KALKULUS LANJUT

Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

27 Agustus 2018

4. Turunan Fungsi Dua Peubah (Keterdiferensialan)

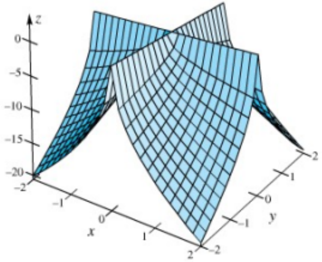
4.1 Pendahuluan

Pada subbab ini kita ingin memeriksa apakah suatu fungsi dua peubah mempunyai turunan di titik tertentu dan menentukan turunannya

4.1 Pendahuluan

Turuna Parsial Saja Tidak Cukup

Kita sudah mendefinisikan turunan parsial dari suatu fungsi dua peubah; tapi eksistensi turunan parsial di suatu titik tidak memberi kita informasi tentang nilai fungsi di sekitar titik tersebut.



4.2 Turunan Fungsi Satu Peubah

Turunan dari fungsi satu peubah $y = f(x)$ di $x = c$ didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Sayangnya bentuk ini **tidak dapat** diperumum ke fungsi dua peubah

$$f'(\overline{c}) = \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{f(\overline{c} + \overline{h}) - f(\overline{c})}{\overline{h}}$$

karena pembagian dengan vektor tidak terdefinisi

4.2 Turunan Fungsi Satu Peubah

Jika $y = f(x)$ mempunyai turunan di $x = c$ yaitu

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m$$

maka f **linear secara lokal** di $x \approx c$, yaitu

$$f(c+h) = f(c) + hm + h\epsilon(h)$$

dengan

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - m \right] = 0$$

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Fungsi dua peubah f dikatakan mempunyai turunan di $\mathbf{p} = (a, b)$ jika dan hanya jika f **linear secara lokal** di sekitar $\mathbf{p}$, yaitu

$$f\left(\overline{p} + \overline{h}\right) = f\left(\overline{p}\right) + \left(f_x\left(\overline{p}\right), f_y\left(\overline{p}\right)\right) \bullet \overline{h} + \overline{\epsilon}\left(\overline{h}\right) \overline{\bullet h}$$

dengan

$$\overline{\epsilon}\left(\overline{h}\right) = \left(\epsilon_1\left(\overline{h}\right), \epsilon_2\left(\overline{h}\right)\right), \qquad \overline{h} = (h_1, h_2)$$

dan

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{\epsilon}\left(\overline{h}\right) = \left(\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{\epsilon}_1\left(\overline{h}\right), \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{\epsilon}_2\left(\overline{h}\right)\right) = (0, 0)$$

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Vektor

$$\bigtriangledown f\left(\overline{p}\right) := \left(f_x\left(\overline{p}\right), f_y\left(\overline{p}\right)\right)$$

disebut **turunan** atau **gradien** f di **p**.

Jadi f mempunyai turunan di **p** jika dan hanya jika

$$f\left(\overline{p}+\overline{h}\right) = f\left(\overline{p}\right) + \bigtriangledown f\left(\overline{p}\right) \bullet \overline{h} + \overline{\epsilon}\left(\overline{h}\right) \overline{\bullet h}$$

dengan

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{\epsilon}\left(\overline{h}\right) = \overline{0}$$

Catatan, $\bigtriangledown$ disebut **Operator Del**

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Beberapa catatan:

Jika turunan fungsi satu peubah merupakan bilangan $f'(p)$, maka turunan fungsi dua peubah merupakan vektor

$$\bigtriangledown f\left(\overline{p}\right) := \left(f_x\left(\overline{p}\right), f_y\left(\overline{p}\right)\right)$$

Hasil kali

$$\bigtriangledown f\left(\overline{p}\right) \bullet \overline{h} \text{ dan } \overline{\epsilon}\left(\overline{h}\right) \overline{\bullet h}$$

merupakan hasilkali titik.

Definisi turunan fungsi tiga (atau lebih) peubah dapat dirumuskan secara serupa.

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Example

Turunan dari fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2$ di $(1,2)$ adalah

$$\begin{aligned} \triangledown f(1,2) &= (2x, 2y)\,|_{(1,2)} \\ &= (2,4) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk $(h,k) \approx (0,0)$, fungsi f linear secara lokal:

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+h) &= (1+h)^2 + (2+h)^2 \\ &= 1 + 2h + h^2 + 4 + 4h + h^2 \\ &= 5 + (2,4) \bullet (h,k) + (h,k) \bullet (h,k) \end{aligned}$$

Disini

$$\bar{\epsilon}(h,k) = (h,k) \to (0,0)$$

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Theorem

Jika f mempunyai turunan parsial f_x dan f_y yang kontinu pada suatu cakram yang memuat (a, b), maka f mempunyai turunan di (a, b).

Example

$f(x, y) = x^2 + y^2$ mempunyai turunan parsial $f_x = 2x$ dan $f_y = 2y$ yang kontinu pada $\mathbf{R}$, sehingga f mempunyai turunan di setiap titik.

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Examples

Perlihatkan bahwa $f(x, y) = xe^y + x^2 y$ dapat diturunkan dimana-mana. Hitung gradiennya lalu carilah persamaan bidang singgung di $(2, 0)$

Solution

Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2$$

Kedua fungsi ini kontinu dimana-mana sehingga dapat diturunkan dimana-mana.
Gradien garis adalah

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(e^y + 2xy\right)\mathbf{i} + \left(xe^y + x^2\right)\mathbf{j} = \left\langle e^y + 2xy, xe^y + x^2 \right\rangle \\ \nabla f(2, 0) &= \mathbf{i} + 6\mathbf{j} = \langle 1, 6 \rangle \end{aligned}$$

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Solution

Adapun persamaan bidang singgungnya antara lain:

$$\begin{aligned} z &= f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot \langle x-2, y\rangle \\ &= 2 + \langle 1, 6\rangle \cdot \langle x-2, y\rangle \\ &= 2 + x - 2 + 6y \\ &= x + 6y \end{aligned}$$

4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Examples

carilah $\nabla f\left(1,2,0\right)$ jika $f\left(x,y,z\right)=x\sin z+x^{2}y$

Solution

Perhatikan bahwa turunan-turunan parsial

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin z+2xy;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^{2};\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x\cos x$$

masing-masing bernilai $4,1$ *dan* 1 *pada titik* $\left(1,2,0\right)$ *sehingga*

$$\nabla f\left(1,2,0\right)=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

4.4 Sifat Turunan

Operator del ∇ memenuhi sifat-sifat:

$$\nabla\left[f\left(\overline{p}\right)+g\left(\overline{p}\right)\right]=\nabla f\left(\overline{p}\right)+\nabla g\left(\overline{p}\right)$$
$$\nabla\left[\alpha\ f\left(\overline{p}\right)\right]=\alpha\nabla f\left(\overline{p}\right)$$
$$\nabla\left[f\left(\overline{p}\right)\ g\left(\overline{p}\right)\right]=f\left(\overline{p}\right)\ \nabla g\left(\overline{p}\right)+\nabla f\left(\overline{p}\right)\ g\left(\overline{p}\right)$$

4.4 Sifat Turunan

Theorem

Jika f mempunyai turunan di $\mathbf{p}$, *maka f kontinu di* $\mathbf{p}$

Kontraposisi dari teorema ini berbunyi:

jika f tidak kontinu di $\mathbf{p}$, maka f tidak mempunyai turunan di $\mathbf{p}$.

4.4 Sifat Turunan

Examples

Selidiki apakah fungsi di bawah ini mempunyai turunan di titik $(0,0)$:

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Examples

Buktikan bahwa

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

4.4 Sifat Turunan

Solution

Proof:

Diketahui

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f_x g - f g_x}{g^2} \quad dan \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f_y g - f g_y}{g^2}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \left(\frac{f_x g - f g_x}{g^2}, \frac{f_y g - f g_y}{g^2}\right) \\ &= \left(\frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}\right)\end{aligned}$$

5. Turunan Berarah dan Gradien

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Perhatikan bahwa turunan parsial fungsi dua variabel $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ mengukur laju perubahan dan kemiringan garis singgung pada arah-arah yang sejajar sumbu x dan sumbu y.

Sasaran kita selanjutnya adalah mempelajari laju perubahan f pada sembarang arah, yang mengarahkan kita pada konsep **Turunan Berarah**, yang kemudian dihubungkan dengan gradien.

Sebagai penunjang, penting bagi kita mengetahui cara penulisan vektor. Misalkan $\mathbf{p} = (x, y)$, kemudian misalkan $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{j}$ adalah vektor-vektor satuan pada arah-arah x dan y positif.

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Maka dua turunan parsial dari **p** dapat ditulis

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{p}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{i}) - f(\mathbf{p})}{h} \\ f_y(\mathbf{p}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{j}) - f(\mathbf{p})}{h} \end{aligned}$$

Yang kita lakukan selanjutnya hanya perlu mengganti **i** dan **j** dengan suatu vektor sebarang **u**.

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Definition

Untuk tiap vektor satuan $\mathbf{u}$, **Turunan Berarah** f di $\mathbf{p}$ pada arah $\mathbf{u}$ didefinisikan

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{h}$$

dengan catatan limitnya ada.

Theorem

Misalkan f terdiferensialkan di p, maka f mempunyai turunan berarah di $\mathbf{p}$ *dalam arah* **vektor satuan** $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ *dan*

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$

yaitu

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = u_1 f_x(x, y) + u_2 f_y(x, y)$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Example

1. Tentukan vektor berarah f di $(2, -1)$ pada arah vektor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ jika $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$
2. Tentukan vektor berarah dari $f(x, y) = ye^{2x}$ di titik $(0, 2)$ pada arah vektor $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

Diketahui $p = (2, -1)$ *dan* $u = \langle 4, 3 \rangle$.
Akan ditentukan

$$D_{\mathbf{u}} f(p) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$

Dari fungsi f *diperoleh*

$$\begin{aligned} \nabla f &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \langle 8x - y, 6y - x \rangle \\ \nabla f(2, -1) &= \langle 16 + 1, -6 - 2 \rangle \\ &= \langle 17, -8 \rangle \end{aligned}$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

Dengan demikian, diperoleh vektor berarah

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(2,-1) &= \frac{\langle 4,3\rangle}{\sqrt{25}} \cdot \langle 17,-8\rangle \\ &= \frac{1}{5}\langle 4,3\rangle \cdot \langle 17,-8\rangle \\ &= \frac{1}{5}(4 \cdot 17 + 3 \cdot -8) \\ &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

2. *Diketahui* $p = (0, 2)$ *dan* $u = \langle 1, 2 \rangle$.
   Akan ditentukan
   $$D_{\mathbf{u}} f(p) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$
   Dari fungsi f *diperoleh*
   $$\begin{aligned} \nabla f &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \left\langle 2ye^{2x}, e^{2x} \right\rangle \\ \nabla f(0, 2) &= \left\langle 2 \cdot 2e^0, e^0 \right\rangle \\ &= \langle 4, 1 \rangle \end{aligned}$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

2. *Dengan demikian, diperoleh vektor berarah*

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(2,-1) &= \frac{\langle 1,2\rangle}{\sqrt{5}} \cdot \langle 4,1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1\cdot 4 + 2\cdot 1) \\ &= \frac{6}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{6}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

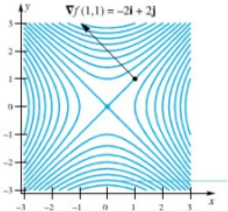
5.2 Laju Perubahan Maksimum

Theorem

Suatu fungsi bertambah paling cepat di $\mathbf{p}$ *pada arah gradien, dengan laju* $\|\nabla f(\mathbf{p})\|$, *dan berkurang paling cepat ke arah berlawanan, dengan laju* -$\|\nabla f(\mathbf{p})\|$.

Example

Andaikan seekor semut berada pada paraboloida hiperbolik $z = y^2 - x^2$ di titik $(1, 1, 0)$, pada arah mana ia harusnya bergerak untuk panjatan yang paling curam? Berapa kemiringan pada saat ia memulai?



5.2 Laju Perubahan Maksimum

Solution

Misalkan $f(x,y) = y^2 - x^2$, *maka*

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \langle -2x, 2y \rangle \\ \nabla f(1,1) &= \langle -2, 2 \rangle \end{aligned}$$

Dengan demikian, semut harus bergerak dari $(1,1,0)$ *ke arah vektor* $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, *dengan kemiringan sebesar*

$$\begin{aligned} \|-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

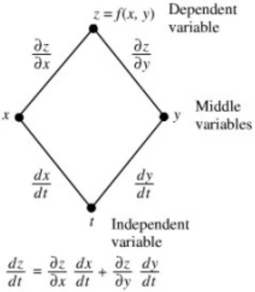
6. Aturan Rantai

6.1 Aturan Rantai Pertama

Theorem

Misalkan $x = x(t)$ *dan* $y = y(t)$ *terturunkan di* t *dan misalkan* $z = f(x, y)$ *terturunkan di* $(x(t), y(t))$, *maka* $z = f(x(t), y(t))$ *dapat diturunkan di* t *dan*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$



6.1 Aturan Rantai Pertama

Example

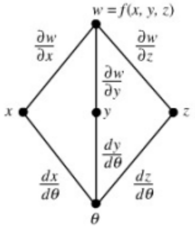
Andaikan $z = x^3 y$ dengan $x = 2t$ dan $y = t^2$, hitunglah dz/dt.

Solution

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \left(3x^2 y\right)(2) + \left(x^3\right)(2t) \\
&= 6x^2 y + 2x^3 t \\
&= 6(2t)^2\left(t^2\right) + 2(2t)^3(t) \\
&= 24t^4 + 16t^4 \\
&= 40t^4
\end{aligned}$$

6.1 Aturan Rantai Pertama

Aturan rantai untuk kasus 3 variabel



$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$$

Example

Andaikan $w = x^2y + y + xz$ dengan $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ dan $z = \theta^2$, carilah $dw/d\theta$ dan hitung nilainya di $\theta = \pi/3$.

6.1 Aturan Rantai Pertama

Solution

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\theta}\\ &= (2xy+z)(-\sin\theta)+\left(x^2+1\right)(\cos\theta)+(x)(2\theta)\\ &= -(2xy+z)(\sin\theta)+\left(x^2+1\right)(\cos\theta)+2x\theta\\ &= -2\cos\theta\sin^2\theta-\theta^2\sin\theta+\cos^3\theta+\cos\theta+2\theta\cos\theta\end{aligned}$$

nilainya di $\theta=\pi/3$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= 2\cos\theta\sin^2\theta-\theta^2\sin\theta+\cos^3\theta+\cos\theta+2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}+\cos^3\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}+2\theta\cos\theta\\ &= -\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{18}+\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

6.2 Aturan Rantai Kedua

Theorem

Misalkan $x = x(s,t)$ *dan* $y = y(s,t)$ *mempunyai turunan-turunan parsial pertama di* (s,t) *dan misalkan* $z = f(x,y)$ *terturunkan di* $(x(s,t), y(s,t))$, *maka* $z = f(x(s,t), y(s,t))$ *mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang diberikan oleh*

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \qquad (2) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Example

Jika $z = 3x^2 - y^2$ dengan $x = 2s + 7t$ dan $y = 5st$, carilah $\partial z / dt$ dan nyatakan dalam bentuk s dan t.

6.2 Aturan Rantai Kedua

Solution

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= (6x)(7)+(-2y)(5s) \\
&= 42x-10sy \\
&= 42(2s+7t)-10s(5st) \\
&= 84s+294t-50s^2t
\end{aligned}$$

Example

Jika $w = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ dengan $x = st, y = s - t$ dan $z = s + 2t$, carilah

$$\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{s=1,t=-1}$$

6.2 Aturan Rantai Kedua

Solution

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\\
&= (2x+y)(s)+(2y+x)(-1)+(2z)(2)\\
&= 2s^2t+s(s-t)-2(s-t)-st+4(s+2t)\\
&= 2s^2t+s^2-st-2s+2t-st+4s+8t\\
&= (2t+1)s^2-2st+2s+10t\\
\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{s=1,t=-1} &= (2\cdot -1+1)(1)^2-2(1)(-1)+2(1)+10(-1)\\
&= -1+2+2-10\\
&= -7
\end{aligned}$$

6.3 Fungsi Implisit

Andaikan fungsi $F(x, y) = 0$ mendefinisikan y secara implisit sebagai fungsi x, misal $y = g(x)$.

Kita akan menemukan beberapa kasus dimana kita kesulitan atau bahkan tidak mungkin menentukan fungsi g.

Dalam kasus ini kita dapat menentukan dy/dx dengan menggunakan metode turunan implisist $(subbab\ 2.7)$.

Namun pada subbab ini kita akan pelajari metode lain menentukan dy/dx.

6.3 Fungsi Implisit

Jika fungsi $F(x, y) = 0$ diturunkan menggunakan aturan rantai, maka diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Dengan demikian, dy/dx dapat diselesaikan menjadi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

Example

Jika $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$ carilah dy/dx dengan menggunakan:

1. Aturan Rantai
2. Turunan Implisit

6.3 Fungsi Implisit

Solution

Dengan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \\ &= -\frac{3x^2+2xy}{x^2-40y} \end{aligned}$$

Dengan turunan implisit diperoleh

$$\begin{aligned} 3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 40y^3\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \left(x^2-40y^3\right)\frac{dy}{dx} &= -\left(3x^2+2xy\right) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3x^2+2xy}{x^2-40y} \end{aligned}$$

6.3 Fungsi Implisit

Jika z fungsi implisit dari x dan y yang didefinisikan oleh $F(x, y, z) = 0$, maka diferensiasi kedua ruas terhadap x dengan mempertahankan y tetap menghasilkan

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Dengan demikian, $\partial z / \partial x$ dapat diselesaikan dengan memperhatikan bahwa $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ menghasilkan rumus (1). Perhitungan serupa dengan mempertahankan x tetap dan menurunkan persamaan terhadap y diperoleh rumus (2)

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \qquad (2) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}$$

6.3 Fungsi Implisit

Example

Carilah $\partial z/\partial x$ jika $F(x, y, z) = x^3 e^{y+z} - y \sin(x - z) = 0$ mendefinisikan z secara implisist sebagai fungsi x dan y.

Solution

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \\ &= -\frac{3x^2 e^{y+z} - y \cos(x - z)}{x^3 e^{y+z} + y \cos(x - z)} \end{aligned}$$

6.4 Latihan 4

Problem

Carilah dw/dt dengan menggunakan Aturan Rantai, nyatakan hasil akhir dan bentuk variabel t:

$$a.\quad w = x^2y - y^2x;\quad x = \cos t,\; y = \sin t$$

$$b.\quad w = \ln\left(\frac{x}{y}\right);\; x = \tan t,\; y = \sec^2 t$$

$$c.\quad w = xy + yz + xz;\; x = t^2,\; y = 1 - t^2, z = 1 - t$$

Carilah $\partial w/\partial t$ dengan menggunakan Aturan Rantai, nyatakan hasil akhir dan bentuk variabel s dan t:

$$a.\quad w = \ln(x+y) - \ln(x-y);\quad x = te^s,\; y = e^{st}$$

$$b.\quad w = \sqrt{x^2+y^2+z^2};\; x = \cos st,\; y = \sin st,\; z = s^2t$$

$$c.\quad w = e^{xy+z};\; x = s+t,\; y = s-t,\; z = t^2$$

6.4 Latihan 4

Problem

3. *Jika* $z = x^2y + z^2$, $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, *dan* $z = \rho\cos\phi$,*carilah*

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\Big|_{\rho=2,\theta=\pi,\phi=\pi/2}$$

4. *Gunakan aturan rantai fungsi implisit untuk menemukan* dy/dx :

$$\begin{aligned}
&a.\ \ ye^{-x} + 5x - 17 = 0\\
&b.\ \ x^2\cos y - y^2\sin x = 0\\
&c.\ \ x\sin y + y\cos x = 0\\
&d.\ \ \textit{Jika}\ \ ye^{-x} + z\sin x = 0,\ \ \textit{Carilah}\ \ \partial x/\partial z
\end{aligned}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "