ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

1.5 Kombinasi Linear

1.5 Kombinasi Linear

Sebelumnya kita telah memiliki sifat subruang vektor bahwa: Jika V adalah ruang vektor atas skalar F dan $W \subseteq V$, maka W disebut sebagai **Subruang** dari V jika dan hanya jika

$$(\forall k, l \in F,\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W) \quad k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in W$$

Unsur $k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$ dapat kita sebut **Kombinasi Linear** dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Lebih lanjut, kombinasi linear dapat dijelaskan mengikuti definisi berikut.

Definition

Misalkan himpunan tak kosong $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$. Suatu vektor $\mathbf{w} \in V$ disebut **Kombinasi Linear** dari A, jika $\exists \{c_1, c_2, \cdots c_n\} \in F^n$ sehingga berlaku

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots c_n \mathbf{v}_n$$

1.5 Kombinasi Linear

Example

Setiap vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ pada R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor basis standar

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,,\ \ \mathbf{j} = (0, 1, 0)\,,\ \ \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

karena

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (a, b, c) \\ &= a\,(1, 0, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 0, 1) \\ &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \end{aligned}$$

1.5 Kombinasi Linear

Example

Diberikan vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ dan $\mathbf{v}_2 = (6, 4, 2)$ di R^3. Tunjukkan bahwa:

1. $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ adalah kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.
2. $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ bukan kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$.

1.5 Kombinasi Linear

Solution

1. $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ *kombinasi linear dari* $\mathbf{v}_1$ *dan* $\mathbf{v}_2$ *jika* $\exists k_1, k_2 \in F$ *sehingga berlaku*

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 \\ (9, 2, 7) &= k_1 (1, 2, -1) + k_2 (6, 4, 2) \\ &= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2) \end{aligned}$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini diperoleh $k_1 = -3$ *dan* $k_2 = 2$, *sehingga* $\mathbf{w}$ *kombinasi linear dari* $\mathbf{v}_1$ *dan* $\mathbf{v}_2$.

1.5 Kombinasi Linear

Solution

2. $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ *kombinasi linear dari* $\mathbf{v}_1$ *dan* $\mathbf{v}_2$ *jika* $\exists k_1, k_2 \in F$ *sehingga berlaku*

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 \\ (4, -1, 8) &= k_1 (1, 2, -1) + k_2 (6, 4, 2) \\ &= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2) \end{aligned}$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

Sistem ini tak konsisten sehingga $\mathbf{z}$ *bukan kombinasi linear dari* $\mathbf{v}_1$ *dan* $\mathbf{v}_2$.

1.5 Kombinasi Linear

Theorem (Span/Merentang)

Misalkan V *adalah ruang vektor atas skalar* F *dan* $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} \in V$. *Himpunan semua kombinasi linear dari* A *disebut span* (A) *dinotasikan* $\langle A \rangle$, *yaitu*

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \begin{array}{c} c_1, c_2, \cdots, c_n \in F \\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in A \\ n \text{ bilangan asli} \end{array} \right\}$$

yang merupakan subruang dari V. *Dalam hal ini:*

1. $\langle A \rangle$ *disebut subruang yang direntang oleh* A
2. $\langle A \rangle$ *merupakan subruang terkecil yang memuat* A, *artinya untuk setiap subruang* U *dari* V *yang memuat* A, *pasti* $\langle A \rangle \subseteq U$.

1.5 Kombinasi Linear

Proof.

Akan dibuktikan

1. $\langle A \rangle$ subruang dari V
   Ambil sembarang $k, l \in F$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \langle A \rangle$, berarti $\exists c_i, d_i \in F^n$ sehingga $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{v}_i$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} k\mathbf{u} + l\mathbf{v} &= k\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i + l\sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (kc_i + ld_i)\, \mathbf{v}_i \in \langle A \rangle \end{aligned}$$

□

1.5 Kombinasi Linear

Proof.

2. Akan dibuktikan $\langle A \rangle$ merupakan subruang terkecil yang memuat A
   Ambil sembarang subruang U dari V dengan $A \subseteq U$.
   Akan ditunjukkan bahwa $\langle A \rangle \subseteq U$.
   Misal $\mathbf{u} \in \langle A \rangle$, berarti $\exists c_i \in F^n$ sehingga $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i$.
   Karena $A \subseteq U$, maka $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) \in U$ dan karena U adalah subruang, maka $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i \in U$.

□

1.5 Kombinasi Linear

Example

Tunjukkan apakah vektor-vektor

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \text{ dan } \mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$$

merentang pada ruang vektor R^3.

Solution

Akan ditunjukkan bahwa terdapat sembarang $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in R^3$ *sehingga berlaku*

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 \\ (c_1, c_2, c_3) &= k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3) \\ &= (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3) \end{aligned}$$

1.5 Kombinasi Linear

Solution

Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= c_1 \\ k_1 + k_3 &= c_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= c_3 \end{aligned}$$

Sistem akan konsisten untuk semua nilai c_1, c_2, *dan* c_3 *jika dan hanya jika matriks koefisien*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

memiliki determinan tak nol. Karena $\det(A) = 0$, *maka* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, *dan* $\mathbf{v}_3$ *tidak merentang di* R^3.

1.5 Kombinasi Linear

Definition

Suatu subruang W dari V dikatakan direntang oleh A, dalam hal ini $W = span\,(A)$ jika

$$\forall \mathbf{w} \in W,\ \exists c_1, c_2, \cdots, c_n \in F^n, \text{sehingga } \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i$$

Khususnya, ruang vektor V dikatakan direntang oleh A, dalam hal ini $V = span\,(A)$ jika

$$\forall \mathbf{v} \in V,\ \exists c_1, c_2, \cdots, c_n \in F^n, \text{sehingga } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i$$

1.5 Kombinasi Linear

Example

Tentukan apakah vektor-vektor berikut merentang di R^3 :

1. $\mathbf{v}_1 = (2,2,2)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,3)$, dan $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$
2. $\mathbf{v}_1 = (1,2,6)$, $\mathbf{v}_2 = (3,4,1)$, $\mathbf{v}_3 = (4,3,1)$ dan $\mathbf{v}_4 = (3,3,1)$

Solution

1. *Akan ditunjukkan bahwa terdapat sembarang* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in R^3$ *sehingga berlaku*

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 \\ (c_1, c_2, c_3) &= k_1(2,2,2) + k_2(0,0,3) + k_3(0,1,1) \\ &= (2k_1, 2k_1 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + k_3)\end{aligned}$$

1.5 Kombinasi Linear

Solution

1. *Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh*

$$\begin{aligned} 2k_1 &= c_1 \\ 2k_1 + k_3 &= c_2 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 &= c_3 \end{aligned}$$

Sistem akan konsisten untuk semua nilai c_1, c_2, *dan* c_3 *jika dan hanya jika matriks koefisien*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

memiliki determinan tak nol. Karena $\det(A) = -6 \neq 0$ (*Buktikan*), *maka* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, *dan* $\mathbf{v}_3$ *merentang di* R^3.

1.5 Kombinasi Linear

Solution

2. *Akan ditunjukkan bahwa terdapat sembarang* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *sehingga berlaku*

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + k_4\mathbf{v}_4 \\ (c_1, c_2, c_3) &= k_1(1,2,6) + k_2(3,4,1) + k_3(4,3,1) + k_4(3,3,1) \end{aligned}$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks koefisien A memiliki determinan tak nol, $\det(A) = -39 \neq 0$ *(Buktikan), maka* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, v_3$ *dan* $\mathbf{v}_4$ *merentang di* R^3.

** Latihan 3

1. Nyatakan vektor berikut sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$, dan $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$:
   a. $(-9, -7, -15)$
   b. $(6, 11, 6)$
2. Tentukan apakah vektor-vektor berikut merentang di R^3 :
   a. $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$, dan $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$
   b. $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$, dan $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$

** Latihan 3

3. Di dalam ruang vektor F^n; vektor-vektor berikut disebut vektor satuan

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0) \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \cdots, 1)
\end{aligned}$$

Jika $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$. Tunjukkan bahwa $\forall \mathbf{x} \in F^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan kombinasi linear dari E. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "