# [DAC61333] KALKULUS LANJUT
# "Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih"

*Semester Ganjil 2019-2020*

Resmawan

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

# 4. Turunan Fungsi Dua Peubah (Keterdiferensialan)

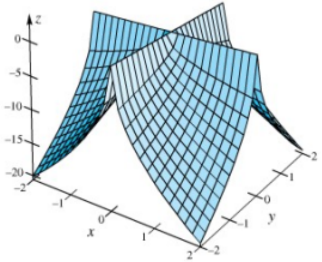
# 4.1 Pendahuluan

Pada subbab ini kita ingin memeriksa apakah suatu fungsi dua peubah mempunyai turunan di titik tertentu dan menentukan turunannya

# 4.1 Pendahuluan

**Turuna Parsial Saja Tidak Cukup**

Kita sudah mendefinisikan turunan parsial dari suatu fungsi dua peubah; tapi eksistensi turunan parsial di suatu titik tidak memberi kita informasi tentang nilai fungsi di sekitar titik tersebut.



# 4.2 Turunan Fungsi Satu Peubah

- Turunan dari fungsi satu peubah $y = f(x)$ di $x = c$ didefinisikan sebagai
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$
- Sayangnya bentuk ini **tidak dapat** diperumum ke fungsi dua peubah
$$f'(\mathbf{c}) = \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{c}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{c})}{\mathbf{h}}$$

karena pembagian dengan vektor tidak terdefinisi

# 4.2 Turunan Fungsi Satu Peubah

- Jika $y = f(x)$ mempunyai turunan di $x = c$ yaitu

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m$$

- maka $f$ **linear secara lokal** di $x \approx c$, yaitu

$$f(c+h) = f(c) + hm + h\epsilon(h)$$

dengan

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - m \right] = 0.$$

# 4.2 Turunan Fungsi Satu Peubah

- Sebaliknya jika $f$ **linear secara lokal** di $x \approx c$, katakanlah

$$f\left(c+h\right) = f\left(c\right) + hm + h\epsilon\left(h\right)$$

dengan

$$\lim_{h\to 0} \epsilon\left(h\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(c+h\right)-f\left(c\right)}{h} - m\right] = 0$$

- Maka $f$ mempunyai turunan di $x = c$ yaitu

$$f'\left(c\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(c+h\right)-f\left(c\right)}{h} = m.$$

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

- Fungsi dua peubah $f$ dikatakan mempunyai turunan di $\mathbf{p} = (a, b)$ jika dan hanya jika $f$ **linear secara lokal** di sekitar $\mathbf{p}$, yaitu

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + (f_x(\mathbf{p}), f_y(\mathbf{p})) \bullet \mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}) \bullet \mathbf{h}$$

dengan

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}) = (\varepsilon_1(\mathbf{h}), \varepsilon_2(\mathbf{h})), \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2)$$

dan

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \left( \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \varepsilon_1(\mathbf{h}), \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \varepsilon_2(\mathbf{h}) \right) = (0, 0)$$

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

- Vektor

$$\triangledown f(\mathbf{p}) := \left(f_x(\mathbf{p}), f_y(\mathbf{p})\right)$$

  disebut **turunan** atau **gradien** $f$ di $\mathbf{p}$.

- Jadi $f$ mempunyai turunan di $\mathbf{p}$ jika dan hanya jika

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \triangledown f(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{h} + \varepsilon(\mathbf{h}) \bullet \mathbf{h}$$

  dengan

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \varepsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$$

- Catatan, $\triangledown$ disebut **Operator Del**

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

Beberapa catatan:

1. Jika turunan fungsi satu peubah merupakan bilangan $f'(p)$, maka turunan fungsi dua peubah merupakan vektor

$$\triangledown f(\mathbf{p}) := (f_x(\mathbf{p}), f_y(\mathbf{p}))$$

2. Hasil kali

$$\triangledown f(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{h} \text{ dan } \varepsilon(\mathbf{h}) \bullet \mathbf{h}$$

merupakan hasilkali titik.

3. Definisi turunan fungsi tiga (atau lebih) peubah dapat dirumuskan secara serupa.

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

## Example

Turunan dari fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2$ di $(1, 2)$ adalah

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(1,2) &= (2x, 2y)\,|_{(1,2)} \\ &= (2,4) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk $(h, k) \approx (0, 0)$, fungsi $f$ linear secara lokal:

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+h) &= (1+h)^2 + (2+h)^2 \\ &= 1 + 2h + h^2 + 4 + 4h + h^2 \\ &= 5 + (2,4) \bullet (h,k) + (h,k) \bullet (h,k) \end{aligned}$$

Disini

$$\varepsilon(h, k) = (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

**Theorem**

*Jika $f$ mempunyai turunan parsial $f_x$ dan $f_y$ yang kontinu pada suatu cakram yang memuat $(a, b)$, maka $f$ mempunyai turunan di $(a, b)$.*

**Example**

$f(x, y) = x^2 + y^2$ mempunyai turunan parsial $f_x = 2x$ dan $f_y = 2y$ yang kontinu pada $\mathbf{R}$, sehingga $f$ mempunyai turunan di setiap titik.

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

## Examples

Perlihatkan bahwa $f(x, y) = xe^y + x^2 y$ dapat diturunkan dimana-mana. Hitung gradiennya lalu carilah persamaan bidang singgung di $(2, 0)$

## Solution

*Perhatikan bahwa*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2$$

*Kedua fungsi ini kontinu dimana-mana sehingga dapat diturunkan dimana-mana.*
*Gradien garis adalah*

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(e^y + 2xy\right)\mathbf{i} + \left(xe^y + x^2\right)\mathbf{j} = \left\langle e^y + 2xy, xe^y + x^2\right\rangle \\ \nabla f(2, 0) &= \mathbf{i} + 6\mathbf{j} = \langle 1, 6\rangle \end{aligned}$$

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

### Solution

*Adapun persamaan bidang singgungnya antara lain:*

$$\begin{aligned} z &= f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot \langle x-2, y \rangle \\ &= 2 + \langle 1, 6 \rangle \cdot \langle x-2, y \rangle \\ &= 2 + x - 2 + 6y \\ &= x + 6y \end{aligned}$$

# 4.3 Turunan Fungsi Dua Peubah

### Examples

carilah $\nabla f\left(1,2,0\right)$ jika $f\left(x,y,z\right)=x\sin z+x^2y$

### Solution

*Perhatikan bahwa turunan-turunan parsial*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin z+2xy;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x\cos z$$

*masing-masing bernilai* $4,1$ *dan* $1$ *pada titik* $\left(1,2,0\right)$ *sehingga*

$$\nabla f\left(1,2,0\right)=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

# 4.4 Sifat Turunan

Operator del $\nabla$ memenuhi sifat-sifat:

1. $\nabla\left[f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})\right]=\nabla f(\mathbf{p})+\nabla g(\mathbf{p})$
2. $\nabla\left[\alpha\ f(\mathbf{p})\right]=\alpha\nabla f(\mathbf{p})$
3. $\nabla\left[f(\mathbf{p})\ \ g(\mathbf{p})\right]=f(\mathbf{p})\ \ \nabla g(\mathbf{p})+\nabla f(\mathbf{p})\ \ g(\mathbf{p})$

Proof.

Akan dibuktikan poin (1) dan disisakan yang lainnya sebagai latihan.

$$\begin{aligned}
\nabla\left[f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})\right]\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left[f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})\right]\mathbf{j}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}f(\mathbf{p})\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial x}g(\mathbf{p})\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}f(\mathbf{p})\,\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial y}g(\mathbf{p})\,\mathbf{j}\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}f(\mathbf{p})\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}f(\mathbf{p})\,\mathbf{j}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}g(\mathbf{p})\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}g(\mathbf{p})\,\mathbf{j}\right]\\
&= \nabla f(\mathbf{p})+\nabla g(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

# 4.4 Sifat Turunan

**Theorem**

*Jika $f$ mempunyai turunan di* $\mathbf{p}$, *maka $f$ kontinu di* $\mathbf{p}$

Kontraposisi dari teorema ini berbunyi:

jika $f$ tidak kontinu di $\mathbf{p}$, maka $f$ tidak mempunyai turunan di $\mathbf{p}$.

**Examples**

Selidiki apakah fungsi di bawah ini mempunyai turunan di titik $(0, 0)$:

1. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f(0, 0) = 0$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

# 4.4 Sifat Turunan

**Examples**

Buktikan bahwa

$$\nabla \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

# 4.4 Sifat Turunan

## Solution

*Diketahui*

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)\right);\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f_x g - f g_x}{g^2} \quad \textit{dan} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f_y g - f g_y}{g^2}\end{aligned}$$

*Sehingga*

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \left(\frac{f_x g - f g_x}{g^2}, \frac{f_y g - f g_y}{g^2}\right)\\ &= \left(\frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}\right)\end{aligned}$$

# 4.5 Latihan 4

## Problem

1. *Hitung gradien* $\nabla f$ *dari fungsi dua dan tiga peubah berikut:*
   a. $f(x, y) = xe^{xy}$
   b. $f(x, y) = x^2 y \cos y$
   c. $f(x, y, z) = xz \ln(x + y + z)$
2. *Tentukan vektor gradien....*
   a. $f(x, y) = x^3 y + 3xy^2, \ \mathbf{p} = (2, -2)$
   b. $f(x, y) = \cos \pi x \sin \pi y + \sin 2\pi y, \ \mathbf{p} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$
3. *Buktikan bahwa*

$$\nabla (f^r) = rf^{r-1} \nabla f$$

**" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "**