PENGANTAR SISTEM DINAMIK

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

2 Analisis Kestabilan Sistem Linear

2.1 Pendahuluan

- Salah satu tahapan dalam pemodelan matematika, khususnya pada model deterministik adalah analisis kestabilan pada titik tetap.
- Oleh karena itu, pada bagian ini akan dibahas lebih lanjut tentang teori-teori yang berkaitan dengan analisis kestabilan.
- Beberapa teori yang berkaitan telah dibahas pada subbab sebelumnya.

2.2 Definisi Sistem Linear dan Titik Tetap

Definition

Sistem linear pada persamaan (1) dalam kasus dua dimensi dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= bx + by \end{aligned} \tag{10}$$

dengan a, b, c, d konstanta/parameter. Dari $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Selanjutnya Titik Tetap pada sistem (10) diperoleh pada kondisi $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$.

2.3 Analisis Kestabilan Titik Tetap

- Misal sistem persamaan diferensial pada persamaan (10) , dengan Matriks Koefisien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Didefinisikan Persamaan Karakteristik, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, sedemikian sehingga diperoleh persamaan

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0 \tag{11}$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= a + d \qquad [trace\,(A)] \\ \beta &= ad - bc \qquad [\det\,(A)] \end{aligned}$$

- Dari persamaan (11) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_{12} = \frac{\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \tag{12}$$

2.4 Jenis Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

- Nilai eigen akan menentukan jenis kestabilan dari suatu sistem dan pola geometris dari jenis kestabilannya.
- Misalkan suatu sistem persamaan diferensial linear orde dua homogen

$$\dot{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{13}$$

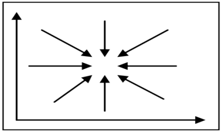
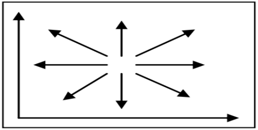
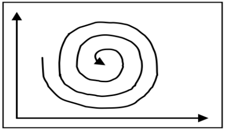
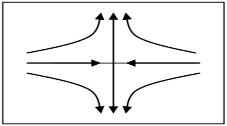
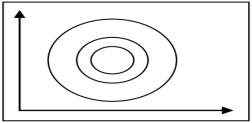
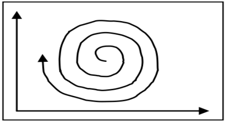
  dengan A matriks ukuran 2×2 dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2.
- Solusi dari persamaan (13) dapat diinterpretasikan secara geometris berupa suatu kurva dalam bidang fase 2 2.
- Untuk ukuran $n \times n$, maka maka solusi berupa kurva di ruang berdimensi n.
- Jenis kestabilan berdasarkan nilai eigen matriks A disajikan pada Tabel berikut.

2.4 Jenis Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

Nilai Eigen	**Jenis Titik Tetap**	**Sifat Kestabilan**
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Improper Node	Tidak Stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Improper Node	Stabil Asimstotik
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik Saddle	Tidak Stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Proper atau Improper Node	Tidak Stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Proper atau Improper Node	Stabil Asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm \mu i$		
$\mu > 0$	Titik Spiral	Tidak Stabil
$\mu < 0$		Stabil Asimtotik
$\lambda_1 = \mu i,\ \lambda_2 = -\mu i$	Center	Stabil

2.4 Jenis Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

Secara visual, sifat kestabilan berdasarkan nilai eigen ditampilkan pada gambar-gambar berikut

 Simpul Stabil	 Simpul Tak Stabil	 Spiral Stabil
 Sadle Node	 Center	 Spiral Tak Stabil

2.5 Beberapa Contoh Soal

Example

Lakukan analisis kestabilan pada sistem otonom linear

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -2x + y \\
\dot{y} &= x - 2y
\end{aligned}
$$

2.5 Beberapa Contoh Soal

Solution

Dari SPD diperoleh matriks koefisien A, *yaitu*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

sehingga dengan persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$, *diperoleh*

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \vee \quad \lambda_2 = -3$$

Selanjutnya, tentukan vektor eigen untuk masing-masing nilai eigen.

2.5 Beberapa Contoh Soal

Solution

- *Untuk* $\lambda_1 = -1$, *maka*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 - v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Misal $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 1$, *sehingga diperoleh vektor eigen*

$$\mathbf{u}_1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Beberapa Contoh Soal

Solution

- *Untuk* $\lambda_1 = -3$, *maka*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 + v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Misal $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -1$, *sehingga diperoleh vektor eigen*

$$\mathbf{u}_2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.5 Beberapa Contoh Soal

Solution

- *Dengan demikian diperoleh Solusi Umum*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *Untuk nilai awal* $(x_0, y_0) = (1, 1)$, *diperoleh solusi khusus*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \\ y(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

artinya arah trayektori dari titk $(1, 1)$ *bergerak menuju titk pusat* $(0, 0)$ *saat* $t \to \infty$.

2.5 Beberapa Contoh Soal

Solution

- *Untuk nilai awal* $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, *diperoleh solusi khusus*

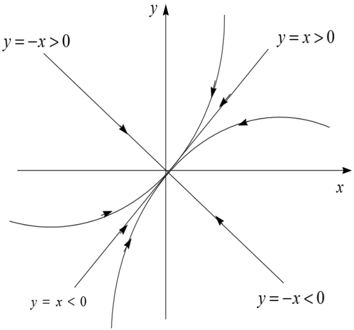
$$\begin{aligned} x(t) &= -e^{-3t} \\ y(t) &= e^{-3t} \end{aligned}$$

  artinya arah trayektori dari titk $(-1, 1)$ *bergerak menuju titk pusat* $(0, 0)$ *saat* $t \to \infty$.
- *Silahkan lakukan percobaan untuk beberapa nilai awal lain.*

2.5 Beberapa Contoh Soal

Solution

- *Dengan cara sama untuk beberapa nilai awal lain akan diperoleh potret fase berikut*



2.6 Latihan 2

Problem

Buatlah gambar potret fase dari sistem otonom linear berikut:

$$\text{1)}\quad \begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= 2y \end{aligned}$$

$$\text{2)}\quad \begin{aligned} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y \end{aligned}$$

$$\text{3)}\quad \begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 2y \\ \dot{y} &= 2x - 2y \end{aligned}$$