

KALKULUS LANJUT

Integral Lipat

Resmawan

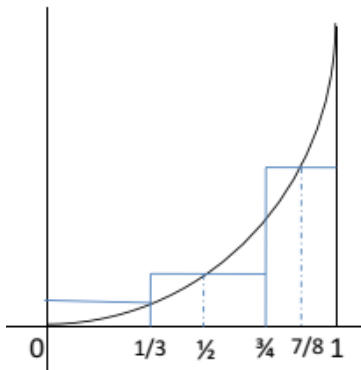
Universitas Negeri Gorontalo

7 November 2018

13.1. Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

1.1 Definisi Integral Tentu Fungsi Satu Peubah

Perhatikan Gambar



1.1 Definisi Integral Tentu Fungsi Satu Peubah

Definition

Jumlah Rieman untuk f

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

merupakan *hampiran* luas daerah dibawah kurva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Jika

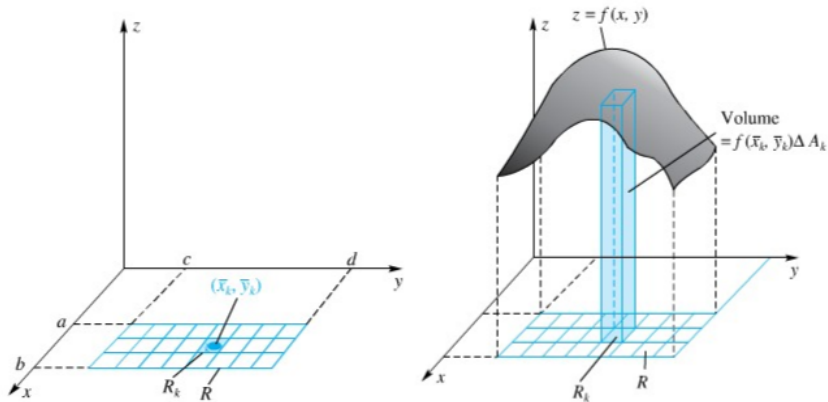
$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada $[a, b]$. **Integral tentu** f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Perhatikan Gambar



1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Definition (Jumlah Riemann Fungsi Dua Variabel)

Misalkan $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ dan f kontinu (kecuali pada suatu kurva) dan terbatas. Bentuk partisi A_k dengan panjang Δx_k dan lebar Δy_k . Jika pada setiap A_k dipilih titik sampel (x_k, y_k) , maka diperoleh **Jumlah Riemann**

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

yang merupakan hampiran volume ruang diantara permukaan $z = f(x, y)$ dan persegi panjang R .

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Definition (Integral Lipat Fungsi Dua Variabel)

Misalkan f suatu fungsi dua variabel yang terdefinisi pada suatu persegipanjang tertutup R . Jika

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada R . Selanjutnya disebut dengan **Integral Lipat Dua** f pada R yang diberikan oleh

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Catatan penting untuk diingat:

- Jika $f(x) \geq 0$, maka

$$\int_a^b f(x) dx$$

menyatakan **luas daerah** dibawah *kurva* $y = f(x)$ diantara a dan b .

- Dengan kaidah yang sama jika $f(x, y) \geq 0$, maka

$$\iint_R f(x, y) dA$$

menyatakan **volume benda pejal** dibawah *permukaan* $z = f(x, y)$ dan diatas persegipanjang R .

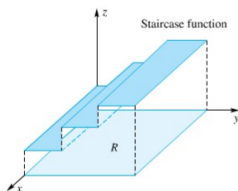
1.3 Keterintegralan

Theorem (Keterintegralan)

Jika f kontinu (kecuali pada suatu kurva) dan terbatas pada persegi panjang R , maka f terintegralkan pada R .

Example

Fungsi Tangga



Example

Setiap polinom dua peubah terintegralkan pada sembarang persegi panjang.

1.4 Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

1 Linear

$$\iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA$$

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

2 Aditif (Dapat Dijumlahkan). Jika $R = R_1 \cup R_2$ maka berlaku

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

3 Monoton (Berlaku Sifat Perbandingan). Jika $f(x, y) \leq g(x, y)$ untuk semua (x, y) di R , maka

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Example

Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. Hitunglah

$$\iint_R f(x, y) dA$$

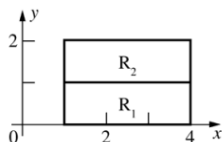
jika diberikan fungsi

$$1) f(x, y) = \begin{cases} -1 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$2) f(x, y) = \begin{cases} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 1 \\ 1 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

- 1 Dari fungsi diperoleh persegipanjang R_1 dan R_2



$$R_1 = 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1$$

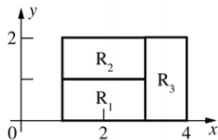
$$R_2 = 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2$$

sehingga dengan sifat aditif, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA \\ &= -1(3.1) + 2(3.1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

2. Dari fungsi diperoleh persegipanjang R_1 , R_2 dan R_3



$$R_1 = 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 1$$

$$R_2 = 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2$$

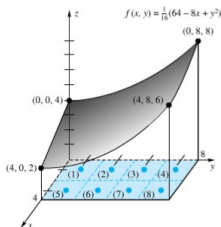
$$R_3 = 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$$

sehingga dengan sifat aditif, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA + \iint_{R_3} f(x, y) dA \\ &= 2(2.1) + 1(2.1) + 3(1.2) = 12 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Example



Diketahui persegi panjang $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$. Taksir nilai dari

$$\iint_R \frac{64 - 8x + y^2}{16} dA$$

dengan Jumlah Riemann dengan membagi R atas 8 persegi sama besar dan memilih titik-titik tengah tiap persegi sebagai titik sampelnya.

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Solution

Nilai f di titik-titik sampel

$$\begin{array}{cccc} f(1, 1) = \frac{57}{16} & f(1, 3) = \frac{65}{16} & f(1, 5) = \frac{81}{16} & f(1, 7) = \frac{105}{16} \\ f(3, 1) = \frac{41}{16} & f(3, 3) = \frac{49}{16} & f(3, 5) = \frac{65}{16} & f(3, 7) = \frac{89}{16} \end{array}$$

Dengan $\Delta A_k = 4$, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{64 - 8x + y^2}{16} dA &\approx \sum_{k=1}^8 f(x_k, y_k) \Delta A_k \\ &= \frac{4}{16} (57 + 65 + 81 + 105 + 41 + 49 + 65 + 89) \\ &= 138 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Problem

① Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. Hitunglah

$$\iint_R f(x, y) dA$$

jika diberikan fungsi

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \\
 \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 3 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & ; 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Problem

2. Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ dan P adalah partisi dari R menjadi 6 persegi yang sama oleh garis-garis $x = 2, x = 4,$ dan $y = 2$. Aproximasi

$$\iint_R f(x, y) dA$$

dengan menghitung jumlah Riemann dengan fungsi dua peubah:

$$a) f(x, y) = 12 - x - y$$

$$b) f(x, y) = 10 - y^2$$

$$c) f(x, y) = \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y)$$

13.2. Integral Berulang

2.1 Menghitung Integral Lipat Dua sebagai Integral Berulang

Definition

Jika f terintegralkan pada persegi panjang $R = [a, b] \times [c, d]$, maka integral lipat dua dari f pada R dapat dihitung sebagai **integral berulang**:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

atau

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Catatan: Pada cara pertama, ruang diiris sejajar sumbu x terlebih dahulu

2.2 Beberapa Contoh Soal

Examples

Hitunglah masing-masing integral berulang dari

$$1) \int_0^2 \int_0^3 (9 - x) \, dydx$$

$$2) \int_{-1}^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) \, dx dy$$

$$3) \int_0^8 \int_0^4 \frac{64 - 8x + y^2}{16} \, dx dy$$

2.2 Beberapa Contoh Soal

Solution

$$\begin{aligned} 1) \int_0^2 \int_0^3 (9 - x) \, dy dx &= \int_0^2 (9y - xy) \Big|_0^3 dx \\ &= \int_0^2 [9y - xy]_0^3 dx \\ &= \int_0^2 [(9 \cdot 3 - x \cdot 3) - 0] dx \\ &= \int_0^2 [27 - 3x] dx \\ &= \left[27x - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 48 \end{aligned}$$

2.2 Beberapa Contoh Soal

Solution

$$\begin{aligned} 2) \int_{-1}^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_1^2 dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2y^2 \right) - \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) \right] dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[y^2 + \frac{7}{3} \right] dy \\ &= \left[\frac{y^3}{3} + \frac{7y}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{3} \right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{-7}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

2.2 Beberapa Contoh Soal

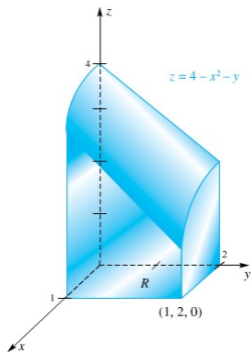
Solution

$$\begin{aligned} 3) \int_0^8 \int_0^4 \left[4 - \frac{x}{2} + \frac{y^2}{16} \right] dx dy &= \int_0^8 \left[4x - \frac{x^2}{4} + \frac{xy^2}{16} \right]_0^4 dy \\ &= \int_0^8 \left[4 \cdot 4 - \frac{4^2}{4} + \frac{4y^2}{16} \right] dy \\ &= \int_0^8 \left[12 + \frac{y^2}{4} \right] dy \\ &= \left[12y + \frac{y^3}{12} \right]_0^8 \\ &= \left[12 \cdot 8 + \frac{8^3}{12} \right] \\ &= 138 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2.3 Volume Benda Pejal

Example

Hitunglah volume benda pejal dibawah permukaan $z = 4 - x^2 - y$ diatas persegipanjang $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.



2.3 Volume Benda Pejal

Solution

- *Volume estimasi :*

Misal tinggi benda pejal = 2.5, maka diperkirakan

$$V \approx (2)(2.5) = 5$$

- *Volume dengan pendekatan integral berulang:*

Jika perhitungan benar, maka volume yang diperoleh harusnya tidak jauh dari angka 5.

$$\begin{aligned} V &= \iint_R [4 - x^2 - y] dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 [4 - x^2 - y] dy dx \end{aligned}$$

2.3 Volume Benda Pejal

Solution

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx \\&= \int_0^1 [6 - 2x^2] dx \\&= \left[6x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\&= 6 - \frac{2}{3} \\&= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

2.4 Latihan 1

Problem

1. Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. Hitunglah

$$\iint_R f(x, y) \, dA$$

jika diberikan fungsi

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \\
 \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 3 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & ; 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.3 Latihan 1

Problem

2. Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ dan P adalah partisi dari R menjadi 6 persegi yang sama oleh garis-garis $x = 2, x = 4,$ dan $y = 2$. Aproksimasi

$$\iint_R f(x, y) dA$$

dengan menghitung jumlah Riemann dengan fungsi dua peubah:

$$a) f(x, y) = 12 - x - y$$

$$b) f(x, y) = 10 - y^2$$

$$c) f(x, y) = \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y)$$

2.3 Latihan 1

Problem

3. Hitunglah masing-masing integral berulang dari

$$1) \int_0^3 \int_0^2 (9 - x) \, dx dy$$

$$2) \int_1^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) \, dy dx$$

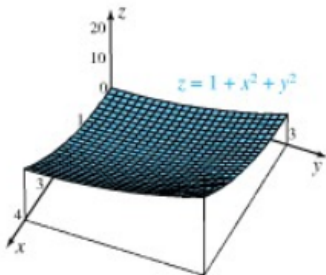
$$3) \int_0^4 \int_0^8 \left[\frac{64 - 8x + y^2}{16} \right] dy dx$$

2.3 Latihan 1

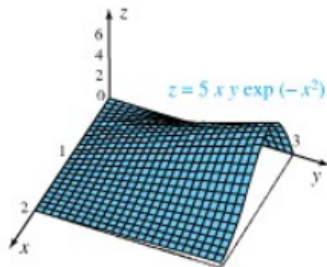
Problem

4. Hitunglah volume benda pejal dibawah permukaan:

23.

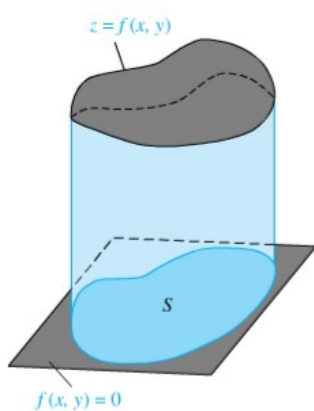


24.

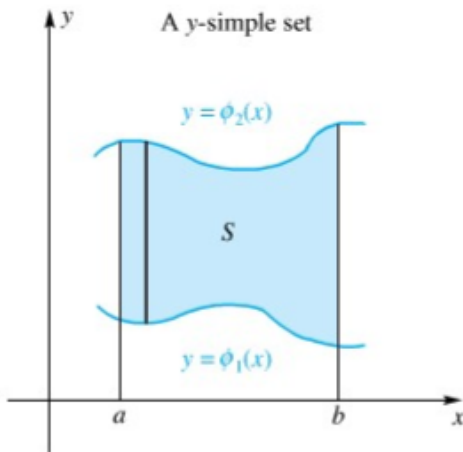


3.1 Definisi dan Ilustrasi

bagaimana menghitung Integral Lipat pada daerah bukan persegipanjang?



3.2 Integral pada Daerah y-Sederhana



3.2 Integral pada Daerah y-Sederhana

Definition

Himpunan S disebut y -sederhana apabila S dapat dituliskan sebagai

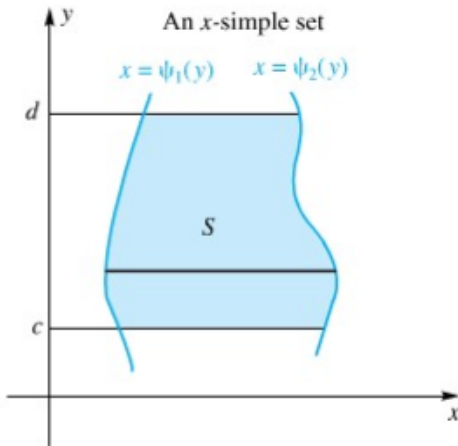
$$S = \{(x, y) : u_1(x) \leq y \leq u_2(x), a \leq x \leq b\}$$

dengan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ kontinu.

Dalam hal ini, Integral f pada S dapat dihitung sebagai

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_a^b \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y) dy dx$$

3.3 Integral pada Daerah x-Sederhana



3.3 Integral pada Daerah x-Sederhana

Definition

Himpunan S disebut x-sederhana apabila S dapat dituliskan sebagai

$$S = \{(x, y) : c \leq y \leq d, v_1(x) \leq x \leq v_2(x)\}$$

dengan $v_1(x)$ dan $v_2(x)$ kontinu.

Dalam hal ini, Integral f pada S dapat dihitung sebagai

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_c^d \int_{v_1(x)}^{v_2(x)} f(x, y) dx dy$$

3.4 Beberapa Contoh Soal

Example

- ① Hitunglah

$$\iint_S xy dA$$

apabila S adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 1$.

- ② Hitunglah

$$\iint_S e^{x^2} dA$$

apabila S adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh $y = 2x$, garis $x = 4$ dan sumbu- x .

3.4 Beberapa Contoh Soal

Solution

$$\begin{aligned}\iint_S xy dA &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 xy \, dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{x}{2} - \frac{x^5}{2} \right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{12} \right]_{-1}^1 \\ &= 0\end{aligned}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "