

# PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

## *PDB Orde Pertama*

Resmawan

UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

September 2018

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

---

---

### 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

---

---

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Definition

Suatu persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk

$$a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x) \quad (17)$$

dengan  $a(x)$ ,  $b(x)$ , dan  $c(x)$  merupakan fungsi-fungsi yang terdefinisi pada interval  $(\alpha, \beta)$  dinamakan **Persamaan Diferensial Linear Orde Satu**.

Diasumsikan  $a(x) \neq 0$ , pada  $(\alpha, \beta)$  dan kedua ruas pada (17) dibagi dengan  $a(x)$  sehingga diperoleh **Bentuk Standar**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (18)$$

dengan  $p(x) = b(x)/a(x)$  dan  $q(x) = c(x)/a(x)$ .

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Untuk mendapatkan solusi dari bentuk (18), persamaan ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{d}{dx} [g(x, y)] = F(x) \quad (19)$$

untuk suatu fungsi  $g(x, y)$  yang sesuai. Solusi umum dapat diperoleh dengan cara mengintegrasikan persamaan tersebut.

### Example

Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = e^x, \quad x > 0$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

Jika PD yang diberikan, dikalikan dengan  $x$ , maka diperoleh

$$x \frac{dy}{dx} + y = xe^x$$

yang secara ekuivalen dapat ditulis

$$\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$$

Jika kedua ruas diintegrasikan terhadap  $x$ , diperoleh solusi umum

$$\begin{aligned} xy &= xe^x - e^x + c \\ y &= \frac{1}{x} [e^x (x - 1) + c] \end{aligned}$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

- Selanjutnya kita akan menemukan bentuk umum solusi dari PD orde satu (18), dengan menulis kembali dalam bentuk

$$[p(x)y - q(x)] dx + dy = 0 \quad (20)$$

- Dari bentuk (20), diperoleh

$$M(x, y) = p(x)y - q(x) \quad \text{dan} \quad N(x, y) = 1$$

sehingga

$$M_y - N_x = p(x) \neq 0$$

yang berarti bahwa PD (20) merupakan PD Non Eksak

- Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$$

merupakan fungsi  $x$ , sehingga diberikan faktor integrasi

$$I(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (21)$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

- Dengan mengalikan faktor integrasi (21) dengan persamaan diferensial (18), diperoleh

$$\frac{dy}{dx} e^{\int p(x) dx} + p(x) y e^{\int p(x) dx} = q(x) e^{\int p(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx} [y e^{\int p(x) dx}] = q(x) e^{\int p(x) dx}$$

- Selanjutnya, dengan mengintegrasikan kedua ruas terhadap  $x$  diperoleh solusi umum dari Persamaan Diferensial (18), yaitu

$$y(x) e^{\int p(x) dx} = \int [q(x) e^{\int p(x) dx}] dx + c \quad (22)$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Examples

- ① Carilah solusi umum dari Persamaan Diferensial berikut

$$(a) \quad xy' + (1 - x)y = 4xe^x \ln x$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = 2x^4, \quad x > 0$$

- ② Carilah solusi umum dan solusi khusus dari Persamaan Diferensial berikut

$$(1 - x) \frac{dy}{dx} + xy = x(x - 1)^2; \quad y(0) = 24$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

- 1a. *Tulis kembali persamaan diferensial dalam bentuk umum PD orde satu*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(1-x)}{x}y = 4e^x \ln x$$

*Dari persamaan ini diperoleh*

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{x} - 1 \quad \text{dan} \quad q(x) = 4e^x \ln x \\ \int p(x) dx &= \int \left( \frac{1}{x} - 1 \right) dx \\ &= \ln x - x \end{aligned}$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

1a. Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$ye^{-\int p(x) dx} = \int \left[ q(x)e^{\int p(x) dx} \right] dx + c$$

$$ye^{\ln x - x} = \int \left[ 4e^x \ln x e^{\ln x - x} \right] dx + c$$

$$yx e^{-x} = 4 \int \left[ e^x \ln x \cdot e^{\ln x} e^{-x} \right] dx + c$$

$$yx e^{-x} = 4 \int [x \ln x] dx + c$$

$$yx e^{-x} = 4 \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right] + c$$

$$yx e^{-x} = 2x^2 \ln x - x^2 + c$$

$$yx e^{-x} = x^2 (\ln x^2 - 1) + c$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

1b. *Dari persamaan diferensial yang diberikan, diperoleh*

$$\begin{aligned}p(x) &= -\frac{3}{x} \text{ dan } q(x) = 2x^4 \\ \int p(x) dx &= -3 \int \frac{1}{x} dx \\ &= -3 \ln x \\ &= \ln \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

1b. Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$ye^{\int p(x) dx} = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + c$$

$$ye^{\ln \frac{1}{x^3}} = \int 2x^4 e^{\ln \frac{1}{x^3}} dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = 2 \int \frac{x^4}{x^3} dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = 2 \int x dx + c$$

$$\frac{y}{x^3} = x^2 + c$$

$$y = x^3 [x^2 + c]$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

2. Tulis kembali persamaan diferensial dalam bentuk umum PD orde satu

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x}y = -x^2 + x$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$p(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{dan} \quad q(x) = x - x^2$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{x-1+1}{1-x} = \frac{x-1}{-(x-1)} + \frac{1}{1-x} \\ &= -1 + \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

2. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int p(x) dx &= \int \left( \frac{x}{1-x} \right) dx \\
 &= \int \left( -1 + \frac{1}{1-x} \right) dx \\
 &= \int -1 dx + \int \frac{1}{1-x} dx \\
 &= -\ln(1-x) - x
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, ditentukan solusi umum

$$\begin{aligned}
 ye^{\int p(x) dx} &= \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c \\
 ye^{-\ln(1-x)-x} &= \int (x - x^2) e^{-\ln(1-x)-x} dx + c
 \end{aligned}$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

2. Dengan demikian, solusi umum PD adalah

$$ye^{\ln(1-x)^{-1}} e^{-x} = \int (x - x^2) e^{\ln(1-x)^{-1}} e^{-x} dx + c$$

$$y(1-x)^{-1} e^{-x} = \int \frac{(x - x^2)}{1-x} e^{-x} dx + c$$

$$\frac{y}{1-x} e^{-x} = \int \frac{x(1-x)}{1-x} e^{-x} dx + c$$

$$\frac{y}{1-x} e^{-x} = \int x e^{-x} dx + c$$

$$\frac{y}{1-x} e^{-x} = e^{-x} (-x - 1) + c$$

$$ye^{-x} = (1-x) [e^{-x} (-x - 1) + c]$$

## 2.9 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

### Solution

2. Dengan nilai awal  $y(0) = 24$ , diperoleh

$$ye^0 = (1 - 0) [e^0 (0 - 1) + c]$$

$$24 = -1 + c$$

$$c = 25$$

Dengan demikian, solusi khusus PD adalah

$$ye^{-x} = (1 - x) [e^{-x} (-x - 1) + 25]$$

## \* Soal-Soal Latihan 7

### Problem

Carilah solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

①  $\tan x \, y' + y = \sin 2x$

②  $x \, dy - 2y \, dx = (x - 2)e^x \, dx$

③  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$

④  $xy' + 2y = \cos x, \quad x > 0$

Carilah solusi umum dan solusi khusus dari persamaan diferensial dengan nilai awal berikut

⑤  $y' + y = 2 + 2x; \quad y(0) = 2$

⑥  $y' + xy = xe^{x^2/2}; \quad y(0) = 1$

⑦  $\sin x \frac{dy}{dx} - y \cos x = \sin 2x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

**" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "**