

# KALKULUS LANJUT

*Semester Ganjil 2019-2020*

Resmawan

Jurusan Matematika FMIPA  
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

## 2. Turunan Parsial

## 2.1 Definisi Turunan Parsial

### Definition

Misalkan  $f$  fungsi dua variabel  $x$  dan  $y$ . Jika  $y$  dijaga agar tetap konstan, katakanlah  $y = y_0$ , maka  $f(x, y_0)$  adalah fungsi satu variabel  $x$ .

Turunannya di  $x = x_0$  disebut **Turunan Parsial  $f$  terhadap  $x$**  di  $(x_0, y_0)$  dan dinyatakan oleh  $f_x(x_0, y_0)$ , dengan notasi

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara yang sama, turunan parsial  $f$  terhadap  $y$  di  $(x_0, y_0)$  dinyatakan oleh  $f_y(x_0, y_0)$  dengan notasi

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

## 2.1 Definisi Turunan Parsial

### Example

Carilah  $f_x(1, 2)$  dan  $f_y(1, 2)$  jika  $f(x, y) = x^2y + 3y^3$

### Solution

Untuk mencari  $f_x(x, y)$  kita perlakukan  $y$  sebagai konstan dan diturunkan terhadap  $x$ ,

$$f_x(x, y) = 2xy + 0$$

sehingga diperoleh

$$f_x(1, 2) = 2(1)(2) = 4$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$f_y(x, y) = x^2 + 9y^2$$

sehingga

$$f_y(1, 2) = 1^2 + 9(2)^2 = 37$$

## 2.1 Definisi Turunan Parsial

Jika  $z = f(x, y)$ , turunan parsial dapat dinyatakan dengan notasi lain sebagai berikut:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Notasi  $\frac{\partial}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial}{\partial y}$  disebut operator linear yang memiliki fungsi setara dengan operator  $D_x$  dan  $\frac{d}{dx}$  yang kita jumpai pada turunan fungsi satu variabel.

## 2.1 Definisi Turunan Parsial

### Example

Jika  $z = x^2 \sin(xy^2)$ , carilah  $\frac{\partial z}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial z}{\partial y}$

### Solution

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= x^2 y^2 \cos(xy^2) + 2x \sin(xy^2) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \cos(xy^2) \cdot 2xy \\ &= 2x^3 y \cos(xy^2)\end{aligned}$$

## 2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Secara umum karena turunan parsial suatu fungsi  $x$  dan  $y$  adalah fungsi lain dari dua variabel yang sama ini, maka turunan tersebut dapat dideferensialkan secara parsial terhadap  $x$  dan  $y$ , yang menghasilkan empat buah turunan parsial kedua dari fungsi  $f$  :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

## 2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

### Example

Carilah keempat turunan parsial kedua dari

$$f(x, y) = xe^y - \sin \frac{x}{y} + x^3y^2$$

### Solution

*Berdasarkan fungsi yang diberikan, diperoleh masing-masing turunan parsial pertama*

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= e^y + 3x^2y^2 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \\f_y(x, y) &= xe^y + 2x^3y + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}\end{aligned}$$



## 2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

### Solution

Sehingga diperoleh turunan parsial

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^y + 3x^2y^2 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \right) = 6xy^2 + \frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( xe^y + 2x^3y + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \right) \\ &= xe^y + 2x^3 + \frac{x^2}{y^4} \sin \frac{x}{y} - \frac{2x}{y^3} \cos \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( e^y + 3x^2y^2 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \right) \\ &= e^y + 6x^2y - \frac{x}{y^3} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( xe^y + 2x^3y + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \right) = e^y + 6x^2y - \frac{x}{y^3} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y}$$

## 2.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

- Turunan parsial tingkat tiga dan seterusnya dapat didefinisikan dengan cara yang sama dengan notasi yang serupa.
- Jika turunan parsial ketiga dari suatu fungsi  $f(x, y)$  diperoleh dari turunan parsial pertama terhadap  $x$  lalu turunan parsial kedua terhadap  $y$ , maka notasinya ditunjukkan oleh

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y x} \right) = \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy}$$

### Example

Carilah masing-masing  $f_{xyy}$  dan  $f_{xxy}$  dari fungsi

$$f(x, y) = xe^y - \sin \frac{x}{y} + x^3 y^2$$

## 2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

### Definition

Misalkan  $f$  suatu fungsi tiga variabel  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ . **Turunan Parsial  $f$  terhadap  $x$**  di  $(x, y, z)$  dinyatakan oleh  $f_x(x, y, z)$  atau  $\partial f(x, y, z) / \partial x$  dan didefinisikan oleh

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

- Dengan demikian  $f_x(x, y, z)$  dapat diperoleh dengan memperlakukan  $y$  dan  $z$  sebagai konstanta dan menurunkan  $f$  terhadap  $x$ .
- Turunan parsial terhadap  $y$  dan  $z$  dapat dilakukan dengan cara yang sama.
- Selanjutnya turunan parsial seperti  $f_{xy}$  dan  $f_{xyz}$  yang melibatkan diferensiasi terhadap lebih dari satu variabel disebut **Turunan Parsial Campuran**.

## 2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

### Example

Hitunglah masing-masing turunan parsial  $f_x$ ,  $f_y$ , dan  $f_z$  jika diberikan fungsi

$$f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$$

## 2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

### Solution

Untuk memperoleh  $f_x$ , perlakukan  $y$  dan  $z$  sebagai konstanta, sehingga

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$f_y(x, y, z) = x + 2z$$

dan

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

## 2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

### Example

Jika diberikan fungsi

$$T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$$

- 1 Hitunglah semua turunan parsial pertama
- 2 Hitung turunan parsial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial w \partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial w}, \text{ dan } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

## 2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

### Solution

#### 1 Turunan Parsial Pertama

$$T_w(w, x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \left( ze^{w^2+x^2+y^2} \right) = 2wze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_x(w, x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ze^{w^2+x^2+y^2} \right) = 2xze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_y(w, x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( ze^{w^2+x^2+y^2} \right) = 2yze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$T_z(w, x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( ze^{w^2+x^2+y^2} \right) = e^{w^2+x^2+y^2}$$

## 2.3 Turunan Parsial Fungsi Tiga Variabel atau Lebih

### Solution

#### 2. Turunan Parsial lainnya

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial w \partial x} &= \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial w} \left( 2xze^{w^2+x^2+y^2} \right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial w} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial w} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2wze^{w^2+x^2+y^2} \right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{w^2+x^2+y^2} \right) = 0\end{aligned}$$



## 2.4 Latihan 2

### Problem

① Carilah semua turunan parsial pertama dari fungsi berikut:

- $f(x, y) = (4x - y^2)^{3/2}$
- $f(x, y) = e^x \cos y$
- $f(x, y) = (3x^2 + y^2)^{-1/2}$
- $f(u, v) = e^{uv}$
- $f(s, t) = \ln(s^2 - t^2)$
- $f(r, \theta) = 3r^2 \cos 2\theta$

② Tunjukkan bahwa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

- $f(x, y) = \tan^{-1} xy$
- $f(x, y) = 3e^{2x} \cos y$
- $f(x, y) = (x^3 + y^2)^5$

## 2.4 Latihan 2

### Problem

3. *Hitung turunan parsial masing-masing fungsi yang diberikan*
  - a.  $F_x(-1, 4)$  dan  $F_y(-1, 4)$  dari fungsi  $F(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$
  - b.  $f_x(\sqrt{5}, -2)$  dan  $f_y(\sqrt{5}, -2)$  dari fungsi  $f(x, y) = \tan^{-1}(y^2/x)$
4. *Berikan definisi dalam bentuk limit untuk turunan parsial berikut*
  - a.  $f_y(x, y, z)$
  - b.  $f_z(x, y, z)$
  - c.  $G_x(w, x, y, z)$
  - d.  $\partial/\partial z(x, y, z, t)$

**" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "**