PEMODELAN MATEMATIKA

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

4 Pemodelan Deterministik Dinamika Populasi

4.1 Pendahuluan

- Pada bagian ini akan dibahas tahapan-tahapan pada pemodelan dinamika populasi, sehingga mahasiswa dapat memahami teknik penyusunan model.
- Akan dibahas model Predator-Prey, Model Dinamika Populasi, serta Model Dinamika dengan Intervensi.

3.1 Model Predator Prey

- Model Predator-Prey adalah model klasik yang sering dibahas sebagai contoh dalam model dinamika populasi.
- Pada bagian ini akan dibahas model klasik Predator Prey yang melibatkan satu populasi Predator dan satu populasi Prey.

Identifikasi Masalah

- Interaksi yang tidak saling menguntungkan antara dua spesies, misalnya Predator dan Prey.
- Kehidupan Predator terancam tanpa Prey
- Kehidupan Prey terancan dengan kehadiran Predator

Problem:
Bagaimana dinamika populasi yang terjadi dengan kehadiran Predator dan Prey dalam suatu populasi?

3.1 Model Predator Prey

Membuat Asumsi

- Populasi bertumbuh secara eksponensial.
- Diasumsikan hanya terdapat masing-masing 1 jenis predator dan prey dalam populasi.
- Prey bertumbuh secara alami dan mati akibat diserang predator.
- Pertumbuhan predator sangat bergantung pada prey dan juga mati secara alami.

3.1 Model Predator Prey

Menyusun Model Matematika

- Misal $x(t)$ = Populasi Prey, $y(t)$ = Populasi Predator
- Berdasarkan asumsi, maka model dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \tag{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= \text{Laju pertumbuhan alami prey secara eksponensial} \\ b &= \text{Laju berkurangnya prey setelah berinteraksi dengan predator} \\ c &= \text{Laju kematian alami pada predator} \\ d &= \text{Laju pertumbuhan predator setelah berinteraksi dengan prey} \end{aligned}$$

3.1 Model Predator Prey

Analisis Model

Dari model (4) dapat dilihat bahwa:

- Populasi Prey akan bertumbuh secara eksponensial jika tidak ada Predator $(y = 0)$.
- Populasi Predator akan menurun secara eksponensial jika tidak ada Prey $(x = 0)$.

Penentuan Titik Tetap

Titik tetap diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} ax - bxy &= 0 \\ -cy + dxy &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

atau

$$\begin{aligned} x(a - by) &= 0 \\ y(-c + dx) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

3.1 Model Predator Prey

Dari persamaan (6) , diperoleh dua titik tetap yakni

$$\begin{aligned} T_1 &= (0,0) \\ T_2 &= \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Analisis Stabilitas Model

Berdasarkan model (4) diperoleh matriks jacobian:

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \tag{8}$$

3.1 Model Predator Prey

- Untuk titik tetap $T_1 = (0, 0)$

$$J_{T_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \det\left(J_{T_1} - \lambda I\right) &= 0 \\ \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & -c-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Menghasilkan nilai eigen

$$\lambda_1 = a \vee \lambda_2 = -c$$

Karena parameter a dan c positif, maka titik tetap T_1 $(0, 0)$ tidak stabil.

3.1 Model Predator Prey

- Untuk titik tetap $T_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

$$J_{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Menghasilkan nilai eigen

$$\lambda_{12} = \pm\sqrt{ac}i$$

Sehingga titik tetap $T_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ stabil center

3.1 Model Predator Prey

- **Bidang Fase**
  Gambar Bidang Fase dengan nilai parameter $a = 4, b = 2, c = 3$, dan $d = 3$.
- Dengan software Maple, dapat menampilkan Bidang Fase dengan menggunakan syntax berikut

$$
\begin{aligned}
> \quad & with(DEtools);\\
> \quad & ode1 := diff(x(t), t) = 4 * x(t) - 2 * x(t) * y(t);\\
> \quad & ode2 := diff(y(t), t) = -3 * y(t) + 3 * x(t) * y(t);\\
> \quad & DEplot([ode1, ode2], [x(t), y(t)], t = -3..3, x = -3..3,\\
> \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad y = -3..3, [[x(0) = 10, y(0) = 2]]);
\end{aligned}
$$

3.2 Model Lotka Volterra

- Pada model ini, populasi prey diasumsikan bertumbuh secara logistik karena adanya keterbatasan daya dukung lingkungan, K kemudian berkurang dengan adanya interaksi dengan predator sehingga persamaan menjadi

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy \tag{9}$$

3.2 Model Lotka Volterra

- Pada model ini, populasi prey diasumsikan bertumbuh secara logistik karena adanya keterbatasan daya dukung lingkungan, K kemudian berkurang dengan adanya interaksi dengan predator sehingga persamaan menjadi

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy \tag{9}$$

- Selanjutnya populasi predator bertambah setelah berinteraksi dengan prey dan berkurang secara dengan laju kematian alami, c sehingga persamaan menjadi

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \tag{10}$$

3.2 Model Lotka Volterra

- Dari persamaan (9) dan (10) diperoleh Model Lotka-Volterra dengan sistem persamaan diferensial

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax\left(1-\frac{x}{K}\right) - bxy \\
\frac{dy}{dt} &= -cy + dxy
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Problem

Tentukan titik tetap dan analisis kestabilan pada model Lotka-Volterra pada persamaan (11) .

3.3 Fungsi Respon

- Holling (1953) memperkenalkan fungsi respon yang kemudian dikenal dengan istilah Fungsi Respon Holling, yaitu tingkat predasi (daya makan) predator terhadap jumlah makanan/prey.
- Fungsi respon berkaitan erat dengan peningkatan populasi predator atau pengurangan populasi prey saat saling berinteraksi.
- Dalam ekologi, fungsi respon Holling didefinisikan sebagai jumlah makanan yang dimakan oleh predator sebagai fungsi kepadatan makanan (Hunsicker et.al.,2011).
- Berdasarkan karakteristiknya, fungsi respon holling kemudian dibedakan menjadi 3 macam, yaitu:
  1. Fungsi Respon Holling Tipe I
  2. Fungsi Respon Holling Tipe II
  3. Fungsi Respon Holling Tipe III

3.3 Fungsi Respon

Fungsi Respon Holling Tipe I

- Fungsi respon holling tipe I didefinisikan sebagai fungsi linear, dimana populasi predator meningkat seiring dengan meningkatnya jumlah populasi prey.
- Dalam kasus ini, diasumsikan jumlah predator akan kontan ketika berhenti memangsa.
- Peningkatan linier mengasumsikan bahwa waktu yang dibutuhkan oleh konsumen untuk memproses pokok makanan diabaikan, atau proses mengonsumsi makanan tidak mengganggu pencarian makanan.
- Fungsi respon Holling tipe I terjadi pada predator yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu prey-nya, seperti laba-laba.
- Fungsi respon tipe ini dinyatakan dengan

$$h_1(x) = \alpha x, \quad \alpha > 0 \tag{12}$$

3.3 Fungsi Respon

Fungsi Respon Holling Tipe II

- Fungsi respon tipe II dikenal juga dengan fungsi respon Monod atau fungsi respon Michaelis-Merten.
- Pada fungsi ini diasumsikan laju pemangsaan prey meningkat bersamaan dengan jumlah populasi prey, tetapi akan memenuhi pada level tertentu.
- Selanjutnya diasumsikan bahwa predator membutuhkan waktu untuk menangkap dan mencerna prey.
- Fungsi respon tipe II terjadi pada predator yang berkarakteristik aktif dalam mencari prey, seperti serigala.
- Fungsi respon tipe ini dinyatakan dengan

$$h_2(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{13}$$

dengan

$$\alpha = \text{tingkat konsumsi maksimum predator terhadap prey}$$

3.3 Fungsi Respon

Fungsi Respon Holling Tipe III

- Pada fungsi respon tipe III diasumsikan adanya penurunan tingkat pemangsaan pada saat kepadatan prey rendah.
- Selanjutnya diasumsikan laju pemangsaan prey meningkat bersamaan dengan jumlah populasi prey, tetapi akan berhenti pada level tertentu.
- Fungsi respon tipe III terjadi pada predator yang cenderung akan mencari populasi prey lain ketika populasi prey yang dimakan mulai berkurang, sehingga tingkat pertemuan antara predator dan prey adalah dua. Hal ini menyebabkan variabel populasi prey menjadi x^2.
- Fungsi respon tipe ini dinyatakan dengan

$$h_3(x) = \frac{\alpha x^2}{1+\beta x^2}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{14}$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{tingkat konsumsi maksimum predator terhadap prey} \\ \beta &= \text{waktu pencarian prey} \end{aligned}$$

3.4 Model Predator Prey Leslie-Gower

- Leslie (1948) memperkenalkan model sistem Lotka-Volterra yang dimodifikasi.
- Pada model Leslie, prey diasumsikan bertumbuh secara logistik dengan daya dukung lingkungan, K dan berkurang dengan fungsi respon Holling Tipe I,

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - rxy \tag{15}$$

- Pada model Leslie, predator diasumsikan bertumbuh secara logistik dengan daya dukung lingkungan yang proporsional terhadap ketersediaan jumlah populasi prey, sehingga

$$\frac{dy}{dt} = by\left(1 - \frac{sy}{x}\right) \tag{16}$$

3.4 Model Predator Prey Leslie-Gower

- Dari persamaan (15) dan (16) ,diperoleh Model Leslie-Gower

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax\left(1-\frac{x}{K}\right)-rxy \\
\frac{dy}{dt} &= by\left(1-\frac{sy}{x}\right)
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
a &= \text{Laju pertumbuhan intrinsik prey} \\
b &= \text{Laju pertumbuhan intrinsik predator} \\
r &= \text{Tingkat konsumsi maksimum pada prey} \\
s &= \text{Besarnya prey yang dibutuhkan untuk mendundukung eksistensi}
\end{aligned}
$$

3.5 Latihan 3

Problem

1. *Buatlah modifikasi pada model klasik Predator-Prey yang telah diberikan kemudian rumuskan model matematika hasil modifikasi yang anda berikan.*
2. *Buat analisis sederhana terhadap model tersebut*

"Terima Kasih, Semoga Bermanfaat"