[DAC61333] KALKULUS LANJUT
"Integral Lipat"

Semester Ganjil 2019-2020

Resmawan

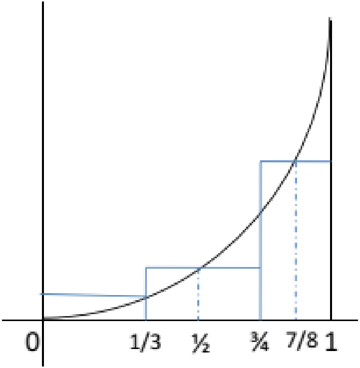
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

28 Oktober 2019

13.1. Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

1.1 Definisi Integral Tentu Fungsi Satu Peubah

Perhatikan Gambar



1.1 Definisi Integral Tentu Fungsi Satu Peubah

Definition

Jumlah Rieman untuk f

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta x_i$$

merupakan *hampiran* luas daerah dibawah kurva $y = f\left(x\right), x \epsilon \left[a, b\right]$. Jika

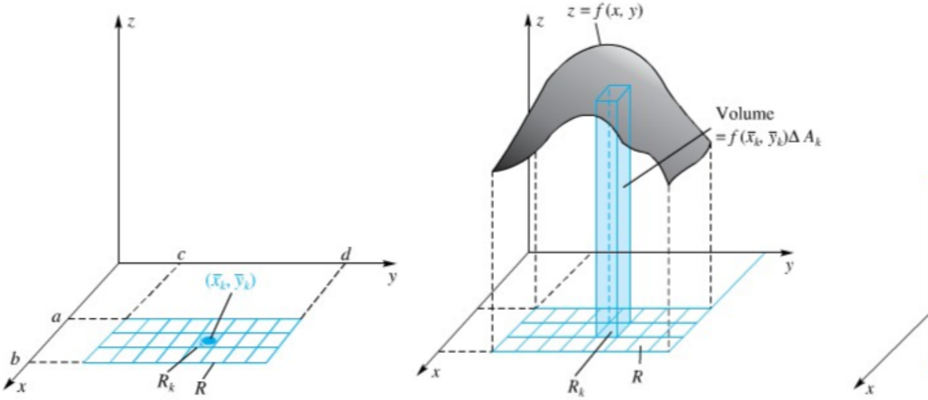
$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta x_i$$

ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada $[a, b]$. **Integral tentu** f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta x_i$$

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Perhatikan Gambar



1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Definition (Jumlah Riemann Fungsi Dua Variabel)

Misalkan $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ dan f kontinu (kecuali pada suatu kurva) dan terbatas. Bentuk partisi A_k dengan panjang Δx_k dan lebar Δy_k. Jika pada setiap A_k dipilih titik sampel (x_k, y_k), maka diperoleh **Jumlah Riemann**

$$\sum_{k-1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

yang merupakan hampiran volume ruang diantara permukaan $z = f(x, y)$ dan persegi panjang R.

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Definition (Integral Lipat Fungsi Dua Variabel)

Misalkan f suatu fungsi dua variabel yang terdefinisi pada suatu persegipanjang tertutup R.Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta A_k$$

ada, maka f dikatakan **terintegralkan** pada R. Selanjutnya disebut dengan **Integral Lipat Dua** f pada R yang diberikan oleh

$$\iint\limits_R f\left(x, y\right) dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \Delta A_k$$

1.2 Definisi Integral Lipat Fungsi Dua Peubah

Catatan penting untuk diingat:

- Jika $f(x) \geq 0$, maka
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
menyatakan **luas daerah** dibawah *kurva* $y = f(x)$ diantara a dan b.
- Dengan kaidah yang sama jika $f(x, y) \geq 0$, maka
$$\iint_R f(x, y)\,dA$$
menyatakan **volume benda pejal** dibawah *permukaan* $z = f(x, y)$ dan diatas persegipanjang R.

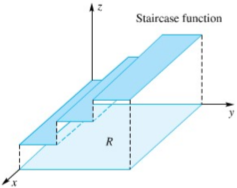
1.3 Keterintegralan

Theorem (Keterintegralan)

Jika f kontinu (kecuali pada suatu kurva) dan terbatas pada persegi panjang R, maka f terintegralkan pada R.

Example

Fungsi Tangga



Example

Setiap polinom dua peubah terintegralkan pada sembarang persegi panjang.

1.4 Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

1. **Linear**

$$\iint_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

2. **Aditif (Dapat Dijumlahkan).** Jika $R = R_1 \cup R_2$ maka berlaku

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

3. **Monoton (Berlaku Sifat Perbandingan).** Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk semua (x,y) di R, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA \leq \iint_R g(x,y)\,dA$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Example

Misalkan $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$. Hitunglah

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

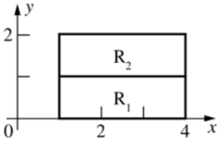
jika diberikan fungsi

$$1)\ f(x, y) = \left| \begin{array}{ll} -1 & ; 1 \le x \le 4, 0 \le y < 1 \\ 2 & ; 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 2 \end{array} \right.$$

$$2)\ f(x, y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \le x < 3, 0 \le y < 1 \\ 1 & ; 1 \le x < 3, 1 \le y \le 2 \\ 3 & ; 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 \end{array} \right.$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

1. Dari fungsi diperoleh persegipanjang R_1 dan R_2



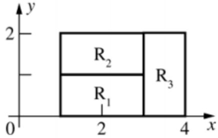
$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ R_2 &= 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

sehingga dengan sifat aditif, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint\limits_{R} f(x,y)\, dA &= \iint\limits_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\, dA \\ &= -1\,(3.1) + 2\,(3.1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

2. Dari fungsi diperoleh persegipanjang R_1, R_2 dan R_3



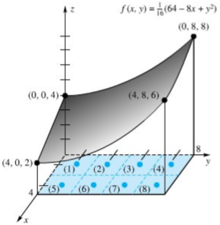
$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 1 \\ R_2 &= 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ R_3 &= 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

sehingga dengan sifat aditif, diperoleh

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\, dA &= \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA + \iint_{R_3} f(x,y)\, dA \\ &= 2(2.1) + 1(2.1) + 3(1.2) = 12 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Example



Diketahui persegipanjang $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$. Taksir nilai dari

$$\iint_R \frac{64 - 8x + y^2}{16} dA$$

dengan Jumlah Riemann dengan membagi R atas 8 persegi sama besar dan memilih titik-titik tengah tiap persegi sebagai titik sampelnya.

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Solution

Nilai f di titik-titik sampel

$$\begin{array}{llll} f(1,1)=\frac{57}{16} & f(1,3)=\frac{65}{16} & f(1,5)=\frac{81}{16} & f(1,7)=\frac{105}{16} \\ f(3,1)=\frac{41}{16} & f(3,3)=\frac{49}{16} & f(3,5)=\frac{65}{16} & f(3,7)=\frac{89}{16} \end{array}$$

Dengan $\Delta A_k = 4$, *diperoleh*

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{64-8x+y^2}{16}\,dA &\approx \sum_{k=1}^{8} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \\ &= \frac{4}{16}(57+65+81+105+41+49+65+89) \\ &= 138 \end{aligned}$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Problem

1. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. *Hitunglah*

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA$$

jika diberikan fungsi

$$a)\ f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

$$b)\ f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 3 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & ; 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

1.5 Perhitungan Integral Lipat Dua

Problem

2. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ *dan* P *adalah partisi dari* R *menjadi* 6 *persegi yang sama oleh garis-garis* $x = 2, x = 4$, *dan* $y = 2$. *Aproksimasi*

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

dengan menghitung jumlah Riemann dengan fungsi dua peubah:

$$\begin{aligned} a)\ f(x, y) &= 12 - x - y \\ b)\ f(x, y) &= 10 - y^2 \\ c)\ f(x, y) &= \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y) \end{aligned}$$

2.4 Latihan 1

Problem

1. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. *Hitunglah*

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

jika diberikan fungsi

$$a)\ f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 2 \\ 3 & ; 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

$$b)\ f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 2 & ; 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y < 1 \\ 3 & ; 1 \leq x < 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & ; 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$

2.3 Latihan 1

Problem

2. *Misalkan* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ *dan* P *adalah partisi dari* R *menjadi* 6 *persegi yang sama oleh garis-garis* $x = 2, x = 4$, *dan* $y = 2$. *Aproksimasi*

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

dengan menghitung jumlah Riemann dengan fungsi dua peubah:

$$\begin{aligned} a)\ f(x, y) &= 12 - x - y \\ b)\ f(x, y) &= 10 - y^2 \\ c)\ f(x, y) &= \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y) \end{aligned}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "