \; 3, n \geq 1$$

1. *Basis Induksi*
   $p(1)$ *benar, karena untuk* $n = 1$, *diperoleh:*

$$1^3 + 2(1) = 3 \; adalah \; kelipatan \; 3$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

2. *Hipotesis induksi*
   Asumsikan $p(n)$ *benar untuk* $n = k$,, *yaitu*

$$k^3 + 2k \text{ adalah kelipatan } 3$$

   Jika $p(k)$ *benar, maka* $p(k+1)$ *harus benar, yaitu*

$$(k+1)^3 + 2(k+1) \text{ adalah kelipatan } 3$$

1.2 Prinsip Induksi Sederhana

Solution

2. *Oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa* $p(k+1)$ *benar:*

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= \left(k^3+3k^2+3k+1\right)+(2k+2)\\ &= k^3+3k^2+3k+2k+3\\ &= \left(k^3+2k\right)+\left(3k^2+3k+3\right)\\ &= \left(k^3+2k\right)+3\left(k^2+k+1\right)\end{aligned}$$

Karena $\left(k^3+2k\right)$ *adalah kelipatan 3 dan* $3\left(k^2+k+1\right)$ *adalah kelipatan 3, maka* $p(k+1)$ *adalah jumlah 2 bilangan kelipatan 3, artinya* $p(k+1)$ *juga kelipatan 3.*
Dengan demikian $p(n)$ *terbukti benar.*

1.3 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

- Kadang kita ingin membuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
- Tidak hanya bilangan bulat yang dimulai dari 1 saja.
- Dalam hal ini digunakan prinsip induksi yang dirampatkan, sebagai berikut:

Prinsip Induksi yang Dirampatkan:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bilangan bulat yang berlaku untuk semua bilangan bulat positif $n \geq n_0$.
Proposisi ini dapat dibuktikan kebenarannya jika memenuhi basis dan hipotesis berikut:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ benar untuk setiap $k \geq n_0$.
   Akibatnya, $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq n_0$.

1.3 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Example

Untuk semua bilangan bulat tak negatif n, buktikan dengan induksi matematik bahwa

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Solution

Diketahui

$$p(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \; n \geq 0$$

1. *Basis Induksi:*
   $p\left(0\right)$ *benar, karena untuk* $n = 0$*, berlaku*

$$\begin{aligned} 2^0 &= 2^{0+1} - 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

1.3 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Solution

2. *Hipotesis Induksi:*
   Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ harus benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k\right) + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

1.4 Latihan 6

Dengan induksi matematik, buktikan proposisi berikut:

1. Untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$(1 \times 2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 2^3) + \cdots + (n \times 2^n) = (n-1)\,2^{n+1} + 2$$

2. Untuk setiap n bilangan asli,

$$n^3 - n \ \textit{habis dibagi}\ 3$$

3. Untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$3 + 11 + \cdots + (8n-5) = 4n^2 - n$$

4. Untuk setiap bilangan asli n , a bilangan real dan $a \neq 0$ berlaku

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$