PENGANTAR SISTEM DINAMIK

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

6 Analisis Sensitivitas

6.1 Pendahuluan

- Umumnya nilai parameter pada model matematika tidak dapat dipastikan, disebabkan ketiadaan data atau ketersidiaan data tidak lengkap.
- Oleh karena itu, penting dilakukan analisis sensitivitas untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh pada model.
- Analasis sensitivitas dibedakan menjadi dua macam, yaitu:
  1. **Analisis Sensitivitas Lokal**
     Analisis sensitifitas lokal dilakukan dengan melakukan eksplorasi nilai dari satu atau dua parameter secara bersama dan nilai parameter lainnya tetap atau konstan. Analisis sensitivitas lokal dapat dilakukan dengan elsplorasi semua atau sebagian besar nilai parameter.
  2. **Analisis Sensitivitas Global**
     Analisis sensitivitas global dilakukan dengan melakukan variasi terhadap semua parameter secara bersamaan dan melihat pengaruhnya pada output yang diteliti.

6.2 Analisis Sensitivitas Lokal

Analisis sensitivitas lokal dapat dilakukan dengan menggunakan teknik turunan parsial. Pembahasan lebih lanjut pada Chitnis, *et.al* (2008).

Definition

Misal suatu variabel V dan parameter p. Indeks sensitivitas normalisasi dari variabel V terdiferensialkan pada parameter p didefinisikan

$$C_p^V = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V}$$

Dalam hal ini, V adalah variabel yang akan dianalisis terhadap parameter p.

6.2 Analisis Sensitivitas Lokal

Example

Misal diberikan model dengan persamaan yang melibatkan variabel F,yaitu

$$F = \frac{2a + b^2}{c + b}$$

dengan a, b, c adalah parameter. Lakukan analisis sensitivitas untuk mengidentifikasi parameter yang paling berpengaruh pada model.

6.2 Analisis Sensitivitas Lokal

Solution

- *Analisis sensitivitas dilakukan dengan menentukan indeks sensitivitas dari semua parameter yang berpengaruh pada model.*

$$\begin{aligned} C_a^F &= \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{2}{c+b} \\ C_b^F &= \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{2bc + b^2 - 2a}{(c+b)^2} \\ C_c^F &= \frac{\partial F}{\partial c} = \frac{-\left(2a + b^2\right)}{(c+b)^2} \end{aligned}$$

- *Selanjutnya, misal nilai parameter masing-masing adalah* $a = 0.05$, $b = 0.2$, *dan* $c = 0.4$, *sehingga diperoleh*

$$C_a^F = 3.33, \quad C_b^F = 0.277, \quad C_c^F = -0.388$$

6.2 Analisis Sensitivitas Lokal

Solution

- *Indeks sensitivitas yang bernilai positif ditunjukkan oleh parameter a dan b, artinya jika salah satu dari parameter a atau b diperbesar sementara yang lain konstan, akan berkontribusi pada peningkatan variabel F.*
- *Indeks sensitivitas yang bernilai negartif ditunjukkan oleh parameter c, artinya jika nilai parameter c diperbesar, akan berkontribusi pada penurunan nilai variabel F.*
- $C_a^F = 3.33$, *menunjukkan bahwa dengan meningkatkan (menurunkan) nilai parameter a sebesar* 10%, *akan meningkatkan (menurunkan) nilai variabel F sebesar* 33.3%.

6.2 Analisis Sensitivitas Lokal

Solution

- $C_c^F = -0.388$,*menunjukkan bahwa dengan meningkatkan (menurunkan) nilai parameter* c *sebesar* 10%, *akan menurunkan (meningkatkan) nilai variabel* F *sebesar* 3.88%.
- *Hasil ini juga menunjukkan bahwa parameter* a *yang paling dominan mempengaruhi perubahan nilai parameter* F.

6.3 Analisis Sensitivitas Global

- Analisis sensitivitas global dilakukan dengan Teknik *Latin Hypercube Sampling* (LHS) dan *Partial Rank Correlation Coefficient* (PRCC).
- LHS adalah salah satu teknik sampling Monte Carlo yang mendistribusi parameter menjadi N interval dengan N adalah ukuran sampel. Setiap interval dari parameter disampel satu kali tanpa pengembalian dan semua nilai parameter dieksplorasi.
- Selanjutnya Input dan Output diurutkan dan nilai Indeks Sensitivitas ditentukan menggunakan PRCC.
- Teori selengkapnya dapat dipelajari pada:
  1. Marino, *et.al*, 2008, A Metodolgy for performing global uncertainly and sensitivity analysis in systems biology, *J.Theor. Biol*. 254, 178-196.
  2. Blower, *et.al*, 1994, Sensitivity and uncertainly analysis of complex models of disease transmission : an HIV model. *Int.Stat.Rev.* 62, 229-243.
  3. Wu, *et.al*, 2013, Sensivity analysis of infectious disease models: methods, advances, and their aplications, *J.R.Soc.Interface.* 10, 1-14.

6.3 Analisis Sensitivitas Global

- Misal kita punya kasus K parameter dengan N sampel, maka matriks LHS dinyatakan dengan

$$X = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NK} \end{bmatrix} \quad dan \ Y = \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \\ \vdots \\ O_N \end{bmatrix}$$

- Outputnya adalah solusi dari model matematika dengan menggunakan nilai parameter yang diperoleh dari matriks X.
- Selanjutnya dilakukan perankingan terhadap parameter dan output dan diperoleh matriks

$$X_R = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix} \quad dan \ Y_R = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

6.3 Analisis Sensitivitas Global

- Langkah berikut, menentukan PRCC dengan rumus

$$\begin{aligned}\gamma_{XY} &= \frac{Cov\left(x_j, y\right)}{\sqrt{Var\left(x_j\right) Var\left(y\right)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij}-\mu_x\right)\left(y_i-\mu_y\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij}-\mu_x\right)^2\left(y_i-\mu_y\right)^2}}\end{aligned}$$

  dengan μ_x dan μ_y adalah rata-rata sampel.
- Nilai sensitivitas parameter akan ditunjukkan dengan nilai PRCC yang mendekati angka ± 1.
- Nilai PRCC positif menunjukkan bahwa peningkatan nilai parameter berbanding lurus dengan peningkatan nilai output., dan sebaliknya.

7 Bilangan Reproduksi Dasar

7.1 Konsep Bilangan Reproduksi Dasar

Definition

Bilangan reproduksi dasar adalah jumlah infeksi baru yang dihasilkan dari satu individu terinfeksi dalam populasi. Umumnya dinotasikan dengan

$$R_0$$

Bilangan reproduksi dasar dapat juga disebut dengan istilah nilai ambang batas epidemik.

Example

Nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = 2$$

menunjukkan bahwa satu individu terinfeksi dapat menghasilkan 2 individu baru yang terinfeksi.

7.1 Konsep Bilangan Reproduksi Dasar

Secara umum, kondisi yang memungkinkan dari bilangan reproduksi dasar adalah:

1. Jika $R_0 < 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada setiap generasi, sehingga penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 > 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat pada setiap generasi, sehingga penyakit akan meningkat dan mewabah.

Bilangan repruduksi dasar atau nilai ambang batas epidemik dapat ditentukan melalui matriks *Next Generation* yang dikonstruksi dari **kelompok individu terinfeksi atau terpapar**.

7.1 Konsep Bilangan Reproduksi Dasar

Penentuan bilangan reproduksi dasar dapat mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Misal n adalah jumlah kompartmen atau kelompok terinfeksi dalam populasi, dan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ adalah kemungkinan kelas terinfeksi dari individu. Dengan linearisasi disekitar titik tetap bebas penyakit, diperoleh persamaan
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (T - U)\,\mathbf{x}$$
dengan T matriks transmisi infeksi baru dalam populasi dan U matriks transisi perpindahan individu antar kelompok individu (kompartmen).
2. The Next Genation Matrix diperoleh dengan formula
$$K = TU^{-1}$$
Bilangan reproduksi dasar adalah nilai eigen terbesar (*radius spektral*) dari matriks K.

7.2 Contoh pada Model SEIR

Example

Misal model SEIR diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= A - \mu S - \beta SI \\
\frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\mu + \kappa)E \\
\frac{dI}{dt} &= \kappa E - (\mu + \alpha)I \\
\frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R
\end{aligned}$$

dengan asumsi populasi konstan.

7.2 Contoh pada Model SEIR

Solution

- *Dari model, diperoleh titik tetap bebas penyakit*

$$S_0 = \frac{A}{\mu}$$

- *Perhatikan populasi dengan individu terinfeksi, yaitu*

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\mu + \kappa)E \\ \frac{dI}{dt} &= \kappa E - (\mu + \alpha)I \end{aligned}$$

7.2 Contoh pada Model SEIR

Solution

- *Misal F adalah vektor untuk infeksi baru dan V adalah vektor untuk perpindahan antar kompartmen, maka*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta S I \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu+\kappa)E \\ -\kappa E + (\mu+\alpha) I \end{pmatrix}$$

- *Misal turunan parsial F terhadap E dan I masing-masing dinotasikan F_E dan F_I, turunan parsial V terhadap E dan I masing-masing dinotasikan V_E dan V_I, serta linearisasi pada titik tetap bebas penyakit S_0, maka*

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} F_{1_E} & F_{1_I} \\ F_{2_E} & F_{2_I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta S_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U &= \begin{pmatrix} V_{1_E} & V_{1_I} \\ V_{2_E} & V_{2_I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu+\kappa & 0 \\ -\kappa & \mu+\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.2 Contoh pada Model SEIR

Solution

- *Selanjutnya diperoleh Next Generation Matrix, yaitu*

$$
\begin{aligned}
K &= TU^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\kappa\beta S_0}{(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)} & \frac{\beta S_0}{\mu+\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- *Dengan menghitung nilai eigen terbesar dari matriks K, diperoleh bilangan reproduksi dasar, yaitu*

$$R_0 = \frac{\kappa\beta S_0}{(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)}$$

7.3 Latihan 6

Problem

1. *Identifikasi indeks sensitivitas dari setiap parameter pada bilangan reproduksi dasar*

$$R_0 = \frac{\kappa\beta}{(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)}$$

2. *Berikan interpretasi pada indeks sensitivitas jika diberikan masing-masing nilai parameter*

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5 \\ \beta &= 0.25 \\ \mu &= 0.7 \\ \kappa &= 0.05 \end{aligned}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "