KALKULUS LANJUT

Integral Lipat

Resmawan

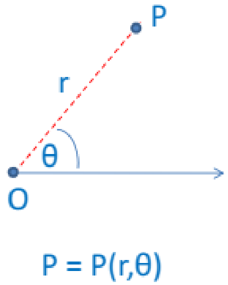
Universitas Negeri Gorontalo

7 November 2018

13.4. Integral Lipat pada Koordinat Polar

4.1 Sistem Koordinat Polar

- Sistem koordinat polar terdiri dari **sumbu polar**, yaitu berupa setengah garis yang berimpit dengan sumbu$-x$ positif pada bidang R^2 dan titik asal O.
- Setiap titik P pada bidang kemudian dinyatakan dengan jaraknya dari O, katakanlah r, dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar (*dihitung berlawanan arah dengan arah jarum jam*).



4.2 Hubungan Koordinat Polar dan Koordinat Cartesius

- Jika $P = P(r, \theta)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat Cartesius sebagai $P = P(x, y)$ dengan

$$x = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\sin\theta$$

- Sebaliknya, jika $P = P(x, y)$, maka P dapat dinyatakan dalam koordinat polar $P = P(r, \theta)$ dengan

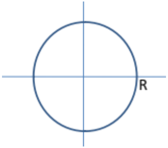
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{dan} \quad \tan\theta = y/x$$

dengan penafsiran nilai θ yg tepat untuk $x = 0$.

4.3 Persamaan Kurva dalam Koordinat Polar

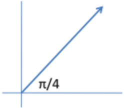
- Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari R dapat dinyatakan secara sederhana dalam koordinat polar sebagai

$$r = R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



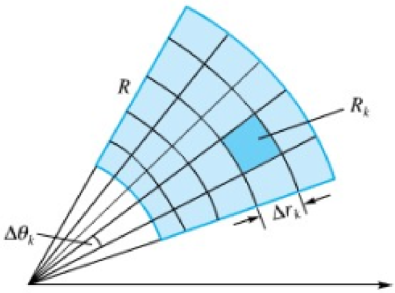
- Persamaan setengah garis $y = x$, dengan $x > 0$, dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai

$$r > 0, \quad \theta \geq \frac{\pi}{4}$$



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

- Jika Elemen Luas dalam Koordinat Cartesius dinyatakan dengan
$$\Delta A = \Delta x . \Delta y$$
- Maka Elemen Luas dalam Koordinat Polar dinyatakan dengan
$$\Delta A = r \Delta r . \Delta \theta$$
- Tahu darimana? Perhatikan Gambar berikut:



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Definition

Dengan subtitusi stitusi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, integral lipat dua yang semula dinyatakan dalam koordinat Cartesius sekarang dinyatakan dalam koordinat polar sebagai:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ drd\theta$$

Catatan: Daerah seperti setengah lingkaran atau cincin dalam koordinat polar, setara dengan "*persegi panjang*".

4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

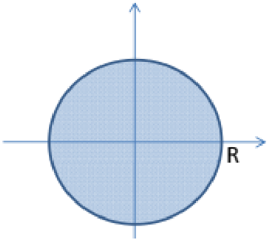
Beberapa daerah dalam koordinat polar yang perlu diperhatikan:

- Daerah cakram lingkaran

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

dapat dinyatakan sebagai

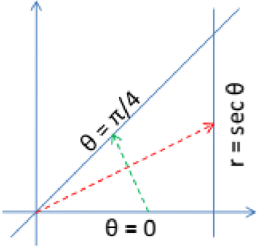
$$S = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

- Daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu$-x$, garis $y = x$, dan garis $x = 1$, merupakan daerah $r-$sederhana, dengan

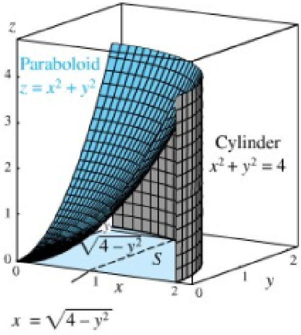
$$0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Example

Tentukan volume benda pejal yang terletak di Oktan I dan dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang-bidang koordinat.



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Solution

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2\, r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 d\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

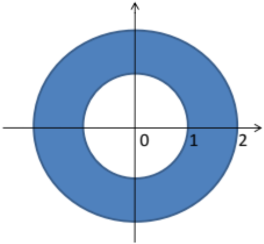
4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Example

Hitunglah

$$I = \iint_S x^2 \, dA$$

apabila S adalah daerah cincin yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Solution

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S x^2\, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\cos^2\theta\ r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\cos^2\theta\ dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cos^2\theta\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{15}{4}\cos^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\ d\theta \\
&= \frac{15\pi}{4}
\end{aligned}
$$

4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Example

Hitunglah

$$I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$$

apabila S adalah daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu$-x$, garis $y = x$ dan garis $x = 1$.

4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

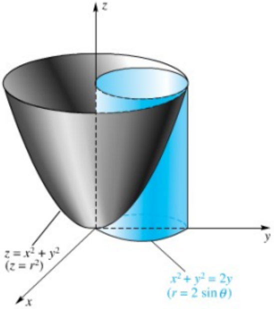
Solution

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} \frac{1}{r}\; r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} 1 dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [r]_1^{\sec\theta}\; d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\; d\theta \\
&= \ln\left[\sec\theta + \tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln\left(\sqrt{2}+1\right)
\end{aligned}$$

4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Example

Tentukan volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + y^2$, tabung $x^2 + y^2 = 2y$, dan bidang$-xy$.



4.4 Perhitungan Lipat Dua Koordinat Polar

Solution

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S x^2+y^2\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\ r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "