KALKULUS LANJUT

Integral Lipat

Resmawan

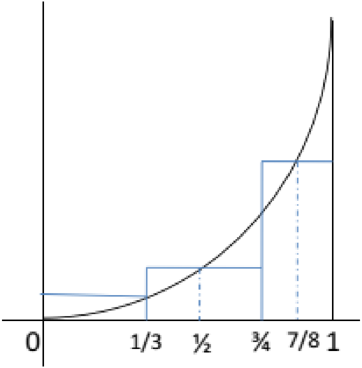
Universitas Negeri Gorontalo

7 November 2018

13.1. Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

1.1 Definisi Integral Tentu Fungsi Satu Peubah

Perhatikan Gambar



1.1 Definisi Integral Tentu Fungsi Satu Peubah

Definition

Jumlah Rieman untuk f

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta x_i$$

merupakan *hampiran* luas daerah dibawah kurva $y = f\left(x\right), x \epsilon \left[a, b\right]$. Jika

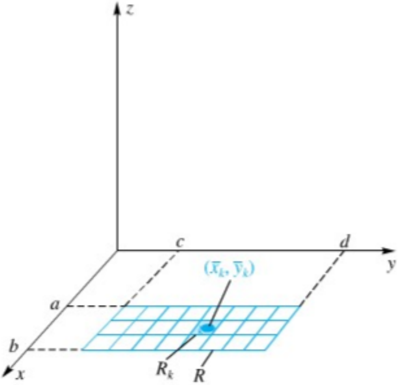
$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta x_i$$

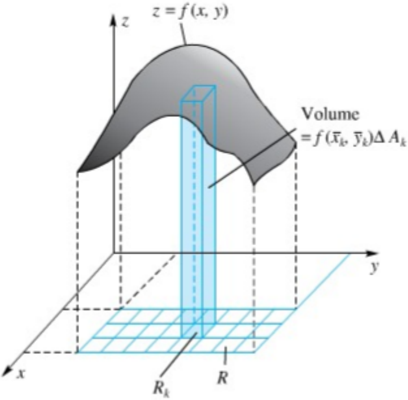
ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada $[a, b]$. **Integral tentu** f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta x_i$$

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Perhatikan Gambar





1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Definition (Jumlah Riemann Fungsi Dua Variabel)

Misalkan $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ dan f kontinu (kecuali pada suatu kurva) dan terbatas. Bentuk partisi A_k dengan panjang Δx_k dan lebar Δy_k. Jika pada setiap A_k dipilih titik sampel (x_k, y_k), maka diperoleh **Jumlah Riemann**

$$\sum_{k-1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

yang merupakan hampiran volume ruang diantara permukaan $z = f(x, y)$ dan persegi panjang R.

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Definition (Integral Lipat Fungsi Dua Variabel)

Misalkan f suatu fungsi dua variabel yang terdefinisi pada suatu persegipanjang tertutup R.Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta A_k$$

ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada R. Selanjutnya disebut dengan **Integral Lipat Dua** f pada R yang diberikan oleh

$$\iint_R f\left(x, y\right) dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta A_k$$

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Catatan penting untuk diingat:

- Jika $f(x) \geq 0$, maka
$$\int_a^b f(x)\, dx$$
menyatakan **luas daerah** dibawah *kurva* $y = f(x)$ diantara a dan b.
- Dengan kaidah yang sama jika $f(x, y) \geq 0$, maka
$$\iint_R f(x, y)\, dA$$
menyatakan **volume benda pejal** dibawah *permukaan* $z = f(x, y)$ dan diatas persegipanjang R.

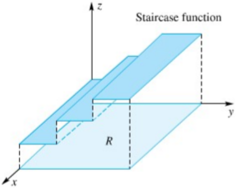
1.3 Keterintegralan

Theorem (Keterintegralan)

Jika f kontinu (kecuali pada suatu kurva) dan terbatas pada persegi panjang R, maka f terintegralkan pada R.

Example

Fungsi Tangga



Example

Setiap polinom dua peubah terintegralkan pada sembarang persegi panjang.

1.4 Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

1. **Linear**

$$\begin{aligned}\iint\limits_R kf(x,y)\,dA &= k\iint\limits_R f(x,y)\,dA \\ \iint\limits_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA &= \iint\limits_R f(x,y)\,dA + \iint\limits_R g(x,y)\,dA\end{aligned}$$

2. **Aditif (Dapat Dijumlahkan).** Jika $R = R_1 \cup R_2$ maka berlaku

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$$

3. **Monoton (Berlaku Sifat Perbandingan).** Jika $f(x,y) \le g(x,y)$ untuk semua (x,y) di R, maka

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \le \iint\limits_R g(x,y)\,dA$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Example

Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. Hitunglah

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

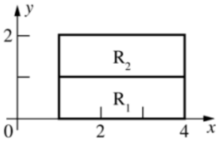
jika diberikan fungsi

$$1)\ f(x,y) = \begin{cases} -1 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$2)\ f(x,y) = \begin{cases} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 1 \\ 1 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

1. Dari fungsi diperoleh persegipanjang R_1 dan R_2



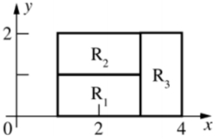
$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ R_2 &= 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

sehingga dengan sifat aditif, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint\limits_R f(x,y)\,dA &= \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA \\ &= -1(3.1) + 2(3.1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

2. Dari fungsi diperoleh persegipanjang R_1, R_2 dan R_3



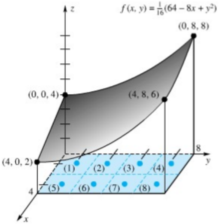
$$
\begin{aligned}
R_1 &= 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 1 \\
R_2 &= 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\
R_3 &= 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2
\end{aligned}
$$

sehingga dengan sifat aditif, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA + \iint_{R_3} f(x,y)\,dA \\
&= 2(2.1) + 1(2.1) + 3(1.2) = 12
\end{aligned}
$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Example



Diketahui persegipanjang $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$. Taksir nilai dari

$$\iint_R \frac{64 - 8x + y^2}{16} dA$$

dengan Jumlah Riemann dengan membagi R atas 8 persegi sama besar dan memilih titik-titik tengah tiap persegi sebagai titik sampelnya.

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Solution

Nilai f di titik-titik sampel

$$\begin{array}{llll} f(1,1)=\frac{57}{16} & f(1,3)=\frac{65}{16} & f(1,5)=\frac{81}{16} & f(1,7)=\frac{105}{16} \\ f(3,1)=\frac{41}{16} & f(3,3)=\frac{49}{16} & f(3,5)=\frac{65}{16} & f(3,7)=\frac{89}{16} \end{array}$$

Dengan $\Delta A_k = 4$, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{64-8x+y^2}{16}\,dA &\approx \sum_{k=1}^{8} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \\ &= \frac{4}{16}(57+65+81+105+41+49+65+89) \\ &= 138 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Problem

1. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. *Hitunglah*

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA$$

jika diberikan fungsi

$$a)\ f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

$$b)\ f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 3 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & ; 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Problem

2. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ *dan* P *adalah partisi dari* R *menjadi* 6 *persegi yang sama oleh garis-garis* $x = 2, x = 4$, *dan* $y = 2$. *Aproksimasi*

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

dengan menghitung jumlah Riemann dengan fungsi dua peubah:

$$\begin{aligned} a)\ f(x, y) &= 12 - x - y \\ b)\ f(x, y) &= 10 - y^2 \\ c)\ f(x, y) &= \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y) \end{aligned}$$

13.2. Integral Berulang

2.1 Menghitung Integral Lipat Dua sebagai Integral Berulang

Definition

Jika f terintegralkan pada persegi panjang $R = [a,b] \times [c,d]$, maka integral lipat dua dari f pada R dapat dihitung sebagai **integral berulang**:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

atau

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Catatan: Pada cara pertama, ruang diiris sejajar sumbu x terlebih dahulu

2.2 Beberapa Contoh Soal

Examples

Hitunglah masing-masing integral berulang dari

$$1) \int_0^2 \int_0^3 (9 - x)\, dydx$$

$$2) \int_{-1}^1 \int_1^2 \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$3) \int_0^8 \int_0^4 \frac{64 - 8x + y^2}{16} dxdy$$

2.2 Beberapa Contoh Soal

Solution

$$
\begin{aligned}
1) \int_0^2 \int_0^3 (9-x)\, dydx &= \int_0^2 (9y - xy)\,\Big|_0^3 dx \\
&= \int_0^2 [9y - xy]_0^3 \, dx \\
&= \int_0^2 [(9.3 - x.3) - 0] \, dx \\
&= \int_0^2 [27 - 3x] \, dx \\
&= \left[27x - \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

2.2 Beberapa Contoh Soal

Solution

$$
\begin{aligned}
2) \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \left(x^2+y^2\right) dxdy &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_1^2 dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{2^3}{3}+2y^2\right)-\left(\frac{1}{3}+y^2\right)\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[y^2+\frac{7}{3}\right] dy \\
&= \left[\frac{y^3}{3}+\frac{7y}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{7}{3}\right)-\left(\frac{-1}{3}+\frac{-7}{3}\right) \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

2.2 Beberapa Contoh Soal

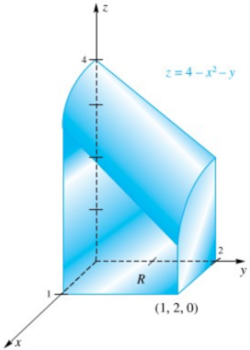
Solution

$$
\begin{aligned}
3)\int_0^8\int_0^4\left[4-\frac{x}{2}+\frac{y^2}{16}\right]dxdy &= \int_0^8\left[4x-\frac{x^2}{4}+\frac{xy^2}{16}\right]_0^4 dy \\
&= \int_0^8\left[4\cdot 4-\frac{4^2}{4}+\frac{4y^2}{16}\right] dy \\
&= \int_0^8\left[12+\frac{y^2}{4}\right] dy \\
&= \left[12y+\frac{y^3}{12}\right]_0^8 \\
&= \left[12\cdot 8+\frac{8^3}{12}\right] \\
&= 138\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

2.3 Volume Benda Pejal

Example

Hitunglah volume benda pejal dibawah permukaan $z = 4 - x^2 - y$ diatas persegipanjang $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.



2.3 Volume Benda Pejal

Solution

- *Volume estimasi :*
  Misal tinggi benda pejal $= 2.5$, *maka diperkirakan*

$$V \approx (2)(2.5) = 5$$

- *Volume dengan pendekatan integral berulang:*
  Jika perhitungan benar, maka volume yang diperoleh harusnya tidak jauh dari angka 5.

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \left[4 - x^2 - y\right] dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \left[4 - x^2 - y\right] dydx \end{aligned}$$

2.3 Volume Benda Pejal

Solution

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 \left[6 - 2x^2\right] dx \\
&= \left[6x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 6 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

2.4 Latihan 1

Problem

1. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$. *Hitunglah*

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

jika diberikan fungsi

$$a)\ f(x,y) = \left|\begin{array}{ll} 2 & ; 1 \le x < 3, 0 \le y < 2 \\ 3 & ; 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 \end{array}\right.$$

$$b)\ f(x,y) = \left|\begin{array}{ll} 2 & ; 1 \le x \le 4, 0 \le y < 1 \\ 3 & ; 1 \le x < 3, 1 \le y \le 2 \\ 1 & ; 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2 \end{array}\right.$$

2.3 Latihan 1

Problem

2. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ *dan* P *adalah partisi dari* R *menjadi* 6 *persegi yang sama oleh garis-garis* $x = 2, x = 4$, *dan* $y = 2$. *Aproksimasi*

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

dengan menghitung jumlah Riemann dengan fungsi dua peubah:

$$\begin{aligned} a)\ f(x, y) &= 12 - x - y \\ b)\ f(x, y) &= 10 - y^2 \\ c)\ f(x, y) &= \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y) \end{aligned}$$

2.3 Latihan 1

Problem

3. *Hitunglah masing-masing integral berulang dari*

$$1)\ \int_0^3 \int_0^2 (9 - x)\, dxdy$$

$$2)\ \int_1^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dydx$$

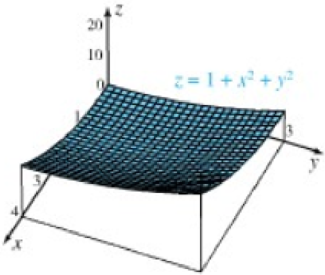
$$3)\ \int_0^4 \int_0^8 \left[\frac{64 - 8x + y^2}{16}\right] dydx$$

2.3 Latihan 1

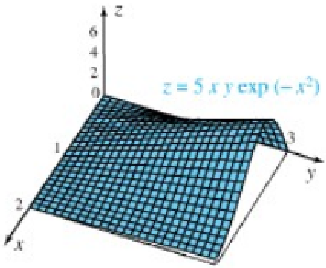
Problem

4. *Hitunglah volume benda pejal dibawah permukaan:*

23.



24.



" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "