[DAC61833] ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Definition

Misalkan V adalah ruang vektor atas skalar F dan misalkan $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} \in V$. A disebut **Bebas Linear** jika

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

memiliki tepat satu solusi, yaitu

$$c_i = 0, i = 1, 2, \cdots n$$

Sebaliknya, jika terdapat solusi-solusi lain, maka $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ disebut **Terpaut Linear**.

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Secara umum, di dalam ruang vektor F^m; misalkan $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan yang terdiri atas n vektor. Berdasarkan definisi di atas, untuk memeriksa apakah vektor A adalah bebas/terpaut linear dapat dilakukan prosedur berikut:

- Defnisikan matriks M yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor dari A, yaitu
$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$
- Definisikan SPL homogen $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dengan matriks variabel adalah vektor kolom $\mathbf{x} \in F^n$,
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

- Periksalan jenis solusi dari SPL homogen $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yaitu:
  1. Jika SPL homogen $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, mempunyai solusi tunggal $(Rank\,(M) = n)$, maka A Bebas Linear.
  2. Jika SPL homogen $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, mempunyai banyak solusi $(Rank\,(M) < n)$, maka A Terpaut Linear.
- Perhatikan bahwa, jika M matriks bujur sangkar $n \times n$, maka:
  1. $Rank\,(M) = n$ apabila $\det\,(M) \neq 0$ $\;(M$ Non Singular$)$
  2. $Rank\,(M) < n$ apabila $\det\,(M) = 0$ $\;(M$ Singular$)$

Example

Periksalah apakah himpunan vektor-vektor di dalam ruang vektor yang didefinisikan berikut ini bebas/terpaut linear.

$$\begin{aligned} 1)\;\; A &= \{(1,1,8,1)\,,(1,0,3,0)\,,(3,1,14,1)\} \;\; di\ dalam\ R^4 \\ 2)\;\; A &= \{(1,2,-1)\,,(-1,1,0)\,,(1,3,-1)\} \;\; di\ dalam\ R^3 \end{aligned}$$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Solution

1. *Diketahui matriks*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Karena $Rank\,(M) = 2 < n = 3$, *maka himpunan* A *terpaut linear.*

2. *Diketahui matriks*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Karena $Rank\,(M) = n = 3$, *maka himpunan* A *bebas linear.*

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Example

Periksalah apakah vektor-vektor berikut,

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)\,, \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1)\,, \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

membentuk suatu himpunan yang bebas/terpaut linear.

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Solution

Misal persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya adalah

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

sehingga

$$\begin{aligned} k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) &= (0,0,0) \\ (k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

bersesuaian dengan SPL

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Solution

Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$*:*

- *Bebas linear jika SPL* (7) *memiliki solusi nontrivial.*
- *Terpaut linear jika SPL* (7) *memiliki solusi trivial.*

Dengan menyelesaikan sistem (7)*, diperoleh*

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, k_2 = -\frac{1}{2}t, k_3 = t$$

yang menunjukkan solusi nontrivial sehingga vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *saling terpaut linear.*

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Solution

Alternatif lain untuk menunjukkan solusi nontrivial dapat dilakukan dengan menghitung determinan matriks koefisien dari sistem (7) , *yaitu*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika $\det(M) = 0$, *maka solusi sistem* (7) *nontrivial, yang berarti ektor-vektor* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *saling terpaut linear.*

- Berikut diberikan beberapa Teorema yang berkaitan erat dengan sifat-sifat dasar himpunan yang saling bebas/terpaut linear, untuk lebih memudahkan pemahamannya.

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Theorem

Misalkan A adalah himpunan berhingga yang beranggotakan dua vektor atau lebih. A dikatakan terpaut linear jhj terdapat sedikitnya satu vektor dari A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari anggota A yang lainnya.

Proof.

- A terpaut linear $\Rightarrow \exists j \in I = \{1, 2, \cdots, n\}$, $c_j \neq 0$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = 0$. Dengan demikian, terdapat $c_j^{-1} \in F$ dan $c_j \mathbf{v}_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} (-c_i) \mathbf{v}_i$ yang menyebabkan

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(-c_j^{-1} c_i\right) \mathbf{v}_i .$$

$\square$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Proof.

- Misalkan $\exists j \in I = \{1, 2, \cdots, n\}$ sehingga $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} c_i \mathbf{v}_i$, maka

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n} c_i \mathbf{v}_i + (-1)\,\mathbf{v}_j = 0 \text{ dengan } c_j = -1$$

□

Corollary

Jika A memuat vektor nol, maka A pasti terpaut linear.

Proof.

Misalkan A memuat memuat $\mathbf{0}$. Karena $\mathbf{0}$ merupakan kombinasi linear dari sembarang himpunan, maka $\mathbf{0}$ pasti merupakan kombasi linear dari suatu subhimpunan sejati dari A; yaitu $A|\,\{\mathbf{0}\}$. Ini berarti A terpaut linear. □

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Example

Misal $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = (1, 4, -2, 6), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 0, 4), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 3)$$

Dalam hal ini, himpunan A dikatakan terpaut linear karena $\mathbf{v}_1$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3$, yakni

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 \\ (1, 4, -2, 6) &= 3(1, 2, 0, 4) - 2(1, 1, 1, 3) \end{aligned}$$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Example

Misal $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = (2, 6, 0, 9), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 0, 4), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 3)$$

Dalam hal ini, himpunan A dikatakan bebas linear karena $\mathbf{v}_1$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3$.Untuk membuktikan hal ini, andaikan $\exists c_1, c_2 \in F$, sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= c_1\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3 \\ (2, 6, 0, 9) &= c_1 (1, 2, 0, 4) + c_2 (1, 1, 1, 3) \end{aligned}$$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Example

yang ekivalen dengan SPL

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ 2c_1 + c_2 &= 6 \\ c_2 &= 0 \\ 4c_1 + 3c_2 &= 9 \end{aligned}$$

Jelas bahwa SPL tersebut tidak mempunyai solusi.

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Example

Lakukan pengecekan, apakah vektor-vektor berikut saling bebas/terpaut linear di R^3?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ dan } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 24 \end{pmatrix}$$

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Solution

- *Jika diperhatikan dengan seksama, ketiga vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai*

$$2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$$

sehingga ketiga vektor tersebut saling terpaut linear.

- *Lebih lanjut dapat diperlihakan bahwa*

$$2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \Leftrightarrow 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

ekivalen dengan kombinasi linear

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

yang mempunyai solusi tak trivial yaitu $c_1 = 2, c_2 = 3,$ *dan* $c_3 = -1,$ *sehingga ketiga vektor saling terpaut linear.*

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Examples

Diberikan vektor-vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ yang bebas linear di suatu ruang vektor atas lapangan F. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ dan $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah bebas linear.

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Solution

Misal $\exists a, b \in F$ *sehingga berlaku kombinasi linear*

$$\begin{aligned} a\mathbf{x} + b\mathbf{y} &= \mathbf{0} \\ a\left(\mathbf{u} - \mathbf{v}\right) + b\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) &= \mathbf{0} \\ \left(a + b\right)\mathbf{u} + \left(b - a\right)\mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *yang bebas linear, maka*

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ b - a &= 0 \end{aligned}$$

yang menghasilkan solusi trivial $a = 0$ *dan* $b = 0$. *Dengan demikian* $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ *dan* $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ *adalah bebas linear.*

1.6 Bebas dan Terpaut Linear

Examples

Tentukan apakah vektor-vektor berikut, saling besa/terpaut linear?

1. $\mathbf{v}_1 = (4, -1, 2)\,,\quad \mathbf{v}_2 = (-4, 10, 2)$
2. $\mathbf{v}_1 = (25, 64, 244)\,,\quad \mathbf{v}_2 = (5, 8, 12)\,,\quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$
3. $\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,,\quad \mathbf{j} = (0, 1, 0)\,,\quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$
4. $\mathbf{v}_1 = (3, 0, -3, 6)\,,\quad \mathbf{v}_2 = (0, 2, 3, 1)\,,\quad \mathbf{v}_3 = (0, -2, -2, 0)\,,\quad \mathbf{v}_4 = (-2, 1, 2, 1)$

** Latihan 4

1. Periksalah apakah himpunan vektor-vektor berikut terpaut atau bebas linear di dalam ruang masing-masing
   a. $\{(2,-3,0),(1,0,-1),(3,-6,1)\}$ *di dalam* R^3
   b. $\mathbf{u}=(-1,2,4), \mathbf{v}=(5,-10,-20)$ *di dalam* R^3
   c. $\mathbf{p}_1=3-2x+x^2,\ \mathbf{p}_2=6-4x+2x^2$ *di dalam* P_2
2. Manakah dari himpunan vektor-vektor R^3 dan R^4 berikut yang terpaut linear?
   a. $(-3,0,4),(5,-1,2),(1,1,3)$
   b. $(-2,0,1),(3,2,5),(6,-1,1),(7,0,-2)$
   c. $(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)$
   d. $(0,3,-3,-6),(-2,0,0,-6),(0,-4,-2,-2),(0,-8,4,-4)$
3. Untuk nilai λ berapakah vektor-vektor berikut membentuk suatu himpunan yang saling terpaut linear pada R^3?

$$\mathbf{v}_1=\left(\lambda,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad \mathbf{v}_2=\left(-\frac{1}{2},\lambda,-\frac{1}{2}\right),\quad \mathbf{v}_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\lambda\right)$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "