KALKULUS LANJUT
"Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih"

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

3. Limit dan Kontinuitas

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

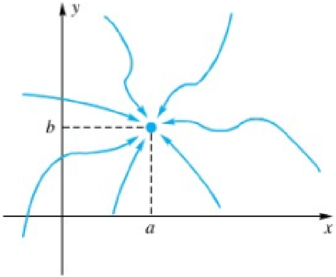
- Pada subbab ini ini kita akan memberikan arti pada pernyataan

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

- Secara intuisi kalimat ini dapat dimaknai:

"Nilai $f(x,y)$ dekat ke L, jika (x,y) dekat ke (a,b)"

- Bagaimana (x,y) dekat ke (a,b) ?



3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Definition (Definisi Limit Fungsi Dua Variabel)

Dikatakan

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga,

$$0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

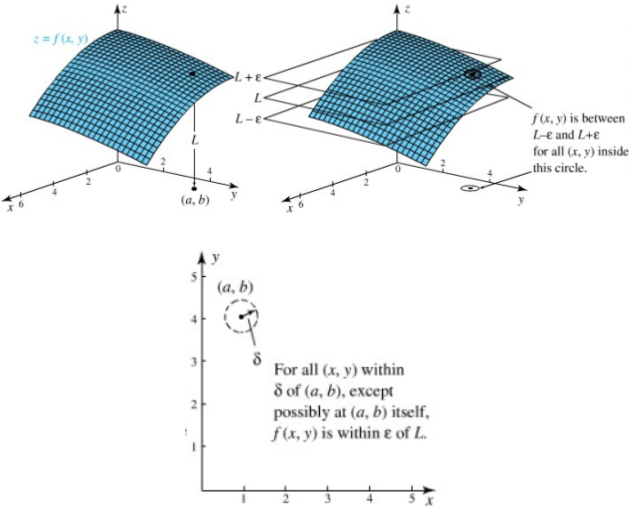
Untuk interpretasi $\|(x,y) - (a,b)\|$, pikirkan (x,y) dan (a,b) sehingga

$$\|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

dan titik-titik yang memenuhi $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$ adalah semua titik-titik dalam lingkaran berjari-jari δ kecuali titik pusat (a,b).

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Perhatikan Gambar berikut



3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Beberapa poin yang perlu diperhatikan dari definisi limit fungsi dua variabel:

1. Jalur pendekatan ke (a, b) tidak penting, artinya bahwa jika jalur pendekatan yang berlainan menuju nilai-nilai L yang berlainan, maka limit tidak ada.
2. Perilaku $f(x, y)$ di (a, b) tidak penting, bahkan fungsi $f(x, y)$ bahkan tidak harus terdefinisikan di (a, b), sebagai akibat dari pembatasan $0 < \|(x, y) - (a, b)\|$.
3. Definisi diekspresikan sedemikian sehingga dapat diperluas ke fungsi tiga variabel atau lebih, dengan mengganti (x, y) dan (a, b) dengan (x, y, z) dan (a, b, c).

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Perhatikan bahwa, **polinomial** dengan variabel x dan y dapat dinyatakan

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x^i y^i$$

dan **fungsi rasional** dalam variabel x dan y dinyatakan dengan

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

p dan q polinomial dalam x dan y, dengan asumsi $q \neq 0$.

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Theorem

1. *Jika $f(x,y)$ adalah polinomial, maka*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = (a,b)$$

2. *Jika*

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

dengan p dan q polinomial, maka

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{p(a,b)}{q(a,b)};\ q(a,b) \neq 0$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Theorem

3. *Lebih lanjut, jika*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = L \neq 0 \text{ dan } \lim_{(x,y)\to(a,b)} q(x,y) = 0$$

maka nilai

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

tidak ada.

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Example

Hitung limit-limit berikut jika ada

$$1)\quad \lim_{(x,y)\to(3,2)} \left(x^2y + 3y\right) \qquad 2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+1}{x^2-y^2}$$

Solution

1. *Menurut Teorema*

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \left(x^2y + 3y\right) = 3^2.2 + 3.2 = 24$$

2. *Fungsi kedua adalah fungsi rasional, sehingga tidak mempunyai limit karena nilai limit penyebut sama dengan nol.*

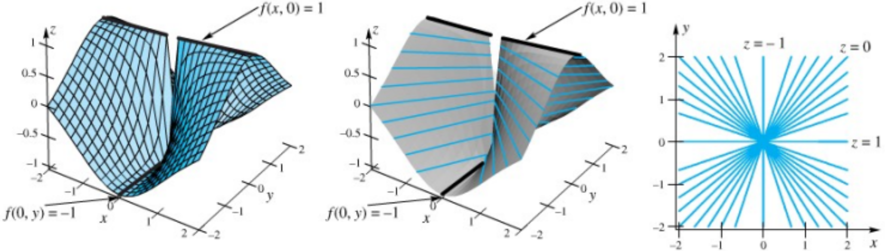
3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Example

Perlihatkan bahwa fungsi

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

tidak mempunyai limit di titik asal (perhatikan Gambar)



3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

Akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Tidak mempunyai limit.
Perhatikan bahwa fungsi f didefinisikan diseluruh bidang xy kecuali titik asal $(0,0)$.

- *Cek nilai limit disepanjang titik pada sumbu*$-x$, *diperoleh*

$$f(x,0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

Artinya

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

- *Dengan cara yang sama, nilai limit disepanjang titik pada sumbu*$-y$, *diperoleh:*

$$f(0,y) = \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$$

Artinya

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$$

Karena terdapat dua jawaban berbeda tergantung dari cara (x,y) *mendekati* $(0,0)$ *maka limit fungsi tidak ada.*

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Examples

Carilah nilai limit yang ditunjukkan atau nyatakan bahwa limit tidak ada

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy - y^3}{(x+y+1)^2}$$

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$$

$$(3)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

$$
\begin{aligned}
(1) \quad \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy-y^3}{(x+y+1)^2} &= \frac{(-1)(2)-2^3}{(-1+2+1)^2} = -\frac{5}{2} \\
(2) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4} &= \textit{Tidak terdefinisi karena fungsi} \\
&= \textit{tidak terdefinisi disepanjang} \\
&= \textit{garis } y = x \\
(3) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\cos\left(x^2+y^2\right)} \\
&= (1)(1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Examples

Carilah nilai limit yang ditunjukkan atau nyatakan bahwa limit tidak ada

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

(1) *Dengan mengamati nilai limit disepanjang garis* $y = mx$, *dapat ditunjukkan bahwa Limit Tidak ada*

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}\end{aligned}$$

Karena nilai bergantung pada m, *maka tidak ada nilai tertentu yang dituju pada saat* (x, y) *menuju* $(0, 0)$, *artinya nilai limit tidak ada.*

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

(2) *Dengan mengamati nilai limit disepanjang garis* $y = mx$, *diperoleh*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{x^2+m^4x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{1+m^4x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan nilai limit adalah 0*?*

3.1 Limit Fungsi Dua Variabel

Solution

(2) *Belum tentu.*
Dengan cara sama, amati nilai limit disepanjang garis $y = \sqrt{x}$, *diperoleh*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{x}}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

Dengan demikian

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Tidak mempunyai limit.

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

- Dalam kasus tertentu, limit fungsi dua variabel khususnya di titik asal dapat dianalisis dengan lebih mudah dengan mengubah fungsi ke koordinat polar.
- Dalam hal ini, poin penting yang perlu diingat bahwa

$$(x, y) \to (0, 0) \text{ jika dan hanya jika } r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$

- Dengan ekspresi ini, limit fungsi dua variabel diekspresikan sebagai limit satu variabel r saja.

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Example

Hitunglah limit fungsi berikut, jika ada

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{3x^2+3y^2} \qquad\qquad (2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ingat aturan L'Hopital:

Jika

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ atau } \pm\infty \text{ dan } \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ada,}$$

Maka

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Solution

1. *Dengan mengubah ke koordinat polar dan menggunakan aturan L'Hopital, diperoleh*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{3x^2+3y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}\lim_{r\to 0} \frac{2r\cos r^2}{2r} = \frac{1}{3}$$

2. *Perubahan ke koordinat polar memberikan*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \;\, r\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos\theta \;\, \sin\theta$$

karena limit tergantung dari θ, maka lintasan-lintasan garis lurus ke titik asal akan menuju ke limit yang berlainan. Artinya limit tidak ada untuk fungsi ini.

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Examples

Carilah nilai limit yang ditunjukkan dengan koordinat polar

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2+y^2}$$

3.2 Limit Fungsi Dengan Koordinat Polar

Solution

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta . r\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos\theta . \sin\theta = 0 \\
(2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{\left(r\cos\theta\right)^{7/3}}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^{7/3}\left(\cos\theta\right)^{7/3}}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \; r^{1/3}\left(\cos\theta\right)^{7/3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3.3 Kontinuitas pada Suatu Titik

Definition (Kontinuitas pada Satu Titik)

Suatu fungsi $f(x, y)$ dikatakan kontinu di titik (a, b) jika memenuhi syarat

1. f mempunyai nilai di (a, b)
2. f mempunyai limit di (a, b)
3. Nilai f di (a, b) sama dengan nilai limitnya

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

3.3 Kontinuitas pada Suatu Titik

Theorem (Komposisi Fungsi)

Jika sebuah fungsi dua variabel g *kontinu di* (a, b) *dan sebuah fungsi satu variabel* f *kontinu di* (a, b), *maka fungsi komposisi* $f \circ g$ *yang didefinisikan oleh* $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$ *kontinu di* (a, b).

Example

Jelaskan titik-titik (x, y) dimana pada titik-titik tersebut, fungsi berikut adalah kontinu

$$\begin{aligned} (1)\ \ H(x, y) &= \frac{2x + 3y}{y - 4x^2} \\ (2)\ \ F(x, y) &= \cos\left(x^3 - 4xy + y^2\right) \end{aligned}$$

3.3 Kontinuitas pada Suatu Titik

Solution

1. *$H(x, y)$ adalah fungsi rasional, sehingga kontinu di setiap titik tempat, kecuali titik yang menyebatkan penyebut 0. Penyebut $y - 4x^2$ sama dengan 0 di sepanjang parabola $y = 4x^2$. Dengan demikian, $H(x, y)$ kontinu untuk semua (x, y) kecuali untuk titik-titik di sepanjang parabola $y = 4x^2$.*
2. *Fungsi $g(x, y) = x^3 - 4xy + y^2$ kontinu untuk semua (x, y) karena merupakan fungsi polinomial. Fungsi $f(t) = \cos t$ juga kontinu disetiap bilangan t karena merupakan fungsi trigonometri. Dengan demikian, fungsi $F(x, y)$ kontinu untuk semua (x, y)*

3.4 Latihan 3

Problem

1. *Carilah limit yang ditunjukka atau nyatakan bahwa limit tidak ada:*

a. $$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \left(xy^3 - xy + 3y^2\right)$$

b. $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{y - 2x^2}$$

c. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + \cos x}{xy - \cos x}$$

d. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$$

e. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

3.4 Latihan 3

Problem

2. *Perlihatkan bahwa*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$$

tidak ada

3. *Uraikan himpunan terbesar S yang memenuhi untuk mengatakan bahwa f kontinu*

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x,y) &= \frac{x^2+3xy+y^2}{y-x^2} \\ \text{b. } f(x,y) &= \ln\left(1+x^2+y^2\right) \\ \text{c. } f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+x+y}} \end{aligned}$$

3.4 Latihan 3

Problem

4. *Misalkan*

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Jika $(x,y) \neq (0,0)$ *dan* $f(0,0) = 0$, *perlihatkan bahwa* $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ *dengan melengkapi langkah-langkah berikut:*

a. *perlihatkan bahwa* $f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}\right) = -y$, *untuk semua* y.
b. *perlihatkan bahwa* $f_y(x,0) = x$, *untuk semua* x.
c. *perlihatkan bahwa* $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}\right) = 1$.
d. *perlihatkan bahwa* $f_{xy}(0,0) = -1$.

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "