ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

0.3 Referensi

1. H. Anton and C. Rorres, "Elementary Linear Algebra," Ninth Edition. New York : John Wiley & Sons, Inc. All , 2005.
2. G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications," Fourth Edition.
3. R. Larson and D. C. Valvo, "Elementary Linear Algebra," Sixth Edition. New York : Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.

1. Ruang Vektor Umum

1.1 Pendahuluan

- Kuliah pada bab sebelumnya kita telah menggeneralisasi vektor-vektor dari ruag berdimensi 2 dan 3 ke ruang berdimensi n.
- Pada bab ini, kita akan menggeneralisasi konsep vektor tersebut lebih lanjut dengan menyusun satu himpunan aksioma yang harus dipenuhi suatu objek agar dapat disebut sebagai vektor.
- Dari hasil ini, akan diperoleh satu cara yang sangat bermanfaat untuk mengembangkan visualisasi geometrik kita dalam berbagai variasi soal matematika, dimana intuisi geometrik tidak dapat digunakan.
- Aksioma-aksioma yang digunakan untuk mendefiniskan vektor baru ini didasarkan pada sifat-sifat vektor di R^2 dan R^3, sehingga kita dapat menjadikannya sebagai landasan untuk menvisualisasikan masalah yang berkaitan dengan vektor baru ini.

1.2 Lapangan (Field)

1.1 Lapangan (Field)

Definition (Lapangan)

Suatu himpunan F yang padanya didefinisikan operasi jumlah $(+)$ dan operasi kali $(\cdot)$ disebut **Lapangan**, notasi $\langle F, +, \cdot \rangle$ jika memenuhi sifat-sifat berikut, yakni $\forall a, b, c \in F$ berlaku :

1. Komutatif : $a + b = b + a$
2. Assosiatif : $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Identitas : $\exists! 0 \in F$, sehingga $0 + a = a + 0 = a$
4. Invers : $\exists! -a \in F$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
5. Komutatif : $a \cdot b = b \cdot a$
6. Assosiatif: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7. Identitas: $\exists 1 \in F$, sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
8. Invers: $\exists a^{-1} \in F, a \neq 0$, sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
9. Distributif: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1.1 Lapangan (Field)

Examples

1. Himpunan bilangan real (R), dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah field,
2. Himpunan bilangan rasional (Q), dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\langle Q, +, \cdot \rangle$ adalah field, dan
3. Himpunan bilangan kompleks (C), dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\langle C, +, \cdot \rangle$ adalah field.

1.1 Lapangan (Field)

Solution

Untuk soal nomor 3, misal $z_1, z_2, z_3 \in C$, *dengan* $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, z_3 = a_3 + b_3 i$ *untuk* $a, b \in R$ *dan* $i = \sqrt{-1}$, *maka*

- *Komutatif* $\langle C, + \rangle$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

Untuk soal nomor 3, misal $z_1, z_2, z_3 \in C$, *dengan* $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, z_3 = a_3 + b_3 i$ *untuk* $a, b \in R$ *dan* $i = \sqrt{-1}$, *maka*

- *Komutatif* $\langle C, + \rangle$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

- *Assosiatif* $\langle C, + \rangle$

$$\begin{aligned} [z_1 + z_2] + z_3 &= [(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)] + (a_3 + b_3 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + [(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)] \\ &= z_1 + [z_2 + z_3] \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Terdapat* $0 = 0 + 0i \in C$, *sehingga*

$$\begin{aligned} 0 + z_1 &= (0 + 0i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + (0 + 0i) \\ &= (a_1 + 0) + (b_1 i + 0i) \\ &= a_1 + b_1 i \\ &= z_1 \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Terdapat* $0 = 0 + 0i \in C$, *sehingga*

$$\begin{aligned} 0 + z_1 &= (0 + 0i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + (0 + 0i) \\ &= (a_1 + 0) + (b_1 i + 0i) \\ &= a_1 + b_1 i \\ &= z_1 \end{aligned}$$

- *Terdapat* $-z_1 = -a_1 - b_1 i \in C$, *sehingga*

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_1) &= (a_1 + b_1 i) + (-a_1 - b_1 i) \\ &= (-a_1 - b_1 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= (-a_1 + a_1) + (-b_1 i + b_1 i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Komutatif* $\langle C, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_2 + b_2 i)(a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Komutatif* $\langle C, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_2 + b_2 i)(a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

- *Assosiatif* $\langle C, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3 &= [(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)] \cdot (a_3 + b_3 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) \cdot [(a_2 + b_2 i) \cdot (a_3 + b_3 i)] \\ &= z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Terdapat* $1 = 1 + 0i \in C$, *sehingga*

$$\begin{aligned} 1 \cdot z_1 &= (1 + 0i)(a_1 + b_1 i) \\ &= (a_1 + b_1 i)(1 + 0i) \\ &= a_1 + b_1 i \\ &= z_1 \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Terdapat* $1 = 1 + 0i \in C$, *sehingga*

$$\begin{aligned} 1 \cdot z_1 &= (1 + 0i)(a_1 + b_1 i) \\ &= (a_1 + b_1 i)(1 + 0i) \\ &= a_1 + b_1 i \\ &= z_1 \end{aligned}$$

- *Sebelum menguji sifat invers untuk operasi* $\langle C, \cdot \rangle$, *lakukan identifikasi invers untuk bilangan kompleks. Misal* $z^{-1} = x + yi$, *maka*

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= 1 \\ (a + bi)(x + yi) &= (1 + 0i) \\ (ax - by) + (bx + ay)\, i &= (1 + 0i) \end{aligned}$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Dari persamaan terakhir diasumsikan sistem persamaan dua variabel x dan y, dengan koefisien a dan b, sehingga*

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

menghasilkan

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad dan \quad y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

Dengan demikian

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Terdapat* $z_1^{-1} = \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} i \in C$, *sehingga*

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_1^{-1} &= (a_1 + b_1 i)\left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} i\right) \\
&= \left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} i\right)(a_1 + b_1 i) \\
&= \frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2} + \frac{a_1 b_1}{a_1^2+b_1^2} i - \frac{a_1 b_1}{a_1^2+b_1^2} i + \frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2} \\
&= 1 + 0i \\
&= 1
\end{aligned}
$$

1.1 Lapangan (Field)

Solution

- *Distributif*

$$
\begin{aligned}
z_1(z_2+z_3) &= (a_1+b_1 i)\left[(a_2+b_2 i)+(a_3+b_3 i)\right] \\
&= (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)+(a_1+b_1 i)(a_3+b_3 i) \\
&= z_1 z_2 + z_1 z_3
\end{aligned}
$$

- *Selanjutnya dengan cara serupa, anda dapat menunjukkan bahwa bilangan rasional* $\langle Q,+,\cdot\rangle$ *adalah lapangan.*

Examples

Jelaskan, apakah himpunan semua bilangan bulat (Z) beserta operasinya $\langle Z,+,\cdot\rangle$ merupakan field atau bukan?

1.3 Ruang Vektor

1.3 Ruang Vektor

Definition (Ruang Vektor)

Suatu himpunan tak kosong V dengan dua operasi $+$ dan $\cdot$ dikatakan suatu ruang vektor atas lapangan F bila memenuhi 10 aksioma berikut, yakni untuk setiap vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan untuk setiap skalar $k, l \in F$, berlaku:

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(4) $\exists! \mathbf{0} \in V$, sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
(5) $\exists! -\mathbf{u} \in V$, sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(6) $k\mathbf{u} \in V$
(7) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
(8) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
(9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

1.3 Ruang Vektor

Example

1. Himpunan R^2 adalah ruang vektor atas lapangan R, dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$$

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix}, \forall a \in K,\ dan\ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$$

2. Himpunan R^n adalah ruang vektor atas lapangan R, dengan definisi yang sama pada Contoh 1.
3. Tunjukkan bahwa himpunan V dari semua matriks 2×2 dengan entri-entri real adalah ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks.

1.3 Ruang Vektor

Solution

Untuk membuktikan bahwa R^2 adalah ruang vektor atas lapangan R, berikut dibuktikan 10 aksioma ruang vektor. Misalkan $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^2$ *dan* $k, l \in K$.

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$

1.3 Ruang Vektor

Solution

Untuk membuktikan bahwa R^2 adalah ruang vektor atas lapangan R, berikut dibuktikan 10 aksioma ruang vektor. Misalkan $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^2$ *dan* $k, l \in K$.

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

1.3 Ruang Vektor

Solution

Untuk membuktikan bahwa R^2 adalah ruang vektor atas lapangan R, berikut dibuktikan 10 aksioma ruang vektor. Misalkan $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^2$ *dan* $k, l \in K$.

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

1.3 Ruang Vektor

Solution

Untuk membuktikan bahwa R^2 *adalah ruang vektor atas lapangan* R*, berikut dibuktikan 10 aksioma ruang vektor. Misalkan* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^2$ *dan* $k, l \in K$.

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- $\exists! \mathbf{0} = (0, 0) \in R^2$, *sehingga*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + \mathbf{x} &= (0,0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2) + (0,0) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

1.3 Ruang Vektor

Solution

- $\exists! -\mathbf{x} = (-x_1, -x_2) \in R^2$, *sehingga*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) &= (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) \\ &= (-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) \\ &= (0, 0) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

1.3 Ruang Vektor

Solution

- $\exists! -\mathbf{x} = (-x_1, -x_2) \in R^2$, *sehingga*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) &= (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) \\ &= (-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) \\ &= (0, 0) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

- *Lanjutkan dengan cara sama untuk membuktikan aksioma 6-10.*

1.3 Ruang Vektor

Example (Himpunan Bukan Ruang Vektor)

Misalkan $V = R^2$ dengan $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan didefinisikan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian skalar

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ k\mathbf{u} &= (ku_1, 0), \quad k \in R \end{aligned}$$

1.3 Ruang Vektor

Solution

Sebagai latihan, anda dapat dengan mudah untuk menunjukkan bahwa $A1 - A9$ *terpenuhi, namun terdapat nilau* $\mathbf{u}$ *yang menyebabkan* $A10$ *tidak terpenuhi. Misalkan*

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2), u_2 \neq 0$$

Maka

$$\begin{aligned} 1\mathbf{u} &= (1 \cdot u_1, 0) \\ &= (u_1, 0) \\ &\neq \mathbf{u} \end{aligned}$$

Dengan demikian $V = R^2$ *dengan operasi yang diberikan* **bukan ruang vektor**.

1.3 Ruang Vektor

Theorem (Sifat-Sifat Ruang Vektor)

Misalkan V adalah ruang vektor atar skalar K. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan $\forall k, l \in K$, maka berlaku sifat-sifat berikut:

1. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
2. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. $(k\mathbf{v} = 0) \Rightarrow (k = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0})$
4. $k(-\mathbf{v}) = -k\mathbf{v}$
5. $-k(\mathbf{v}) = -k\mathbf{v}$
6. $(k - l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} - l\mathbf{v}$
7. $k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{w}$

1.3 Ruang Vektor

Bukti. Bukti diturunkan dari aksioma-aksioma ruang vektor.

1. Berdasarkan $A5$, dapat ditulis

$$k\mathbf{0}+(-k\mathbf{0})=\mathbf{0} \tag{1}$$

Tambahkan kedua ruas dengan $k\mathbf{0}$, diperoleh

$$k\mathbf{0}+k\mathbf{0}+(-k\mathbf{0})=k\mathbf{0}+\mathbf{0}$$

Gunakan $A3$ pada ruas kiri dan $A4$ pada ruas kanan diperoleh

$$(k\mathbf{0}+k\mathbf{0})+(-k\mathbf{0})=k\mathbf{0}$$

Dengan $A7$ diperoleh

$$k(\mathbf{0}+\mathbf{0})+(-k\mathbf{0})=k\mathbf{0}$$

Selanjutnya diperoleh

$$k\mathbf{0}+(-k\mathbf{0})=k\mathbf{0} \tag{2}$$

1.3 Ruang Vektor

1. Dari persamaan (1) dan (2) , diperoleh

$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

2. Berdasarkan sifat-sifat field, $\forall k \in F$, berlaku

$$\begin{aligned} k + 0 &= k \\ (k+0)\,\mathbf{v} &= k\mathbf{v},\ \forall \mathbf{v} \in V \quad (\text{Kalikan Kedua Ruas dgn } \mathbf{v}) \\ k\mathbf{v} + 0\mathbf{v} &= k\mathbf{v} \quad (\text{Aksioma 7}) \\ 0\mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad (\text{Hukum Pembatalan}) \end{aligned}$$

3. Pembuktian sifat selanjutnya disisakan sebagai latihan

** Latihan 1

1. Buktikan bahwa himpunan bilangan rasional (Q) adalah field yang dinotasikan $\langle Q, +, \cdot \rangle$.
2. Buktikan bahwa himpunan-himpunan berikut adalah ruang vektor terhadap aturan jumlah dan perkalian skalar vektor yang didefinisikan terhadapnya. Perhatikan masing-masing skalarnya.
    1. $\mathcal{F}(R) = \{f \mid f : R \to R\}$ adalah himpunan semua fungsi dari R ke R. Untuk sebarang $f, g \in \mathcal{F}(R)$ dan $k \in R$,didefinisikan:
        - Dikatakan $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in R$
        - Jumlah $f + g$ didefinisikan $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in R$
        - Perkalian skalar kf didefinisikan $(kf)(x) = kf(x), \forall x \in R$
    2. Misalkan $V = R^2$ adalah himpunan semua koordinat bidang. Untuk sembarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$, dan untuk sembarang $k \in R$, berlaku:
        - Dikatakan $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$
        - Jumlah $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ didefinisikan $\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$
        - Perkalian kf didefinisikan $k\mathbf{x} := (k + kx_1 - 1, k + kx_2 - 1)$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "