[DAC61333] KALKULUS LANJUT
"Turunan Fungsi Dua Variabel atau Lebih"

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Agustus 2019

7. Maksimum dan Minimum

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Definition (Nilai Ekstrim Global)

Misalkan $S \subseteq R^2, f : S \to R$, dan $p_0 \in S$

(i) $f(p_0)$ disebut **nilai maksimum global** f pada S apabila $f(p_0) \geq f(p)$ untuk setiap $p \in S$.

(ii) $f(p_0)$ disebut **nilai minimum global** f pada S apabila $f(p_0) \leq f(p)$ untuk setiap $p \in S$.

Nilai $f(p_0)$ disebut **Nilai Ekstrim Global** f pada S apabila $f(p_0)$ merupakan nilai maksimum global atau nilai minimum global.

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Definition (Nilai Ekstrim Lokal)

Misalkan $S \subseteq R^2, f : S \to R$, dan $p_0 \in S$

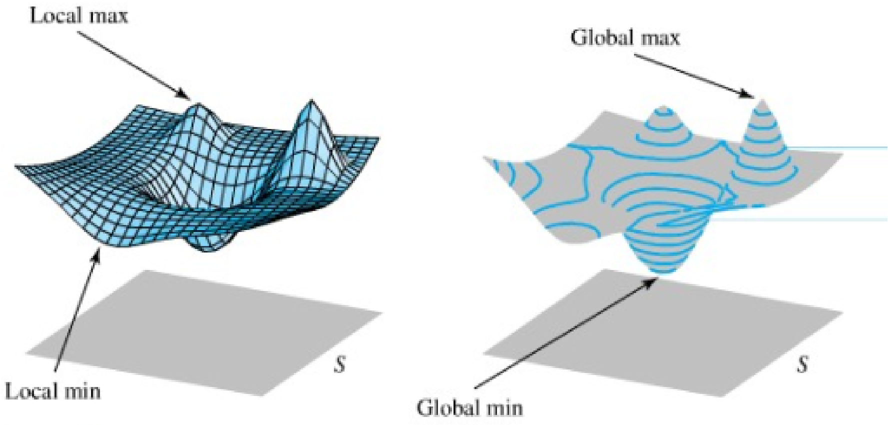
(i) $f(p_0)$ disebut **nilai maksimum lokal** f pada S apabila *terdapat cakram* N *yang memuat* p_0 sehingga $f(p_0) \geq f(p)$ untuk setiap $p \in N \cap S$.

(ii) $f(p_0)$ disebut **nilai minimum lokal** f pada S apabila *terdapat cakram* N *yang memuat* p_0 sehingga $f(p_0) \leq f(p)$ untuk setiap $p \in N \cap S$.

Nilai $f(p_0)$ disebut **Nilai Ekstrim Lokal** f pada S apabila $f(p_0)$ merupakan nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Perhatikan Gambar



7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Theorem (Eksistensi Maks-Min)

Jika f kontinu pada suatu himpunan tertutup dan terbatas S, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum global pada S (kemungkinan di titik yang berbeda).

Catatan:

S tertutup berarti S memuat titik-titik perbatasannya. S terbatas berarti S termuat dalam suatu cakram $C(\mathbf{O}, R)$ yang berpusat di $\mathbf{O}(0, 0)$ dan berjari-jari R, untuk suatu $R > 0$.

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Theorem (Titik Kritis)

Fungsi f hanya mungkin mencapai nilai ekstrim pada **titik-titik kritis**, *yaitu:*

(i) **Titik-titik perbatasan** *daerah asal f, atau*

(ii) **Titik-titik stasioner** *(yaitu titik di mana f mempunyai turunan 0), atau*

(iii) **Titik-titik singular** *(yaitu titik di mana f tidak mempunyai turunan).*

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Examples

Carilah nilai ekstrim dari

$$f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Solution

Perhatikan bahwa,

$$f_x(x,y) = 2x - 2 \qquad \textit{dan} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{2}y$$

Karena $f(x,y)$ *dapat diturunkan disepanjang bidang* xy, *nilai ekstrim fungsi hanya mungkin terjadi di titik-titik stasioner, yaitu titik-titik dimana* f *mempunyai turunan nol, sehingga*

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 0 & f_y(x,y) = 0 \\ 2x - 2 = 0 & \frac{1}{2}y = 0 \\ x = 1 & y = 0 \end{array}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Solution

Selanjutnya menetapkan titik $(x, y) = (1, 0)$ *merupakan titik masimum/minimum/bukan keduanya. Perhatikan bahwa*

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (1)^2 - 2(1) + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

merupakan nilai minimum global dari f *karena*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \\ &= x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 \\ &= (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \\ &\geq -1 \end{aligned}$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Examples

Beberapa contoh lain

$$
\begin{aligned}
(1)\quad f(x,y) &= x^2+y^2 \\
(2)\quad g(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Solution

1. *fungsi* $f(x,y)$ *mencapai nilai ekstrim minimum global* 0 *pada titik stasioner* $(0,0)$, *karena*

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad dan \quad f_y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ f(0,0) &= 0^2 + 0^2 = 0 \end{aligned}$$

2. *Fungsi* $g(x,y)$ *mencapai nilai ekstrim minimum global* 0 *pada titik singular* $(0,0)$ *karena* g *tidak mempunyai turunan di* xy

3. *Jika kita batasi daerah asal kedua fungsi di atas pada cakram tertutup* $C(\mathbf{O},1)$, *maka kedua fungsi di atas mencapai nilai maksimum* 1 *pada setiap titik perbatasan.*

7.1 Definisi Nilai Ekstrim

Catatan:

Titik stasioner **belum tentu** merupakan titik ekstrim. Sebagai contoh, fungsi $f(x, y) = xy$ mempunyai titik stasioner $(0, 0)$, tetapi titik ini bukan merupakan titik ekstrim (global maupun lokal). Ingat peta konturnya seperti apa! Jika daerah asal fungsi f dibatasi pada cakram tertutup $C(\mathbf{O}, 1)$, maka nilai ekstrimnya hanya mungkin tercapai di titik-titik perbatasan, yaitu pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Theorem (Uji Parsial Kedua)

Misalkan $f(x,y)$ *mempuyai turunan parsial kedua yang kontinu pada suatu cakram yang berpusat di* (a,b) *dan* $\bigtriangledown f(a,b) = (0,0)$. *Tulis*

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

maka

1. *Jika* $D > 0$ *dan* $f_{xx}(a,b) < 0$ *maka* $f(a,b)$ *merupakan nilai maksimum lokal.*
2. *Jika* $D > 0$ *dan* $f_{xx}(a,b) > 0$ *maka* $f(a,b)$ *merupakan nilai minimum lokal.*
3. *Jika* $D < 0$, *maka* (a,b) *merupakan titik pelana dan* $f(a,b)$ *bukan titik ekstrim.*
4. *Jika* $D = 0$, *maka pengujian tidak memberi kesimpulan.*

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Example

Tentukan nilai ekstrim (jika ada) dari fungsi

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 4y$$

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

Karena

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3; \qquad f_y(x, y) = 2y + 4$$

dan $\bigtriangledown f(a, b) = (0, 0)$, *maka*

$$\begin{array}{ll} f_x(x, y) = 0 & f_y(x, y) = 0 \\ 3x^2 - 3 = 0 & 2y + 4 = 0 \\ x^2 = 1 & 2y = -4 \\ x = \pm 1 & y = -2 \end{array}$$

sehingga diperoleh titik-titik kritis, yaitu $(1, -2)$ *dan* $(-1, -2)$.
Selanjutnya diperoleh

$$f_{xx}(x, y) = 6x; \quad f_{yy}(x, y) = 2; \quad dan \quad f_{xy} = 0$$

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

Untuk titik kritis $(1, -2)$,

$$\begin{aligned} D(1,-2) &= f_{xx}(1,-2) \cdot f_{yy}(1,-2) - [f_{xy}(1,-2)]^2 \\ &= (6)(2) - 0^2 \\ &= 12 > 0. \end{aligned}$$

Karena $D(1,-2) = 12 > 0$ *dan* $f_{xx}(1,-2) = 6 > 0$, *maka*

$$\begin{aligned} f(1,-2) &= 1^3 + (-2)^2 - 3(1) + 4(-2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

merupakan nilai minimum lokal dari fungsi f.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

Untuk titik kritis $(-1,-2)$,

$$\begin{aligned} D(-1,-2) &= f_{xx}(-1,-2)\cdot f_{yy}(-1,-2)-[f_{xy}(-1,-2)]^2 \\ &= (-6)(2)-0^2 \\ &= -12<0. \end{aligned}$$

Karena $D(-1,-2)=-12<0$ *maka* $(-1,-2)$ *merupakan titik pelana dan* $f(-1,-2)$ *bukan nilai ekstrim.*

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Problem

Untuk fungsi berikut, carilah semua titik kritis. Tunjukkan apakah masing-masing titik itu memberikan nilai maksimum lokal, minimum lokal, atau berupa titik pekana.

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 1$
2. $f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

1. *Dari $f(x,y)$ diperoleh*

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(x,y) &= (f_x, f_y) = (2x-2, 8y+8) \\ \bigtriangledown f(x,y) &= (0,0) \Leftrightarrow x = 1 \quad dan \quad y = -1 \end{aligned}$$

Jadi, terdapat satu titik kritis yaitu $(x,y) = (1,-1)$.
Selanjutnya diperoleh

$$D = (f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = (2)(8) - o^2 = 16 > 0$$

Karena $D > 0$ dan $f_{xx} > 0$, maka

$$f(1,-1) = (1)^2 + 4(-1)^2 - 2(1) + 8(-1) - 1 = -6$$

merupakan nilai minimum lokal dari fungsi $f(x,y)$.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

2. *Dari* $f(x, y)$ *diperoleh*

$$\bigtriangledown f(x, y) = (f_x, f_y) = \left(y^2 - 12x, 2xy - 6y\right)$$

Titik kritis diperoleh jika $\bigtriangledown f(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \left(y^2 - 12x,\ 2xy - 6y\right) &= (0, 0) \\ \left(y^2 - 12x,\ (2x - 6)\, y\right) &= (0, 0) \end{aligned}$$

Dari f_x, *jika* $x = 0$ *maka* $y = 0$,
Dari f_y, *jika* $2x - 6 = 0$, *maka* $x = 3$ *menghasilkan*
$y = \pm\sqrt{12(3)} = \pm 6$.
Dengan demikian, terdapat tiga titik kritis yaitu $(0, 0)$, $(3, 6)$, *dan* $3, -6$.

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Solution

2. *Selanjutnya diperoleh* $f_{xx} = -12 < 0$ *dan*

$$\begin{aligned} D &= (f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = (-12)(2x-6) - (2y)^2 \\ &= -4y^2 - 24x + 72 = -4\left(y^2 + 6x - 18\right) \end{aligned}$$

Untuk $(x, y) = (0, 0)$, *diperoleh*

$$D = -4\left(0^2 + 6.0 - 18\right) = 72 > 0$$

sehingga $f(0, 0)$ *merupakan nilai maksimum lokal* $f(x, y)$.
Untuk $(x, y) = (3, \pm 6)$, *diperoleh*

$$D = -4\left(6^2 + 6.3 - 18\right) = -144 < 0$$

sehingga $(x, y) = (3, \pm 6)$ *merupakan titik sadle dan* $f(3, \pm 6)$ *bukan nilai ekstrim*

7.2 Syarat Cukup Nilai Ekstrim

Example

Misalkan kita ingin membuat kotak tertutup berbentuk balok dengan volumen 1 m^3. Berapakah ukuran kotak tersebut jika kita ingin kotak dengan luas permukaan minimum?

7.3 Latihan 7

Problem

Carilah semua titik kritis dan tunjukkan apakah setiap titik tersebut memberikan nilai esktrim lokal atau berupa titik sadle:

1. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x$
2. $f(x,y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$
3. $f(x,y) = xy$
4. $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
5. $f(x,y) = x^2 + a^2 - 2ax\cos y;\ -\pi \le y \le \pi$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "