[DAC61333] KALKULUS LANJUT
"Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih"

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

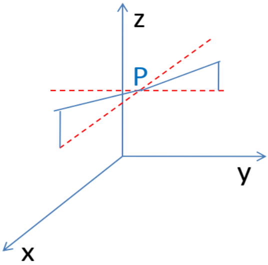
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

5. Turunan Berarah dan Gradien

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

- Perhatikan bahwa turunan parsial fungsi dua variabel $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ mengukur laju perubahan dan kemiringan garis singgung pada arah-arah yang sejajar sumbu x dan sumbu y.



- Sasaran kita selanjutnya adalah mempelajari laju perubahan f pada sembarang arah, yang mengarahkan kita pada konsep **Turunan Berarah**, yang kemudian dihubungkan dengan gradien.

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

- Sebagai penunjang, penting bagi kita mengetahui cara penulisan vektor. Misalkan $\mathbf{p} = (x, y)$, kemudian misalkan $\mathbf{i} = (1, 0)$ dan $\mathbf{j} = (0, 1)$ adalah vektor-vektor satuan pada arah-arah x dan y positif.
- Maka dua turunan parsial dari $\mathbf{p}$ dapat ditulis

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{p}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{i}) - f(\mathbf{p})}{h} \\ f_y(\mathbf{p}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{j}) - f(\mathbf{p})}{h} \end{aligned}$$

- Yang kita lakukan selanjutnya hanya perlu mengganti $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{j}$ dengan suatu vektor satuan sebarang $\mathbf{u}$.

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Definition

Untuk tiap vektor satuan $\mathbf{u}$, **Turunan Berarah** f di $\mathbf{p}$ pada arah $\mathbf{u}$ didefinisikan

$$D_{\mathbf{u}}f\left(\mathbf{p}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\mathbf{p}+h\mathbf{u}\right) - f\left(\mathbf{p}\right)}{h}$$

dengan catatan limitnya ada.

Theorem

Misalkan f terdiferensialkan di $\mathbf{p}$, maka f mempunyai turunan berarah di $\mathbf{p}$ dalam arah **vektor satuan** $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ *dan*

$$D_{\mathbf{u}}f\left(\mathbf{p}\right) = \mathbf{u}\cdot\nabla f\left(\mathbf{p}\right)$$

yaitu

$$D_{\mathbf{u}}f\left(x,y\right) = u_1 f_x\left(x,y\right) + u_2 f_y\left(x,y\right)$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Proof.

Karena f mempunyai turunan di $\mathbf{p}$, maka

$$f(\mathbf{p}+h\mathbf{u})-f(\mathbf{p})=\nabla f(\mathbf{p})\bullet(h\mathbf{u})+\varepsilon(h\mathbf{u})\bullet(h\mathbf{u})$$

dengan

$$\lim \varepsilon(h\mathbf{u})=\mathbf{0}$$

Bagi kedua ruas dengan h, diperoleh

$$\frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{u})-f(\mathbf{p})}{h}=\nabla f(\mathbf{p})\bullet\mathbf{u}+\varepsilon(h\mathbf{u})\bullet\mathbf{u}$$

Dengan menghitung limit untuk $h\to 0$, duhasilkan

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p})=\nabla f(\mathbf{p})\bullet\mathbf{u}$$

□

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Example

Turunan parsial dari $f(x, y) = x^2 + y^2$ di $(1, 2)$ adalah

$$D_{\mathbf{i}} f(1,2) = 2x|_{(1,2)} = 2 \quad dan \quad D_{\mathbf{j}} f(1,2) = 2y|_{(1,2)} = 4$$

Adapun turunan f di $(1, 2)$ dalam arah vektor $\mathbf{u} = (0.6, 0.8)$ adalah

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1,2) &= (2,4) \bullet (0.6, 0.8) \\ &= 1.2 + 3.2 \\ &= 4.4 \end{aligned}$$

ternyata lebih besar dari $D_{\mathbf{j}} f(1,2)$.

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Example

1. Tentukan vektor berarah f di $(2, -1)$ pada arah vektor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ jika $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$
2. Tentukan vektor berarah dari $f(x, y) = ye^{2x}$ di titik $(0, 2)$ pada arah vektor $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

1. *Diketahui* $p = (2, -1)$ *dan* $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$.
   Akan ditentukan
   $$D_{\mathbf{u}} f(p) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$
   Dari fungsi f *diperoleh*
   $$\begin{aligned} \nabla f &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \langle 8x - y, 6y - x \rangle \\ \nabla f(2, -1) &= \langle 16 + 1, -6 - 2 \rangle \\ &= \langle 17, -8 \rangle \end{aligned}$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

1. *Dengan demikian, diperoleh vektor berarah*

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(2,-1) &= \frac{\langle 4,3\rangle}{\sqrt{25}} \cdot \langle 17,-8\rangle \\ &= \frac{1}{5}\langle 4,3\rangle \cdot \langle 17,-8\rangle \\ &= \frac{1}{5}(4 \cdot 17 + 3 \cdot -8) \\ &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

2. *Diketahui* $p = (0,2)$ *dan* $u = \langle 1,2 \rangle$.
   Akan ditentukan
$$D_{\mathbf{u}} f(p) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$

   Dari fungsi f *diperoleh*

$$\begin{aligned} \nabla f &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \left\langle 2ye^{2x}, e^{2x} \right\rangle \\ \nabla f(0,2) &= \left\langle 2 \cdot 2e^0, e^0 \right\rangle \\ &= \langle 4, 1 \rangle \end{aligned}$$

5.1 Turunan Berarah dan Gradien

Solution

2. *Dengan demikian, diperoleh vektor berarah*

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(2,-1) &= \frac{\langle 1,2\rangle}{\sqrt{5}} \cdot \langle 4,1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(1\cdot 4 + 2\cdot 1) \\
&= \frac{6}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{6}{5}\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

5.2 Laju Perubahan Maksimum

- Misal θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\nabla f(\mathbf{p})$, maka

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) &= \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{p}) \\ &= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\nabla f(\mathbf{p})\| \cos\theta \end{aligned}$$

- Dengan demikian, $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$ akan bernilai maksimum apabila $\cos\theta = 1\,(\theta = 0)$ dan bernilai minimum apabila $\cos\theta = -1\,(\theta = \pi)$.

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \Rightarrow D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \|\nabla f(\mathbf{p})\| \\ \theta &= \pi \Rightarrow D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = -\|\nabla f(\mathbf{p})\| \end{aligned}$$

Theorem

Suatu fungsi bertambah paling cepat di $\mathbf{p}$ *pada arah gradien, dengan laju* $\|\nabla f(\mathbf{p})\|$, *dan berkurang paling cepat ke arah berlawanan, dengan laju* $-\|\nabla f(\mathbf{p})\|$.

5.2 Laju Perubahan Maksimum

Example

Tentukan dalam arah vektor satuan manakah turunan berarah dari $f(x, y) = x^2 + y^2$ di $(1, 2)$ mencapai

a. Nilai Maksimum

b. Nilai Minimum

c. Tentukan laju perubahan maksimum dan minimumnya.

5.2 Laju Perubahan Maksimum

Solution

Diketahui

$$\nabla f(1,2) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2,4)$$

a. *Dengan semikian* $\nabla f(1,2)$ *akan maksimum pada arah vektor satuan*

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2,4) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

b. *Minimun pada arah vektor satuan*

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

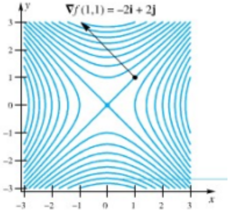
c. *Laju perubahan maksimum*

$$D_u f(1,2) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{p}) = \|\nabla f(\mathbf{p})\| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$$

5.2 Laju Perubahan Maksimum

Example

Andaikan seekor semut berada pada paraboloida hiperbolik $z = y^2 - x^2$ di titik $(1, 1, 0)$, pada arah mana ia harusnya bergerak untuk panjatan yang paling curam? Berapa kemiringan pada saat ia memulai?



5.2 Laju Perubahan Maksimum

Solution

Misalkan $f(x, y) = y^2 - x^2$, *maka*

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \langle f_x, f_y \rangle \\ &= \langle -2x, 2y \rangle \\ \nabla f(1, 1) &= \langle -2, 2 \rangle \end{aligned}$$

Dengan demikian, semut harus bergerak dari $(1, 1, 0)$ *ke arah vektor* $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, *dengan kemiringan sebesar*

$$\begin{aligned} \|-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

5.2 Laju Perubahan Maksimum

Problem

Diberikan fungsi $f(x, y) = x^2 - y^2$ *dan* $\mathbf{p} = (1, 2)$. *Tentukan:*

1. *Vektor gradien* $\nabla f(\mathbf{p})$
2. *Vektor satuan* $\mathbf{u}$ *sehingga* $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$
   a. *Maksimum*
   b. *Minimum*

5.2 Laju Perubahan Maksimum

Solution

Diketahui $f_x = 2x$ *dan* $f_y = -2y$, *maka*

1. $\nabla f(\mathbf{p}) = (2x, -2y)\,|_{(1,2)} = (2, -4)$
2. $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$

   a. *maksimum pada vektor satuan*

   $$\mathbf{u} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$$

   b. *Minimum pada vektor satuan*

   $$\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$$

5.3 Latihan 5

Problem

1. *Tentukan kemiringan pendakian pada permukaan fungsi*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

di titik $(1,1,1)$ *dalam arah vektor* $(3,4)$

2. *Tentukan turunan berarah dari* f *di titik* $\mathbf{p}$ *dalam arah* $\mathbf{a}$:

   a. $f(x,y) = y^2 \ln x,\ \mathbf{p} = (1,4),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

   b. $f(x,y) = e^x \sin y,\ \mathbf{p} = \left(0, \frac{\pi}{4}\right),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$

3. *Tentukan vektor satuan dalam arah dimana* f *bertambah paling cepat di* $\mathbf{p}$. *Tentukan besar laju perubahannya.*

   a. $f(x,y) = xe^{yz},\ \mathbf{p} = (2,0,-4)$

   b. $f(x,y) = e^y \sin x,\ \mathbf{p} = \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "