PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

PDB Orde Pertama

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

September 2018

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

- Persamaan diferensial orde satu dengan bentuk umum

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

dapat diselesaikan dengan ide dasar turunan.

- Ingat (kalkulus) bahwa turunan total dari suatu fungsi $F = F(x, y)$, dinotasikan dF dan didefinisikan

$$dF = F_x(x, y)\, dx + F_y(x, y)\, dy \tag{2}$$

- Jika ruas kanan pada persamaan (2) mengespresikan hal sama dengan persamaan(1), maka fakta dapat digunakan untuk menyelesaikan model persamaan diferensial yang diberikan.

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Definition (PD Eksak)

Persamaan diferensial orde satu dengan bentuk (1)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

dikatakan sebagai persamaan diferensial **eksak** pada suatu daerah R dari bidang$-xy$ jika terdapat suatu fungsi $F(x,y)$, sedemikian sehingga berlaku

$$F_{xy}(x,y) = M_y(x,y) \quad \text{dan} \quad F_{yx}(x,y) = N_x(x,y) \tag{3}$$

untuk semua (x,y) di R.

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

- Fungsi $F(x, y)$ yang memenuhi (3) dinamakan **fungsi potensial** dari persamaan diferensial (1), sehingga dapat ditulis

$$dF(x, y) = 0$$

- Jika $F(x, y) = c$ mempunyai turunan parsial orde kedua yang kontinu, maka berlaku

$$F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y)$$

- Akibatnya, jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ terdefinisi dan mempunyai turunan parsial kontinu, maka berlaku

$$F_{xy}(x, y) = M_y(x, y) \quad \text{dan} \quad F_{yx}(x, y) = N_x(x, y)$$

- Dengan demikian, jika persamaan (1) merupakan diferensial total dari $F(x, y)$, maka berlaku

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Theorem (Solusi Umum PD Eksak)

Misal diberikan persamaan diferensial eksak (1)

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

maka **Solusi Umum** *persamaan diferensial ini adalah fungsi* $F(x, y) = c$, *dimana* $F(x, y)$ *memenuhi*

$$F_x(x, y) = M(x, y) \quad dan \quad F_y(x, y) = N(x, y)$$

dan c *merupakan konstanta sebarang.*

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Proof.

Tulis kembali persamaan diferensial tersebut dalam bentuk

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

sehingga dengan asumsi eksak, diperoleh

$$F_x(x,y) + F_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Karena

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

Maka

$$F(x,y) = c, \text{ untuk sebarang } c \text{ konstanta}$$

□

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Masalah selanjutnya adalah:

1. Bagaimana suatu persamaan diferensial dikatakan eksak?
2. Bagaimana menentukan fungsi potensialnya?

Perhatikan Teorema berikut

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Theorem

Misalkan M, N, dan turunan parsial pertama M_y, N_y kontinu dalam suatu daerah R pada bidang$-xy$, maka persamaan diferensial biasa (1)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

dikatakan **eksak** *untuk semua x, y di R jika dan hanya jika*

$$M_y(x,y) = N_y(x,y) \tag{4}$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Proof.

Andaikan persamaan diferensial tersebut eksak, maka berdasarkan definisi keeksakan, terdapat fungsi $F(x, y)$ sedemikian sehingga

$$F_x = M \quad dan \quad F_y = N$$

Dengan turunan parsial, diperoleh

$$F_{xy} = M_y \quad dan \quad F_{yx} = N_x$$

Karena M_y *dan* N_x kontinu di R maka F_{xy} *dan* F_{yx} juga kontinu di R, sehingga

$$F_{xy} = F_{yx} \quad atau \quad M_y = N_x$$

□

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Sebaliknya jika persamaan (4) dipenuhi, akan ditunjukkan bahwa terdapat fungsi potensial $F(x,y)$ sedemikian sehingga

$$F_x(x,y) = M(x,y) \tag{5}$$

dan

$$F_y(x,y) = N(x,y) \tag{6}$$

Berikut diberikan langkah-langkah secara umum untuk menentukan solusi umum dari persamaan diferensial eksak, yang dalam hal ini sama dengan mencari fungsi potensial $F(x,y)$.

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

1. Solusi umum dari persamaan diferensial (1) adalah fungsi $F(x, y) = c$, dimana fungsi $F(x, y)$ diberikan oleh

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \tag{7}$$

dengan $g(y)$ dihasilkan dari

$$F_y(x,y) = N(x,y)$$

2. Diferensialkan persamaan (7) terhadap y, diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

3. Dengan demikian, fungsi $g(y)$ pada solusi umum persamaan diferensial eksak diberikan oleh

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \right) dy + c$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

1. Dengan cara yang sama, penentuan $F(x, y) = c$, dapat dilakukan melalui pendekatan lain, yakni

$$F(x, y) = \int N(x, y)\, dx + g(x) \tag{8}$$

   dengan $g(x)$ dihasilkan dari

$$F_x(x, y) = M(x, y)$$

2. Diferensialkan persamaan (8) terhadap x, diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)\, dy + g'(x) = M(x, y)$$

3. Dengan demikian, fungsi $g(x)$ pada solusi umum persamaan diferensial eksak diberikan oleh

$$g(x) = \int \left(M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)\, dy \right) dx + c$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Example

Tentukan apakah persamaan diferensial berikut eksak atau bukan?

1. $[1+\ln(xy)]\ dx+\frac{x}{y}dy=0$
2. $x^2y\ dx-\left(xy^2+y^3\right)dy=0$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

1. *Misalkan*

$$M(x,y) = [1 + \ln(xy)] \; dan \; N(x,y) = \frac{x}{y}$$

2. *Maka*

$$M_y(x,y) = \frac{1}{y} \quad dan \quad N_x = \frac{1}{y} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow PD\ Eksak$$

3. *Misalkan*

$$M(x,y) = x^2 y \; dan \; N(x,y) = xy^2 + y^3$$

Maka

$$M_y(x,y) = x^2 \quad dan \quad N_x = 2xy \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow PD\ Non\ Eksak$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Example

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

1. $\left(5x^2 + 2xy^3\right) dx + \left(3x^2y^2 - 2y^3\right) dy = 0$
2. $\frac{xy-1}{x} dx + \frac{xy+1}{y} dy = 0; \quad x > 0, y > 0$
3. $2x^2 \frac{dy}{dx} + 4xy = 3 \sin x; \quad y\left(2\pi\right) = 0$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

1. *Misal* $M(x,y) = \left(5x^2 + 2xy^3\right)$ *dan* $N(x,y) = \left(3x^2y^2 - 2y^3\right)$
   Maka $M_y = 6xy^2 = N_x \Rightarrow$ *PD Eksak*
   Selanjutnya diberikan fungsi potensial

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + g(y) \\ &= \int \left(5x^2 + 2xy^3\right) dx + g(y) \\ &= \frac{5}{3}x^3 + x^2y^3 + g(y) \end{aligned}$$

   Langkah selanjutnya, fungsi $g(y)$ *diperoleh dari*

$$F_y(x,y) = N(x,y)$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

1. *Fungsi $g(y)$ diperoleh dari*

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= N(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5}{3}x^3 + x^2y^3 + g(y)\right) &= 3x^2y^2 - 2y^3 \\ g'(y) &= -2y^3 \end{aligned}$$

$g(y)$ diperoleh dengan mengintegralkan $g'(y)$

$$g(y) = \int -2y^3 dy = -\frac{1}{2}y^4 + c$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$\frac{5}{3}x^3 + x^2y^3 - \frac{1}{2}y^4 = c$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

2. *Misal* $M(x,y) = \frac{xy-1}{x}$ *dan* $N(x,y) = \frac{xy+1}{y}$
Maka $M_y = 1 = N_x \Rightarrow$ *PD Eksak*
Selanjutnya diberikan fungsi potensial

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + g(y) \\ &= \int \left(\frac{xy-1}{x}\right) dx + g(y) \\ &= xy - \ln x + g(y) \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya, fungsi $g(y)$ *diperoleh dari*

$$F_y(x,y) = N(x,y)$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

2. *Fungsi $g(y)$ diperoleh dari*

$$\begin{aligned}
F_y(x,y) &= N(x,y) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(xy - \ln x + g(y)\right) &= \frac{xy+1}{y} \\
x + g'(y) &= \frac{xy+1}{y} \\
g'(y) &= \frac{xy+1}{y} - x \\
g'(y) &= -\frac{1}{y}
\end{aligned}$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

2. *$g(y)$ diperoleh dengan mengintegralkan $g'(y)$*

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \int -\frac{1}{y}\,dy \\
&= -\ln y + c
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$
\begin{aligned}
xy - \ln x - \ln y &= c \\
xy - \ln xy &= c
\end{aligned}
$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

3. *Persamaan Diferensial yang diberikan dapat ditulis kembali dalam bentuk*

$$(4xy - 3\sin x)\,dx + 2x^2 dy = 0; \quad y(2\pi) = 0$$

Misal $M(x,y) = 4xy - 3\sin x$ *dan* $N(x,y) = 2x^2$
Maka $M_y = 4x = N_x \Rightarrow$ *PD Eksak*
Selanjutnya diberikan fungsi potensial

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int N(x,y)\,dy + g(x) \\ &= \int \left(2x^2\right) dy + g(x) \\ &= 2x^2 y + g(x) \end{aligned}$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

3. *Langkah selanjutnya, fungsi* $g(x)$ *diperoleh dari*

$$
\begin{aligned}
F_x(x,y) &= M(x,y) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y + g(x)\right) &= 4xy - 3\sin x \\
4xy + g'(x) &= 4xy - 3\sin x \\
g'(x) &= 4xy - 3\sin x - 4xy \\
g'(x) &= -3\sin x
\end{aligned}
$$

dengan mengintegralkan $g'(x)$ *terhadap* x, *diperoleh*

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int -3\sin x \; dx \\
&= 3\cos x + c
\end{aligned}
$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Solution

3. *Dengan demikian, solusi umum PD adalah*

$$2x^2y + 3\cos x = c$$

Untuk menemukan solusi khusus, digunakan nilai awal $y(2\pi) = 0$, *sehingga*

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^2(0) + 3\cos(2\pi) + c &= 0 \\ c &= -3\cos(2\pi) \\ &= -3 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi khusus PD adalah

$$2x^2y + 3\cos x = -3$$

2.7 Persamaan Diferensial Eksak

Problem

1. *Selesaikan ketiga soal sebelumnya dengan pendekatan yang berbeda.*
2. *Selesaikan PD dengan nilai awal berikut jika memenuhi kriteria eksak*

$$(1 + ye^{xy})dx + (xe^{xy} + 2y)dy = 0; \qquad y = 2 \quad jika \quad x = 0$$

* Soal-Soal Latihan 5

Problem

Untuk soal no $1-3$, *tentukan apakah PD yang diberikan memenuhi kriteria eksak atau tidak:*

1. $\left(y-3x^2\right)dx+xdy=0$
2. $\left[\cos\left(xy\right)-xy\sin\left(xy\right)\right]dx-x^2\sin\left(xy\right)dy=0$
3. $ye^{xy}dx+\left(2y-xe^{xy}\right)dy=0$

   Untuk soal no $4-7$, *selesaikan persamaan diferensial yang diberikan:*
4. $\left(4e^{2x}+2xy-y^2\right)dx+\left(x-y\right)^2dy=0$
5. $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$
6. $\left(2xy+\cos y\right)dx+\left(x^2-x\sin y-2y\right)dy=0$
7. $\left[\left(1+\cos x\ \ln\left(1+y\right)\right]dx+\frac{1+\sin x}{1+y}dy=0;\quad y=2\quad jika\quad x=0$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

- Pada subbab ini kita akan membahas ssuatu persamaan diferensial tak eksak namun dapat direduksi menjadi persamaan diferensial eksak.
- Kemungkinan untuk mereduksi PD non eksak menjadi PD eksak adalah dengan mengalikan PD tersebut dengan suatu fungsi taknol.
- Fungsi taknol tersebut selanjutnya akan disebut dengan **Faktor Integrasi.**

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasil

Definition

Suatu fungsi taknol $I(x, y)$ dikatakan **Faktor Integrasi** dari

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

jika persamaan diferensial

$$I(x, y)\, M(x, y)\, dx + I(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0$$

memenuhi kriteria **eksak**.

Example

Tunjukkan bahwa $I = \cos(xy)$ merupakan faktor integrasi dari persamaan diferensial

$$[\tan(xy) + xy]\, dx + x^2 dy = 0$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

Kalikan I dengan PD yang diberikan, diperoleh

$$\begin{aligned} \cos(xy)\left[\tan(xy) + xy\right] dx + x^2 \cos(xy)\, dy &= 0 \\ \left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right] dx + x^2 \cos(xy)\, dy &= 0 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} M_y &= x\cos(xy) + \left(x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy)\right) \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \\ &= N_x \end{aligned}$$

PD Eksak $\Rightarrow I = \cos(xy)$ *merupakan Faktor Integrasi dari PD yang diberikan.*

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Untuk menemukan Faktor Integrasi dari suatu PD non eksak, perhatikan bentuk umum PD

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Andaikan $I(x,y)$ adalah faktor integrasi sehingga diperoleh PD Eksak

$$IM\ dx + IN\ dy = 0 \tag{9}$$

Karena persamaan (9) merupakan PD Eksak, maka berlaku

$$\begin{aligned} D_y(IM) &= D_x(IN) \\ IM_y + I_yM &= IN_x + I_xN \\ IM_y - IN_x &= I_xN - I_yM \\ I(M_y - N_x) &= I_xN - I_yM \end{aligned}$$

Perhatikan persamaan terakhir

$$I(M_y - N_x) = I_xN - I_yM \tag{10}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Faktor integrasi untuk mereduksi persamaan diferensial non eksak ke persamaan diferensial eksak dapat dicari dengan mengacu pada persamaan (10) .Dari persamaan ini, dapat diperoleh beberapa jenis faktor integrasi antara lain :

1. Faktor integrasi yang hanya bergantung pada x, $I = I(x)$
2. Faktor integrasi yang hanya bergantung pada y, $I = I(y)$
3. Faktor integrasi yang bergantung pada x dan y, $I = I(xy)$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8.1 Faktor Integrasi Fungsi x

Jika faktor integrasi I hanya merupakan fungsi dari x, yaitu $I(x)$ maka diperoleh

$$I_x = \frac{dI}{dx} \quad dan \quad I_y = 0$$

Akibatnya, persamaan (10) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} I(M_y - N_x) &= \frac{dI}{dx} N - (0) M \\ \frac{dI}{dx} &= \frac{I(M_y - N_x)}{N} \\ \frac{1}{I} dI &= \frac{(M_y - N_x)}{N} dx \end{aligned}$$

dimana

$$\frac{(M_y - N_x)}{N}$$

merupakan fungsi yang hanya bergantung pada x.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8.1 Faktor Integrasi Fungsi x

Selanjutnya didefinisikan

$$p(x) = \frac{(M_y - N_x)}{N}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{I} dI = p(x) \ dx \tag{11}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (11) diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{I} dI &= \int p(x) \ dx \\ \ln I &= \int p(x) \ dx \end{aligned}$$

Artinya, faktor integrasi I yang merupakan fungsi x adalah

$$I(x) = e^{\int p(x) \ dx}; \quad p(x) = \frac{(M_y - N_x)}{N} \tag{12}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8.2 Faktor Integrasi Fungsi y

Jika faktor integrasi I hanya merupakan fungsi dari y, yaitu $I(y)$ maka diperoleh

$$I_x = 0 \quad dan \quad I_y = \frac{dI}{dy}$$

Akibatnya, persamaan (10) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} I(M_y - N_x) &= (0)N - \frac{dI}{dy}M \\ \frac{dI}{dy} &= -\frac{I(M_y - N_x)}{M} \\ \frac{1}{I}dI &= -\frac{(M_y - N_x)}{M}dy \end{aligned}$$

dimana

$$-\frac{(M_y - N_x)}{M}$$

merupakan fungsi yang hanya bergantung pada y.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8.2 Faktor Integrasi Fungsi y

Selanjutnya didefinisikan

$$q(y) = -\frac{(M_y - N_x)}{M}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{I} dI = q(y)\ dy \tag{13}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (13) diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{I} dI &= \int q(y)\ dy \\ \ln I &= \int q(y)\ dy \end{aligned}$$

Artinya, faktor integrasi I yang merupakan fungsi y adalah

$$I(x) = e^{\int q(y)\ dy}; \quad q(y) = -\frac{(M_y - N_x)}{M} \tag{14}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8.3 Faktor Integrasi Fungsi x dan y

Jika faktor integrasi I merupakan fungsi dari x dan y, $I(x, y)$, misalkan $z = xy$, sehingga $I = I(z)$. Dengan aturan rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= \frac{dI}{dz} . \frac{\partial z}{\partial x} = y \, \frac{dI}{dz} \\ \frac{\partial I}{\partial y} &= \frac{dI}{dz} . \frac{\partial z}{\partial y} = x \, \frac{dI}{dz} \end{aligned}$$

Akibatnya, persamaan (10) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} I\left(M_y - N_x\right) &= yN \, \frac{dI}{dz} - xM \, \frac{dI}{dz} \\ (yN - xM) \, \frac{dI}{dz} &= I\left(M_y - N_x\right) \\ \frac{1}{I} dI &= \left(\frac{M_y - N_x}{yN - xM}\right) dz; \quad \frac{M_y - N_x}{yN - xM} \text{ merupakan fungsi } z. \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

2.8.3 Faktor Integrasi Fungsi x dan y

Selanjutnya didefinisikan

$$r(z) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{I} dI = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} dz \qquad (15)$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (15) diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{I} dI &= \int r(z)\ dz \\ \ln I &= \int r(z)\ dz \end{aligned}$$

Artinya, faktor integrasi I yang merupakan fungsi z adalah

$$I(z) = e^{\int r(z)\ dz}; \quad r(z) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} \qquad (16)$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Examples

Tentukan faktor integrasi dan solusi umum persamaan diferensial berikut:

1. $(4x^3 + x^2 - y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0$
2. $(y^2 e^x + xy)\ dx + (4ye^x + \frac{3}{2}x^2 + 4y)\ dy = 0$
3. $(3y^3 - 5x^2y)\ dx + (5xy^2 - 3x^3)\ dy = 0$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

1. *Dari persamaan diferensial yang diberikan, diperoleh*

$$\begin{aligned} M(x,y) &= 4x^3 + x^2 - y^2 \quad \textit{dan} \quad N(x,y) = 2xy \\ M_y(x,y) &= -2y \quad \textit{dan} \quad N_x(x,y) = 2y \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$M_y - N_x = -2y - 2y = -4y \neq 0$$

sehingga persamaan yang diberikan bukan persamaan diferensial eksak. Oleh karena itu perlu ditentukan faktor integrasi.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

1. *Selanjutnya perhatikan bahwa*

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-4y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

memuat variabel x, sehingga faktor integrasi I merupakan fungsi dari x. Definisikan

$$p(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x}$$

Dengan demikian diperoleh faktor integrasi

$$\begin{aligned} I(x) &= e^{\int p(x)\ dx} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \\ &= e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

1. *Kalikan faktor integrasi dengan PD awal diperoleh*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}\left[\left(4x^3 + x^2 - y^2\right)\, dx + 2xy\ dy\right] &= 0 \\ \left(4x + 1 - \frac{y^2}{x^2}\right)\, dx + \frac{2y}{x}\, dy &= 0 \end{aligned}$$

Dari PD baru ini dapat diidentifikasi bahwa

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) = -\frac{2y}{x^2}$$

yang menunjukkan bahwa persamaan telah tereduksi menjadi persamaan diferensial eksak.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

1. *Selanjutnya solusi umum diperoleh berupa* $F(x,y) = c$, *mengikuti*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int \left(4x + 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + g(y) \\ &= 2x^2 + x + \frac{y^2}{x} + g(y) \end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi $g'(y)$ *dapat diperoleh dengan*

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= N(x,y) \\ \frac{2y}{x} + g'(y) &= \frac{2y}{x} \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

1. *Dengan pengintegralan, diperoleh* $g(x)$

$$g(x) = k$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$2x^2 + x + \frac{y^2}{x} = k \quad atau \quad 2x^3 + x^2 + y^2 = kx$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

2. *Dari persamaan diferensial yang diberikan, diperoleh*

$$\begin{aligned} M(x,y) &= y^2e^x + xy \quad dan \quad N(x,y) = 4ye^x + \frac{3}{2}x^2 + 4y \\ M_y(x,y) &= 2ye^x + x \quad dan \quad N_x(x,y) = 4ye^x + 3x \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$M_y - N_x = 2ye^x + x - 4ye^x - 3x = -2ye^x - 2x \neq 0$$

sehingga persamaan yang diberikan bukan persamaan diferensial eksak. Oleh karena itu perlu ditentukan faktor integrasi.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

2. *Selanjutnya perhatikan bahwa*

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-2\left(ye^x + x\right)}{y\left(ye^x + x\right)} = -\frac{2}{y}$$

memuat variabel y, sehingga faktor integrasi I merupakan fungsi dari y. Definisikan

$$q(y) = -\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{2}{y}$$

Dengan demikian diperoleh faktor integrasi

$$\begin{aligned} I\left(y\right) &= e^{\int q(y)\ dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} \\ &= e^{2\ln y} = y^2 \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

2. *Kalikan faktor integrasi dengan PD awal diperoleh*

$$\begin{aligned} y^2[(y^2e^x + xy)\ dx + (4ye^x + \frac{3}{2}x^2 + 4y)\ dy] &= 0 \\ (y^4e^x + xy^3)\ dx + (4y^3e^x + \frac{3}{2}x^2y^2 + 4y^3)\ dy &= 0 \end{aligned}$$

Dari PD baru ini dapat diidentifikasi bahwa

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) = 4y^3e^x + 3xy^2$$

yang menunjukkan bahwa persamaan telah tereduksi menjadi persamaan diferensial eksak.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

2. *Selanjutnya solusi umum diperoleh berupa* $F(x,y) = c$, *mengikuti*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int \left(y^4 e^x + xy^3\right) dx + g(y) \\ &= y^4 e^x + \frac{1}{2}x^2 y^3 + g(y) \end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi $g'(y)$ *dapat diperoleh dengan*

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= N(x,y) \\ 4y^3 e^x + \frac{3}{2}x^2 y^2 + g'(y) &= 4y^3 e^x + \frac{3}{2}x^2 y^2 + 4y^3 \\ g'(x) &= 4y^3 e^x + \frac{3}{2}x^2 y^2 + 4y^3 - 4y^3 e^x - \frac{3}{2}x^2 y^2 \\ &= 4y^3 \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

2. *Dengan pengintegralan, diperoleh* $g(y)$

$$\begin{aligned} g(y) &= \int 4y^3 \, dy \\ &= y^4 + k \end{aligned}$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$y^4 e^x + \frac{1}{2}x^2 y^3 + y^4 = k$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

3. *Dari persamaan diferensial yang diberikan, diperoleh*

$$\begin{aligned} M(x,y) &= 3y^3 - 5x^2y \quad dan \quad N(x,y) = 5xy^2 - 3x^3 \\ M_y(x,y) &= 9y^2 - 5x^2 \quad dan \quad N_x(x,y) = 5y^2 - 9x^2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$M_y - N_x = 9y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 9x^2 = 4(x^2 + y^2) \neq 0$$

sehingga persamaan yang diberikan bukan persamaan diferensial eksak. Oleh karena itu perlu ditentukan faktor integrasi.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

3. *Selanjutnya perhatikan bahwa*

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{4(x^2 + y^2)}{y(5xy^2 - 3x^3) - x(3y^3 - 5x^2y)} = \frac{4(x^2 + y^2)}{2xy(x^2 + y^2)} = \frac{2}{xy}$$

memuat variabel x dan y, sehingga faktor integrasi I merupakan fungsi dari x dan y. Misalkan $z = xy$, sehingga diperoleh

$$r(z) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{z}$$

Dengan demikian diperoleh faktor integrasi

$$\begin{aligned} I(z) &= e^{\int r(z)\ dz} = e^{\int \frac{2}{z} dz} \\ &= e^{2 \ln z} = z^2 = (xy)^2 \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

3. *Kalikan faktor integrasi dengan PD awal diperoleh*

$$\begin{aligned} (xy)^2[(3y^3 - 5x^2y)\ dx + (5xy^2 - 3x^3)\ dy] &= 0 \\ (3x^2y^5 - 5x^4y^3)\ dx + (5x^3y^4 - 3x^5y^2)\ dy &= 0 \end{aligned}$$

Dari PD baru ini dapat diidentifikasi bahwa

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) = 15x^2y^4 - 15x^4y^2$$

yang menunjukkan bahwa persamaan telah tereduksi menjadi persamaan diferensial eksak.

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

3. *Selanjutnya solusi umum diperoleh berupa* $F(x,y) = c$, *mengikuti*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int N(x,y)\,dy + g(x) \\ &= \int \left(5x^3y^4 - 3x^5y^2\right) dy + g(x) \\ &= x^3y^5 - x^5y^3 + g(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi $g'(x)$ *dapat diperoleh dengan*

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= M(x,y) \\ 3x^2y^5 - 5x^4y^3 + g'(x) &= 3x^2y^5 - 5x^4y^3 \\ g'(x) &= 3x^2y^5 - 5x^4y^3 - 3x^2y^5 + 5x^4y^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Solution

3. *Dengan pengintegralan, diperoleh* $g(x)$

$$g(x) = k$$

Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$x^3y^5 - x^5y^3 = k$$

2.8 Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi

Berikut diberikan beberapa soal untuk latihan

Problem

1. $(x^2 - y^2 + x)dx + 2xydy = 0$
2. $\frac{x(1+y)}{1+x^2}dx + \ln\left(1 + x^2\right) dy = 0$
3. $(x - 2y)dx + (x^2 - 1)dy = 0$
4. $(3y + 3e^x y^{(2/3)})dx + (x - 1)dy = 0$
5. $2y^2 dx + (2x + 3xy + 2y)dy = 0$

* Soal-Soal Latihan 6

Problem

Untuk soal no $1-2$, tentukan apakah fungsi yang diberikan merupakan faktor integrasi dari PD yang diberikan:

1. $I(x,y) = \sec x, \; \left[2x - \left(x^2+y^2\right)\tan x\right] dx + 2y\ dy = 0$
2. $I(x,y) = y^{-2}e^{-x/y}, \; y\left[x^2 - 2xy\right] dx - x^3 dy = 0$

   Untuk soal no $3-6$, tentukan faktor integrasi dan solusi umum dari persamaan diferensial yang diberikan:
3. $x^2y\ dx + y\left(x^3 + e^{-3y}\sin y\right) dy = 0$
4. $xy\left[2\ln(xy) + 1\right] dx + x^2 dy = 0$
5. $\left(3xy - 2y^{-1}\right) dx + x\left(x + y^{-2}\right) dy = 0$
6. $2y\left(y + 2x^2\right) dx + x\left(4y + 3x^2\right) dy = 0$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "