

KALKULUS LANJUT

Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih

Resmawan

Universitas Negeri Gorontalo

27 Agustus 2018

7. Maksimum dan Minimum

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Definition (Nilai Ekstrim Global)

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, dan $p_0 \in S$

- (i) $f(p_0)$ disebut **nilai maksimum global** f pada S apabila $f(p_0) \geq f(p)$ untuk setiap $p \in S$.
- (ii) $f(p_0)$ disebut **nilai minimum global** f pada S apabila $f(p_0) \leq f(p)$ untuk setiap $p \in S$.

Nilai $f(p_0)$ disebut **Nilai Ekstrim Global** f pada S apabila $f(p_0)$ merupakan nilai maksimum global atau nilai minimum global.

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Definition (Nilai Ekstrim Lokal)

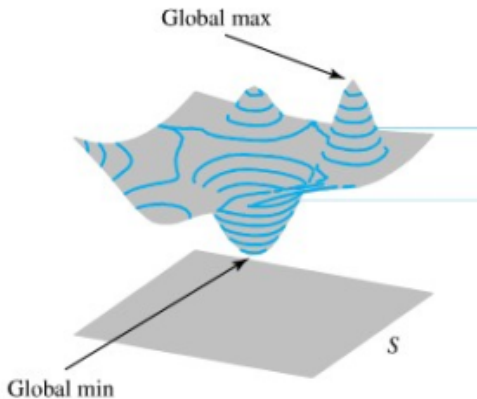
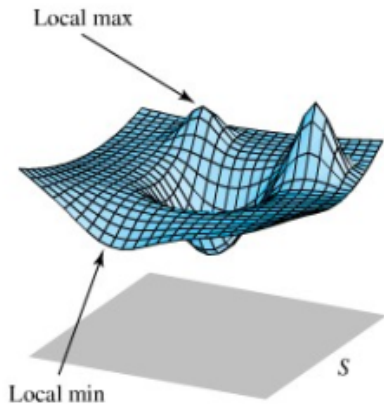
Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, dan $p_0 \in S$

- (i) $f(p_0)$ disebut **nilai maksimum lokal** f pada S apabila *terdapat cakram* N yang memuat p_0 sehingga $f(p_0) \geq f(p)$ untuk setiap $p \in N \cap S$.
- (ii) $f(p_0)$ disebut **nilai minimum lokal** f pada S apabila *terdapat cakram* N yang memuat p_0 sehingga $f(p_0) \leq f(p)$ untuk setiap $p \in N \cap S$.

Nilai $f(p_0)$ disebut **Nilai Ekstrim Lokal** f pada S apabila $f(p_0)$ merupakan nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Perhatikan Gambar



7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Theorem (Eksistensi Maks-Min)

Jika f kontinu pada suatu himpunan tertutup dan terbatas S , maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum global pada S (kemungkinan di titik yang berbeda).

Catatan:

S tertutup berarti S memuat titik-titik perbatasannya. S terbatas berarti S termuat dalam suatu cakram $C(\mathbf{0}, R)$ yang berpusat di $\mathbf{0}(0, 0)$ dan berjari-jari R , untuk suatu $R > 0$.

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Theorem (Titik Kritis)

Fungsi f hanya mungkin mencapai nilai ekstrim pada **titik-titik kritis**, yaitu:

- (i) **Titik-titik perbatasan daerah asal f** , atau
- (ii) **Titik-titik stasioner** (yaitu titik di mana f mempunyai turunan 0), atau
- (iii) **Titik-titik singular** (yaitu titik di mana f tidak mempunyai turunan).

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Examples

Carilah nilai ekstrim dari

$$f(x, y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Solution

Perhatikan bahwa,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \quad \text{dan} \quad f_y(x, y) = \frac{1}{2}y$$

Karena $f(x, y)$ dapat diturunkan disepanjang bidang xy , nilai ekstrim fungsi hanya mungkin terjadi di titik-titik stasioner, yaitu titik-titik dimana f mempunyai turunan nol, sehingga

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 & f_y(x, y) &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 & \frac{1}{2}y &= 0 \\ x &= 1 & y &= 0 \end{aligned}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Solution

Selanjutnya menetapkan titik $(x, y) = (1, 0)$ merupakan titik maksimum/minimum/bukan keduanya. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}f(1, 0) &= (1)^2 - 2(1) + 0 \\ &= -1\end{aligned}$$

merupakan nilai minimum global dari f karena

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \\ &= x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 \\ &= (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \\ &\geq -1\end{aligned}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Examples

Beberapa contoh lain

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$(2) \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Solution

- 1 *fungsi $f(x, y)$ mencapai nilai ekstrim minimum global 0 pada titik stasioner $(0, 0)$, karena*

$$\begin{aligned}f_x &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{dan} \quad f_y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\f(0, 0) &= 0^2 + 0^2 = 0\end{aligned}$$

- 2 *Fungsi $g(x, y)$ mencapai nilai ekstrim minimum global 0 pada titik singular $(0, 0)$ karena g tidak mempunyai turunan di xy*
- 3 *Jika kita batasi daerah asal kedua fungsi di atas pada cakram tertutup $C(\mathbf{0}, 1)$, maka kedua fungsi di atas mencapai nilai maksimum 1 pada setiap titik perbatasan.*

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Catatan:

Titik stasioner **belum tentu** merupakan titik ekstrim. Sebagai contoh, fungsi $f(x, y) = xy$ mempunyai titik stasioner $(0, 0)$, tetapi titik ini bukan merupakan titik ekstrim (global maupun lokal). Ingat peta konturnya seperti apa! Jika daerah asal fungsi f dibatasi pada cakram tertutup $C(\mathbf{0}, 1)$, maka nilai ekstrimnya hanya mungkin tercapai di titik-titik perbatasan, yaitu pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Theorem (Uji Parsial Kedua)

Misalkan $f(x, y)$ mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu pada suatu cakram yang berpusat di (a, b) dan $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. Tulis

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

maka

- 1 Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a, b) < 0$ maka $f(a, b)$ merupakan nilai maksimum lokal.
- 2 Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a, b) > 0$ maka $f(a, b)$ merupakan nilai minimum lokal.
- 3 Jika $D < 0$, maka (a, b) merupakan titik pelana dan $f(a, b)$ bukan titik ekstrim.
- 4 Jika $D = 0$, maka pengujian tidak memberi kesimpulan.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Example

Tentukan nilai ekstrim (jika ada) dari fungsi

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 4y$$

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

Karena

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3; \quad f_y(x, y) = 2y + 4$$

dan $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, maka

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 & f_y(x, y) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 & 2y + 4 &= 0 \\ x^2 &= 1 & 2y &= -4 \\ x &= \pm 1 & y &= -2 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh titik-titik kritis, yaitu $(1, -2)$ dan $(-1, -2)$.

Selanjutnya diperoleh

$$f_{xx}(x, y) = 6x; \quad f_{yy}(x, y) = 2; \quad \text{dan} \quad f_{xy} = 0$$

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

Untuk titik kritis $(1, -2)$,

$$\begin{aligned}D(1, -2) &= f_{xx}(1, -2) \cdot f_{yy}(1, -2) - [f_{xy}(1, -2)]^2 \\&= (6)(2) - 0^2 \\&= 12 > 0.\end{aligned}$$

Karena $D(1, -2) = 12 > 0$ dan $f_{xx}(1, -2) = 6 > 0$, maka

$$\begin{aligned}f(1, -2) &= 1^3 + (-2)^2 - 3(1) + 4(-2) \\&= -6\end{aligned}$$

merupakan nilai minimum lokal dari fungsi f .

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

Untuk titik kritis $(-1, -2)$,

$$\begin{aligned} D(-1, -2) &= f_{xx}(-1, -2) \cdot f_{yy}(-1, -2) - [f_{xy}(-1, -2)]^2 \\ &= (-6)(2) - 0^2 \\ &= -12 < 0. \end{aligned}$$

Karena $D(-1, -2) = -12 < 0$ maka $(-1, -2)$ merupakan titik pelana dan $f(-1, -2)$ bukan nilai ekstrim.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Problem

Untuk fungsi berikut, carilah semua titik kritis. Tunjukkan apakah masing-masing titik itu memberikan nilai maksimum lokal, minimum lokal, atau berupa titik pelana.

① $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 1$

② $f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

1 Dari $f(x, y)$ diperoleh

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (2x - 2, 8y + 8)$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 1 \text{ dan } y = -1$$

Jadi, terdapat satu titik kritis yaitu $(x, y) = (1, -1)$.

Selanjutnya diperoleh

$$D = (f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = (2)(8) - 0^2 = 16 > 0$$

Karena $D > 0$ dan $f_{xx} > 0$, maka

$$f(1, -1) = (1)^2 + 4(-1)^2 - 2(1) + 8(-1) - 1 = -6$$

merupakan nilai minimum lokal dari fungsi $f(x, y)$.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

2. Dari $f(x, y)$ diperoleh

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (y^2 - 12x, 2xy - 6y)$$

Titik kritis diperoleh jika $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

$$(y^2 - 12x, 2xy - 6y) = (0, 0)$$

$$(y^2 - 12x, (2x - 6)y) = (0, 0)$$

Dari f_x , jika $x = 0$ maka $y = 0$,

Dari f_y , jika $2x - 6 = 0$, maka $x = 3$ menghasilkan

$$y = \pm\sqrt{12(3)} = \pm 6.$$

Dengan demikian, terdapat tiga titik kritis yaitu $(0, 0)$, $(3, 6)$, dan $(3, -6)$.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

2. Selanjutnya diperoleh $f_{xx} = -12 < 0$ dan

$$\begin{aligned} D &= (f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = (-12)(2x - 6) - (2y)^2 \\ &= -4y^2 - 24x + 72 = -4(y^2 + 6x - 18) \end{aligned}$$

Untuk $(x, y) = (0, 0)$, diperoleh

$$D = -4(0^2 + 6 \cdot 0 - 18) = 72 > 0$$

sehingga $f(0, 0)$ merupakan nilai maksimum lokal $f(x, y)$.

Untuk $(x, y) = (3, \pm 6)$, diperoleh

$$D = -4(6^2 + 6 \cdot 3 - 18) = -144 < 0$$

sehingga $(x, y) = (3, \pm 6)$ merupakan titik sadle dan $f(3, \pm 6)$ bukan nilai ekstrim

7.3 Latihan 5

Problem

Carilah semua titik kritis dan tunjukkan apakah setiap titik tersebut memberikan nilai ekstrim lokal atau berupa titik sadle:

① $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x$

② $f(x, y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$

③ $f(x, y) = xy$

④ $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

⑤ $f(x, y) = x^2 + a^2 - 2ax \cos y; -\pi \leq y \leq \pi$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "