PENGANTAR SISTEM DINAMIK

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

4 Penondimensionalan

4.1 Definisi Penondimensionalan

Definition

Penondimensionalan adalah suatu metode untuk menyederhanakan suatu persamaan banyak parameter menjadi persamaan dengan sedikit parameter. Biasanya penondimensionalan mengelompokkkan beberapa parameter dengan sebuah parameter tunggal (Srogatz 1994). Penondimensionalan dilakukan untuk menyederhanakan model dengan cara mengubah parameter model ke parameter baru tanpa dimensi.

Example

Lakukan perubahan pada model berikut untuk mendapatkan model baru tanpa dimensi.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \tag{16}$$

4.2 Contoh Penondimensionalan

Solution

- *Misal peubah baru tanpa dimensi, masing-masing adalah* $\overline{x}$ *dan* $\overline{y}$,

$$x = \overline{x} \cdot \widehat{x}; \quad y = \overline{y} \cdot \widehat{y}; \quad dan \quad t = \overline{t} \cdot \widehat{t}$$

  dengan $\overline{x}, \overline{y}, \overline{t}$ *adalah Peubah Tanpa Dimensi dan* $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{t}$ *Faktor Pengali.*

- *Subtitusi variabel baru ke persamaan* (16) , *diperoleh*

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\overline{x} \cdot \widehat{x}\right)}{d\left(\overline{t} \cdot \widehat{t}\right)} &= a\left(\overline{x} \cdot \widehat{x}\right) - b\left(\overline{x} \cdot \widehat{x}\right)\left(\overline{y} \cdot \widehat{y}\right) \\ \frac{d\left(\overline{y} \cdot \widehat{y}\right)}{d\left(\overline{t} \cdot \widehat{t}\right)} &= -c\left(\overline{y} \cdot \widehat{y}\right) + d\left(\overline{x} \cdot \widehat{x}\right)\left(\overline{y} \cdot \widehat{y}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

4.2 Contoh Penondimensionalan

Solution

- *Kalikan kedua ruas pada model* (17), *masing-masing dengan* $\frac{\widehat{t}}{\widehat{x}}$ *dan* $\frac{\widehat{t}}{\widehat{y}}$, *sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} &= a\,\overline{x}\,\widehat{t} - b\,\overline{x}\,\widehat{t}\,\overline{y}\,\widehat{y} \\ \frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} &= -c\,\overline{y}\,\widehat{t} + d\,\overline{x}\,\widehat{x}\,\overline{y}\,\widehat{t} \end{aligned}$$

- *Selanjutnya, pilih masing-masing* $\widehat{t} = \frac{1}{a}$ *dan* $\widehat{y} = \frac{a}{b}$, *sehingga*

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} &= \overline{x} - \overline{x}\,\overline{y} \\ \frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} &= -\frac{c}{a}\,\overline{y} + \frac{d}{a}\,\overline{x}\,\widehat{x}\,\overline{y} \end{aligned}$$

4.2 Contoh Penondimensionalan

Solution

- *Dengan memilih* $\widehat{x} = \frac{a}{d}$ *dan* $\alpha = \frac{c}{a}$, *maka diperoleh model tanpa dimensi*

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} &= \overline{x} - \overline{x}\ \overline{y} \\ \frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} &= -\alpha\ \overline{y} + \overline{x}\ \overline{y} \end{aligned} \tag{18}$$

Problem

Lakukan analisis pada sistem nondimensional yang diperoleh pada persamaan (18)

4.2 Contoh Penondimensionalan

Example

Lakukan penondimensioanalan pada model berikut untuk mendapatkan model baru tanpa dimensi, kemudian analisis sistem nondimensional yang diperoleh.

$$\begin{aligned}
1)\quad \frac{dx}{dt} &= ax - bxy - ex^2 \\
\frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \\
2)\quad \frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\
\frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \xi I - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \xi I - \mu R
\end{aligned}$$

4.2 Contoh Penondimensionalan

Solution

1. *Misal variabel tanpa dimensi* $\overline{x}$ *dan* $\overline{y}$ *dengan* $\overline{x} = \frac{x}{\widehat{x}}, \overline{y} = \frac{y}{\widehat{y}}$*,maka*

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{x}}{dt} &= \frac{1}{\widehat{x}}\left[\frac{dx}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{\widehat{x}}\left[ax - bxy - ex^2\right] \\
&= \frac{1}{\widehat{x}}\left[a\,\widehat{x}\,\overline{x} - b\,\widehat{x}\,\overline{x}\,\widehat{y}\,\overline{y} - e\widehat{x}^2\overline{x}^2\right] \\
&= a\,\overline{x} - b\,\overline{x}\,\widehat{x}\,\overline{y} - e\,\widehat{y}\,\overline{x}^2, \quad Pilih\ \widehat{x} = \frac{1}{b}\ dan\ \widehat{y} = \frac{1}{e} \\
&= a\,\overline{x} - \ \overline{x}\,\overline{y} - \ \overline{x}^2
\end{aligned}$$

4.2 Contoh Penondimensionalan

Solution

1. *Dengan cara sama diperoleh*

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{y}}{dt} &= \frac{1}{\widehat{y}}\left[\frac{dy}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{\widehat{y}}\left[-c\widehat{y}\ \overline{y} + d\ \widehat{x}\ \overline{x}\ \widehat{y}\ \overline{y}\right] \\
&= \frac{1}{\widehat{y}}\left[-c\ \overline{y} + d\ \widehat{x}\ \overline{x}\ \overline{y}\right] \\
&= -c\ \overline{y} + \frac{d}{b}\ \overline{x}\ \overline{y} \\
&= -c\overline{y} + \frac{d}{b}\overline{xy}
\end{aligned}
$$

4.2 Contoh Penondimensionalan

Solution

1. *Dengan demikian diperoleh sistem tanpa dimensi*

$$\frac{dx}{dt} = a\,\overline{x} - \overline{x}\,\overline{y} - \overline{x}^2$$
$$\frac{d\overline{y}}{dt} = -c\overline{y} + \alpha\overline{xy}$$

dengan

$$\alpha = \frac{d}{b}$$

4.3 Latihan 4

Problem

Lakukan transformasi penondimensionalan pada model berikut untuk menghasilkan model tanpa dimensi. Tentukan titik tetap pada model yang terbentuk:

$$
\begin{aligned}
1) \quad \frac{dS}{dt} &= (1-\alpha)\,\mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\
\frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \xi I - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \alpha \mu N + \xi I - \mu R \\
2) \quad \dot{X} &= aX\left(1 - \frac{X+Y}{K}\right) - \frac{pXY}{X+Y+q} \\
\dot{Y} &= bY\left(1 - \frac{X+Y}{K}\right) + \frac{pxy}{x+y+q} - rY
\end{aligned}
$$

5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

5.1 Pendahuluan

- Misal diberikan Persamaan Karakteristik orde n

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{19}$$

dengan a_i, $i = 1, 2..., n$ adalah konstanta real.

- Tidak selamanya kita bertemu dengan persamaan karakteristik yang mudah dievaluasi akar-akar atau nilai eigennya.
- Kriteria Routh-Hurwitz menunjukkan keberadaan akar-akar tak stabil pada persamaan polinomial orde n tanpa perlu menyelesaikannya.
- Dalam hal ini ketabilan mutlak dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karaktristik.
- Kriteria Hurwitz menekankan pada aspek determinan, sedangkan kriteria Routh pada aspek formulasi runtun (array).

5.2 Kriteria Kestabilan Hurwitz

- Kriteria kestabilan Hurwitz memperhatikan determinan matriks Hurwitz yang didefinisikan dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik (19) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_n \end{bmatrix} \tag{20}$$

- Berdasarkan matriks Hurwitz pada persamaan (20), dapat dievaluasi determinan dari sub-sub matriks sebagai berikut:

$$H_1 = [a_1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \cdots$$

5.2 Kriteria Kestabilan Hurwitz

Theorem

Semua akar dari polinomial (19) *adalah negatif atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif.*

$$\det(H_j) > 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Example

Berikan analasis kestabilan pada sistem dengan persamaan karakteristik orde 4

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 18\lambda^2 + 16\lambda + 5 = 0$$

5.2 Kriteria Kestabilan Hurwitz

Solution

- *Didefinisikan Matriks Hurwitz ordo* 4×4

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 18 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- *Dieavaluasi determinan sub matriks*

$$\begin{aligned} |H_1| &= |8| = 8 > 0, \\ |H_2| &= \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 18 \end{vmatrix} = 128 > 0, \end{aligned}$$

5.2 Kriteria Kestabilan Hurwitz

Solution

$$
\begin{aligned}
|H_3| &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 16 & 18 & 8 \\ 0 & 5 & 16 \end{vmatrix} = 1728 > 0, \\
|H_4| &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 18 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 8640 > 0
\end{aligned}
$$

$Karena \det(H_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4,$ *maka sistem stabil.*

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

- Kriteria kestabilan Routh menekankan pada koefisien-koefisienpersamaan karakteristik yang dituangkan ke dalam bentuk runtun (array), biasanya disebut *Runtun-Routh* (*Routh Array*).
- Didefinisikan *Routh Array* berdasarkan persamaan karateristik (19) , dalam bentuk tabel berikut:

λ^n	$\mathbf{a}_0$	a_2	a_4	a_6	$\cdots$	0
λ^{n-1}	$\mathbf{a}_1$	a_3	a_5	a_7	$\cdots$	0
λ^{n-2}	$\mathbf{b}_1$	b_2	b_3	0	$\cdots$	0
λ^{n-3}	$\mathbf{c}_1$	c_2	c_3	0	$\cdots$	0
λ^{n-4}	$\mathbf{d}_1$	d_2	d_3	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ^2	$\mathbf{e}_1$	e_2				
λ^1	$\mathbf{f}_1$					
λ^0	$\mathbf{g}_1$					

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

- Koefisien pada baris pertama dan kedua diambil dari koefisien persamaan karakteristik, sementara koefisien pada baris ketiga dan seterusnya dapat dievaluasi mengikuti pola berikut:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1};\; b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1};\; b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1};\; c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

dan seterusnya sampai semua koefisien diperoleh membentuk matriks setengah piramida terbalik.

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

- Dapat ditunjukkan bahwa Kriteria kestabilan Routh identik dengan kriteria kestabilan Hurwitz:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{|H_2|}{|H_1|}, \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{|H_3|}{|H_2|}, \cdots$$

- Kriteria Kestabilan:
  1. Semua akar dari polinomial (19) adalah negatif atau memiliki bagian real negatif jika semua koofisien dari kolom pertama tabel Routh bernilai positif .
  2. Jika salah satu atau lebih dari koefisien-koefisien tersebut bernilai negatif, maka sistem tersebut tidak stabil.
  3. Banyaknya perubahan tanda (dari positif ke negatif atau sebaliknya) pada kolom pertama menunjukkan banyaknya akar-akar positif dari persamaan karakteristik.

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

Example

1. Tunjukkan bahwa contoh sebelumnya stabil dengan kriteria Routh
2. Lakukan analisis pada polinom berikut

$$3\lambda^4 + 10\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

Solution

Dari persamaan karakteristik

$$3\lambda^4 + 10\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

dapat dibuat tabel Routh Array

λ^4	**3**	5	2
λ^3	**10**	5	0
λ^2	$\mathbf{b}_1$	b_2	0
λ^1	$\mathbf{c}_1$	0	0
λ^0	$\mathbf{d}_1$	0	0

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

Solution

Evaluasi b_1, b_2, c_1, d_1 *diperoleh*

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{10 \cdot 5 - 3 \cdot 5}{10} = \frac{7}{2}, \; b_2 = \frac{10 \cdot 2 - 3 \cdot 0}{10} = 2 \\ c_1 &= \frac{\frac{7}{2} \cdot 5 - 10 \cdot 2}{\frac{7}{2}} = -\frac{5}{7}, \; d_1 = \frac{-\frac{5}{7} \cdot 2 - \frac{7}{2} \cdot 0}{-\frac{5}{7}} = 2 \end{aligned}$$

Terlihat pada kolom 1, terdapat dua kali perubahan tanda dari 2 ke $-\frac{5}{7}$ *dan dari* $-\frac{5}{7}$ *ke 2, sehingga sistem tidak stabil*

5.3 Kriteria Kestabilan Routh

Example

Sistem dinamik

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

dapat dianalisis dengan menggunakan tabel Routh

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	0
s^0	a_3	0

Terlihat bahwa sistem akan stabil jika memenuhi syarat

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

5.5 Latihan 5

Problem

1. *Lakukan analisis dengan menggunakan kriteria kestabilan Hurwitz dan Kriteria Kestabilan Routh masing-masing pada sistem dengan bentuk polinomial berikut*
   a. $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$
   b. $a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$
2. *Identifikasi kriteria yang harus dipenuhi agar sistem berikut stabil*

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + K = 0$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "