[DAC61833] ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

2. Ruang Hasilkali Dalam

2.1 Hasilkali Dalam

Definition (Hasilkali Dalam)

Misalkan V adalah ruang vektor atas *field* F dan sembarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Operasi biner dari $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ yang bernilai dalam F, dinotasikan dengan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ disebut **Hasilkali Dalam** jika memenuhi sifat-sifat berikut, yaitu $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ dan $k, l \in F$, berlaku:

1. Sifat Simetrik
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$
2. Sifat Linearitas
$$\langle k\mathbf{x} + l\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = k \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + l \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$
3. Sifat Positifitas
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \text{ dan } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

2.1 Hasilkali Dalam

- Definisi di atas menggunakan asumsi untuk field yang lebih umum, yakni $F = C$, sehingga definisi ini juga berlaku untuk $F = R$, karena $R \subseteq C$.
- Jika $F = C$ maka V disebut **Ruang Hasilkali Dalam Kompleks**, sedangkan jika $F = R$ maka V disebut **Ruang Hasilkali Dalam Real.**

Example

Misal vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ di R^n . Buktikan bahwa operasi hasilkali titik kedua vektor yang didefinisikan

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

adalah hasilkali dalam.

2.1 Hasilkali Dalam

Solution

Untuk membuktikan bahwa operasi tersebut merupakan hasilkali dalam, maka harus dibuktikan ketiga sifat berikut. Ambil sembarang vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^n$ *dan* $k, l \in F$.

1. *Simetrik*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n \\ &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

2.1 Hasilkali Dalam

Solution

2. *Linearitas*

$$
\begin{aligned}
\langle k\mathbf{x} + l\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle &= \langle k\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) + l\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right), \left(z_1, z_2, \cdots, z_n\right. \\
&= \langle \left(\left(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n\right) + \left(ly_1, ly_2, \cdots, ly_n\right), \left(z_1, z_2, \cdots, \right.\right. \\
&= \langle \left(kx_1 + ly_1, kx_2 + ly_2, \cdots, kx_n + ly_n\right), \left(z_1, z_2, \cdots, z_n\right) \\
&= \left(kx_1 + ly_1\right) z_1 + \left(kx_2 + ly_2\right) z_2 + \cdots + \left(kx_n + ly_n\right) z_n \\
&= kx_1 z_1 + ly_1 z_1 + kx_2 z_2 + ly_2 z_2 + \cdots + kx_n z_n + ly_n z_n \\
&= k\left(x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n\right) + l\left(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + \right. \\
&= k\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + l\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle
\end{aligned}
$$

2.1 Hasilkali Dalam

Solution

3. *Positifitas*

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots + x_n x_n \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0 \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 0 \\
&\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots + x_n x_n = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

2.1 Hasilkali Dalam

Example

Untuk setiap vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in R^2$, didefinisikan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Tunjukkan bahwa $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ suatu hasilkali dalam di R^2.

2.1 Hasilkali Dalam

Example

Diberikan ruang vektor $M_2(R)$, yaitu himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan semua unsurnya bilangan real. Untuk vektor-vektor $U, V \in M_2(R)$ dengan

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \text{ } dan \text{ } V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

berlaku

$$\langle U, V \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

Tunjukkan bahwa operasi tersebut mendefinisikan suatu hasilkali dalam.

2.1 Hasilkali Dalam

Example

Diberikan sebarang polinomial $\mathbf{p} = p(x)$, $\mathbf{q} = q(x) \in P_n[x](R)$, dan didefinisikan

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b p(x)\, q(x)\, dx$$

dengan $a, b \in R$ dan $a < b$. Tunjukkan bahwa rumus $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ mendefinisikan suatu hasilkali dalam di $P_n[x](R)$.

2.1 Hasilkali Dalam

Solution

Ambil sembarang $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in P_n[x](R)$ *dan* $k, l \in F$.

1. *Simetrik*

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b p(x)\, q(x)\, dx = \int_a^b q(x)\, p(x)\, dx = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$$

2. *Linearitas*

$$\begin{aligned} \langle k\mathbf{p} + l\mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle &= \int_a^b [kp(x) + lq(x)]\, r(x)\, dx \\ &= \int_a^b [kp(x)\, r(x) + lq(x)\, r(x)]\, dx \\ &= k \int_a^b p(x)\, r(x)\, dx + l \int_a^b q(x)\, r(x)\, dx \\ &= k \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle + l \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle \end{aligned}$$

2.1 Hasilkali Dalam

Solution

3. *Positifitas*

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle &= \int_a^b p(x)\, p(x)\, dx = \int_a^b [p(x)]^2\, dx \geq 0 \\
\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle &= 0 \\
&\Leftrightarrow \int_a^b [p(x)]^2\, dx = 0 \\
&\Leftrightarrow [p(x)]^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow p(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{p} = 0
\end{aligned}
$$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Definition (Norma dan Jarak)

Diberikan $\mathbf{V}$ adalah suatu ruang hasil kali dalam dan vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. **Norm (Panjang)** dari vektor $\mathbf{x}$ dinotasikan $\|\mathbf{x}\|$ dan didefinisikan

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

$\mathbf{x}$ disebut vektor normal jika $\|\mathbf{x}\| = 1$. Selanjutnya **jarak antara dua vektor** $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ dinotasikan dengan $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dan didefinisikan

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Example

Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ adalah vektor-vektor di R^n dengan hasilkali dalam euclid, maka

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

dan

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Example

Untuk setiap vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in R^2$, didefinisikan

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

Jika diambil $\mathbf{x} = (1, 0)$ dan $\mathbf{y} = (0, 1)$, maka

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle (1,0), (1,0) \rangle} = \sqrt{3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0} = \sqrt{3}$$

dan

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(1,0) - (0,1)\| = \|(1,-1)\| \\ &= \sqrt{\langle (1,-1), (1,-1) \rangle} \\ &= \sqrt{3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot -1 \cdot -1} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Definition

Dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di dalam ruang hasilkali dalam dikatakan **ortogonal**, dinotasikan $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, jika $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

Definition

1. Suatu himpunan $\mathbf{V}_1$ dikatakan ortogonal dengan himpunan $\mathbf{V}_2$, dinotasikan $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{V}_2$, jika $v_1 \perp v_2$ untuk setiap $v_1 \in \mathbf{V}_1$ dan $v_2 \in \mathbf{V}_2$.
2. Suatu himpunan bagian $\mathbf{U}$ dari suatu ruang hasilkali dalam dikatakan ortogonal jika untuk setiap $u, v \in \mathbf{U}$ dan $u \neq v$, maka $\langle u, v \rangle = 0$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Example

Misal ruang vektor $P_2[x](R)$ dengan hasilkali dalam

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

Jika diambil $\mathbf{p} = x$ dan $\mathbf{q} = x^2$, maka

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^3 dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, vektor-vektor $\mathbf{p} = x$ dan $\mathbf{q} = x^2$ ortogonal relatif terhadap hasilkali dalam.

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Theorem

Jika dua vektor $\mathbf{x}$ *dan* $\mathbf{y}$ *di dalam ruang hasilkali dalam adalah ortogonal, maka berlaku persamaan Pythagoras*

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad (\text{Karena } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0)
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Example

Contoh sebelumnya ditunjukkan bahwa vektor-vektor $\mathbf{p} = x$ dan $\mathbf{q} = x^2$ ortogonal relatif terhadap hasilkali dalam

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p\left(x\right) q\left(x\right) dx$$

Dari Teorema Phytagoras, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \left(\sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}\right)^2 \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} p\left(x\right) p\left(x\right) dx + \int_{-1}^{1} q\left(x\right) q\left(x\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

2.2 Ortogonalitas dalam Ruang Hasilkali Dalam

Example

Dengan integrasi langsung, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|^2 &= \langle \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}+\mathbf{q}\rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x+x^2\right)\left(x+x^2\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^2+2x^3+x^4\right) dx \\
&= \frac{2}{3}+0+\frac{2}{5} \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

** Latihan 6

1. Untuk setiap dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di ruang hasilkali dalam, buktikan bahwa identitas berikut berlaku

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right)$$

2. Untuk setiap dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ di ruang hasilkali dalam, buktikan bahwa identitas berikut berlaku

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right)$$

   Catatan: Perhatikan hasil pada soal nomor 1.

3. Misal $\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dan $\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ sembarang vektor di P_2. Tunjukkan bahwa $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$ dan $\mathbf{q} = 2x + x^2$ saling ortogonal dengan mengacu pada definisi hasilkali dalam

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "