[DAC61833] ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

2. Ruang Hasilkali Dalam

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

- Untuk menyelesaikan sejumlah kasus yang melibatkan ruang vektor, kita bebas memilih basis untuk ruang vektor tersebut yang dianggap sesuai.
- Di ruang hasilkali dalam, suatu basis yang vektor-vektornya saling orthogonal satu sama lain kerap kali dijadikan sebagai pilihan terbaik.
- Lebih lanjut akan dibahas bagaimana basis-basis tersebut diperoleh.

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Definition

- Himpunan vektor-vektor dalam ruang hasilkali dalam disebut sebagai **Himpunan Ortogonal,** jika setiap pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut saling ortogonal.
- Himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki norma 1 disebut **Ortonormal.**
- Dengan kata lain, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ dari vektor-vektor di $\mathbf{V}$ adalah ortonormal apabila

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle &= 0, \; j \neq k \\ \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle &= 1, \; j = k \\ j, k &= 1, 2, \cdots n \end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Example

Suatu himpunan $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dapat dikatakan ortonormal apabila berlaku

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= 0, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \\ \|\mathbf{v}_1\| &= \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1 \end{aligned}$$

Example

Diberikan himpunan $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)\,, \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,, \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

adalah vektor-vektor di R^3 yang dilengkapi hasilkali dalam euclid. Tunjukkan bahwa himpunan $\mathbf{V}$ ortonormal.

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

- *Himpunan* $\mathbf{V}$ *dikatakan ortonormal apabila memenuhi*

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \textit{ dan } \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$$

- *Perhatikan bahwa*

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle &= 0 \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0
\end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

- *Selanjutnya diperoleh*

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_1\| &= \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \\
\|\mathbf{v}_2\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \\
\|\mathbf{v}_3\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1
\end{aligned}
$$

- *Dengan demikian* **V** *ortonormal.*

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

- Setiap himpunan ortogonal yang memuat vektor taknol dapat dikonversi menjadi himpunan ortonormal dengan cara menormalisasikan setiap vektornya.
- Proseses **normalisasi suatu vektor taknol v** dilakukan dengan cara mengalikan vektor tersebut dengan resiprok (kebalikan) normanya, untuk menghasilkan vektor baru dengan norma 1.

Definition

Proses perkalian suatu vektor tak nol **v** dengan kebalikan panjangnya (*norm*) untuk memperoleh suatu vektor dengan norm 1 disebut dengan **penormalan** atau **normalisasi (normalizing) v,** yakni

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Example

Misalkan

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0)\,, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)\,, \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

Proses normalisasi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, dan $\mathbf{u}_3$ menghasilkan

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}(0,1,0) = (0,1,0) \\
\mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\mathbf{v}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Example

Tunjukkan bahwa himpunan $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ yang diperoleh pada contoh sebelumnya merupakan himpunan ortonormal.

Teorema berikut ini memperlihatkan bahwa sederhana sekali untuk menyatakan suatu vektor dalam suku-suku dari suatu basis ortonormal.

Theorem

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk suatu ruang hasilkali dalam V, dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang vektor di V, maka

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Example

Diberikan vektor-vektor

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)\,, \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

Mudah diperiksa bahwa himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah basis ortonormal untuk R^3 dengan hasilkali dalam Euclid. Nyatakan vektor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S dan tentukan vektor koordinat $(\mathbf{u})_s$.

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle &= 1 \cdot -\frac{4}{5} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{1}{5} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle &= 1 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Solution

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3 \\ &= 1 \cdot \mathbf{v}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \frac{7}{5}\mathbf{v}_3 \\ (1, 1, 1) &= (0, 1, 0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

Adapun vektor koordinat **u** *yang realtif terhadap* S *adalah*

$$\begin{aligned} (\mathbf{u})_S &= (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle) \\ &= \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) \end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Theorem

Jika S adalah sebuah basis ortonormal untuk sebuah ruang hasilkali dalam berdimensi n, dan jika

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \qquad (\mathbf{v})_s = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

Maka

1. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$
3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Example

Jika R^3 memiliki hasilkali dalam euclid, maka norma dari vektor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ adalah

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Dari contoh sebelumnya jika R^3 memiliki basis ortonormal S, dapat diketahui vektor koordinat $\mathbf{u}$ yang relatif terhadap S adalah

$$(\mathbf{u})_S = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

Norma $\mathbf{u}$ juga dapat dihitung dari vektor ini,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{3}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Theorem

Diberikan himpunan ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *di suatu ruang hasilkali dalam* V. *Jika* W *adalah ruang yang direntang oleh* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *maka setiap vektor* $\mathbf{u} \in V$ *bisa dinyatakan dalam bentuk*

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

dengan $\mathbf{w}_1 \in W$ *dan* $\mathbf{w}_2$ *ortogonal terhadap* W.

- $\mathbf{w}_1$ disebut **proyeksi ortogonal u** pada W, dinotasikan, $\text{proj}_W\ \mathbf{u}$.
- $\mathbf{w}_2$ disebut **komponen u yang ortogonal terhadap** W, dinotasikan, $\text{proj}_{W^\perp}\ \mathbf{u}$.
- Hal ini berarti

$$\mathbf{u} = \text{proj}_W\ \mathbf{u} + \text{proj}_{W^\perp}\ \mathbf{u}$$

dan karena $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$, maka

$$\text{proj}_{W^\perp}\ \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proj}_W\ \mathbf{u}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Theorem

Misalkan W adalah suatu subruang berdimensi berhingga dari suatu ruang hasilkali dalam V.

1. *Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ adalah sebuah basis ortonormal untuk W dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang vektor pada V, maka*

$$proj_W\ \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r$$

2. *Jika $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ adalah sebuah basis ortogonal untuk W dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang vektor pada V, maka*

$$proj_W\ \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Example

Diberikan ruang vektor R^3 dengan hasilkali dalam Euclid dan subruang vektor W yang direntang oleh vektor-vektor ortonormal

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (0,1,0)\\ \mathbf{v}_2 &= \left(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$

Tentukan Proyeksi ortogonal $\mathbf{u}=(1,1,1)$ pada W dan komponen $\mathbf{u}$ yang ortogonal terhadap W.

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

Proyeksi ortogonal $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ *pada* W :

$$\begin{aligned} proj_W\ \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \end{aligned}$$

Komponen $\mathbf{u}$ *yang ortogonal terhadap* W

$$\begin{aligned} proj_{W^\perp}\ \mathbf{u} &= \mathbf{u} - proj_W\ \mathbf{u} \\ &= (1, 1, 1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \\ &= \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right) \end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Theorem

Setiap ruang hasilkali dalam tak nol yang berdimensi berhingga mempunyai suatu basis ortonormal

Proof.

Misal V ruang hasilkali dalam taknol yang berdimensi n, dan suatu himpunan $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sembarang basis untuk V. Basis ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ untuk V , dapat diperoleh melalui **Proses Ortogonalisasi Gram-Schmidt,** dengan langkah-langkah sebagai berikut: □

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Proof.

1. Misal $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
2. Membentuk vektor $\mathbf{v}_2$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$ dengan cara menghitung komponen dari $\mathbf{u}_2$ yang ortogonal terhadap ruang W_1 yang direntang oleh $\mathbf{v}_1$, yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

□

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Proof.

3. Membentuk vektor $\mathbf{v}_3$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ dengan cara menghitung komponen dari $\mathbf{u}_3$ yang ortogonal terhadap ruang W_2 yang direntang oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$, yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 \\ &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

4. Proses dilanjutkan sampai v_n, untuk menghasilkan himpunan ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ yang terdiri dari n vektor bebas linear di V dan merupakan suatu basis ortogonal untuk V. Penormalan vektor-vektor di basis ortogonal akan menghasilkan basis ortonormal.

□

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Secara umum, **Proses Gram-Schmidt** dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j, \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

Example

Diberikan $V = R^3$ dengan hasilkali dalam Euclid. Terapkan algoritma **Gram-Schmidt** untuk mengortogonalkan basis

$$\{(1, -1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$$

Normalisasikan vektor-vektor basis ortogonal yang diperoleh menjadi sebuah basis ortonormal.

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

Misal $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 2)$

- *Langkah 1*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$$

- *Langkah 2*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - proj_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
&= (1, 0, 1) - \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot 1}{3}(1, -1, 1) \\
&= (1, 0, 1) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

- *Langkah 3*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - proj_{W_2}\mathbf{u}_3 \\
&= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 \\
&= (1, 1, 2) - \frac{2}{3}(1, -1, 1) - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

- *Dengan demikian, diperoleh basis ortogonal*

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{(1, -1, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

2.3 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Solution

- *Selanjutnya dapat diperoleh basis ortonormal* $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ *dengan*

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
\mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \\
\mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Problem

Jika diberikan sebuha sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel, tentukan sebuah vektor* $\mathbf{x}$ *jika memungkinkan, yang dapat meminimalkan nilai* $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ *merujuk pada hasilkali dalam Euclidean pada* R^m. *Vektor semacam ini disebut sebagai* **Solusi Kuadrat Terkecil** *dari* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Berikut diberikan beberapa Teorema yang berkaitan dengan Solusi Kuadrat Terkecil.

Theorem

Untuk sebarang sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *sistem normal yang terkait*

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

bersifat konsisten dan semua solusi dari sistem normal adalah solusi kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Selanjutnya, jika* W *adalah ruang kolom dari* A, *dan* $\mathbf{x}$ *aadalah solusi kuadrat terkecil sebarang dari* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *maka proyeksi ortogonal* $\mathbf{b}$ *pada* W *adalah*

$$proj_W\ \mathbf{b} = A\mathbf{x}$$

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Theorem

Jika A matiks $m \times n$, maka pernyataan berikut ekuivalen

1. *A memiliki vektor-vektor kolom yang bebas linear.*
2. *$A^T A$ dapat dibalik*

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Theorem

Jika A matiks $m \times n$ yang memiliki vektor-vektor kolom bebas linear, maka untuk setiap matriks $\mathbf{b}$, $m \times 1$, sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki solusi kuadrat terkecil yang unik, yakni

$$\mathbf{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \mathbf{b} \tag{10}$$

Selanjutnya, jika W adalah ruang kolom dari A, maka proyeksi ortogonal $\mathbf{b}$ pada W adalah

$$proj_W\ \mathbf{b} = A\mathbf{x} = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T \mathbf{b} \tag{11}$$

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Example

Tentukan solusi kuadrat terkecil dari sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

dan tentukan proyeksi ortogonal $\mathbf{b}$ pada ruang kolom A.

Solution

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \textit{dan} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Solution

Selanjutnya dapat kita peroleh

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

sehingga sistem normal $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ *dalam kasus ini adalah*

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2.4 Aproksimasi Kuadrat Terkecil

Solution

Dengan menyelesaikan sistem diatas diperoleh

$$x_1 = \frac{17}{95} \text{ dan } x_2 = \frac{143}{285}$$

Berdasarkan persamaan (11) *diperoleh proyeksi ortogonal* **b** *pada ruang kolom A, yaitu*

$$proj_W\ \mathbf{b} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{94}{57} \end{bmatrix}$$

** Latihan 7

1. Misal $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dan $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ sembarang vektor di P_2. Tunjukkan apakah himpunan polinomial berikut ini memenuhi sifat ortonormal atau tidak dengan mengacu pada definisi hasilkali dalam
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$
   a. $\left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right), \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2 \right), \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \right) \right\}$
   b. $\left\{ (1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 \right), (x^2) \right\}$
2. Misalkan R^4 memiliki hasilkali dalam Euclidean. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mengubah basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ menjadi sebuah basis ortonormal, jika
$$\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, -1), \mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$$

** Latihan 7

3. Tentukan solusi kuadrat terkecil dari sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan tentukan proyeksi ortogonal $\mathbf{b}$ pada ruang kolom matriks A.

$$a.\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$b.\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "