[DAC61833] ALJABAR LINEAR

Materi Kuliah Aljabar Linear

Resmawan

JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO

Agustus 2019

3. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definition (Nilai Eigen dan Vektor Eigen)

Andaikan A matriks $n \times n$. Suatu vektor taknol $\mathbf{x} \in R^n$ disebut **Vektor Eigen** dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$ dengan sembarang $\lambda \in R$, dan berlaku

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{12}$$

Dalam hal ini λ disebut **Nilai Eigen** dari A yang berkorespondensi dengan Vektor Eigen $\mathbf{x}$. Selanjutnya, pasangan $(\lambda, \mathbf{x})$ disebut pasangan Eigen dari A.

Syarat pada persamaan (12) dapat dituliskan kembali menjadi

$$(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{13}$$

dengan I matriks identitas.

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Theorem

Jika A matriks $n \times n$, maka λ disebut **Nilai Eigen** *dari A jika dan hanya jika berlaku persamaan*

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{14}$$

Persamaan ini disebut **Persamaan Karakteristik** *dari matriks A.*

Proof.

Diketahui $\mathbf{x} \neq 0$

Andaikan $\det(\lambda I - A) \neq 0$, maka $(\lambda I - A)$ mempunyai invers, sehingga dari persamaan (13) diperoleh

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\mathbf{x} &= (\lambda I - A)^{-1}\mathbf{0} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0} \text{ (Kontradiktif) dengan fakta } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Dengan demikian $\det(\lambda I - A) = 0$ □

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Example

Tentukan pasangan eigen (Nilai Eigen dan Vektor Eigen) dari matriks $A \in M_2(R)$ berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Solution

Perhatikan bahwa

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{array}{r|r} \det(\lambda I - A) = 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \end{array}$$

Dari persamaan karakteristik, diperoleh nilai eigen masing-masing adalah

$$\lambda_1 = 1 \textit{ dan } \lambda_2 = 3$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Solution

Selanjutnya, periksa $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *pada masing-masing nilai eigen untuk mendapatkan vektor eigen yang bersesuaian*

- *Untuk* $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & \quad x_1 + x_2 = 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian $x_1 = -1 \Leftrightarrow x_2 = 1$, *sehingga diperoleh pasangan eigen untuk* $\lambda = 1$ *adalah*

$$\left(1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Solution

- *Untuk* $\lambda = 3$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian $x_1 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$, *sehingga diperoleh pasangan eigen untuk* $\lambda = 3$ *adalah*

$$\left(3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Theorem

Andaikan A matriks segitiga $n \times n$ (Matriks Segitiga Atas, Matriks Segitiga Bawah, dan Matriks Diagonal), maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A.

Example

Nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

adalah $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{2}{3}, \lambda_3 = -\frac{1}{4}$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Theorem

Jika A matriks segitiga $n \times n$ dan λ adalah bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen

1. λ *adalah nilai eigen dari matriks* A
2. *Sistem persamaan* $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *memiliki solusi tak trivial*
3. *Terdapat vektor taknol* $\mathbf{x} \in R^n$ *sehingga* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
4. λ *adalah solusi dari persamaan karakteristik* $\det(\lambda I - A) = 0$.

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

- Vektor-vektor eigen matriks A yang terkait dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor-vektor taknol $\mathbf{x}$ yang memenuhi persamaan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
- Dengan kata lain, Vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor taknol dalam ruang solusi

$$(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

yang disebut sebagai **Ruang Eigen** dari matriks A yang terkait dengan nilai eigen λ.

Example

Tentukan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \det\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{bmatrix} &= 0 \\ (\lambda-3)(\lambda+1) &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh dua nilai eigen, yaitu

$$\lambda = 3 \ \ dan \ \ \lambda = -1$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

Vektor eigen yang bersesuaian diperoleh dari solusi persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *yaitu*

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- *Untuk* $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

- *Solusi sistem ini menghasilkan (**Buktikan**)*

$$x_1 = \frac{1}{2}s, \; x_2 = s$$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 3$.

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

- *Untuk* $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Solusi sistem ini menghasilkan (***Buktikan***)*

$$x_1 = 0, x_2 = s$$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

- *Dengan demikian*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = -1$.

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Example

Tentukan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) &= 0 \\
\det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} &= 0 \\
\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 &= 0 \ (\textbf{Buktikan}) \\
(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2) &= 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh dua nilai eigen, yaitu

$$\lambda = 1 \ \ \textit{dan} \ \ \lambda = 2$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

Vektor eigen yang bersesuaian diperoleh dari solusi persamaan $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *yaitu*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- *Untuk* $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

- *Solusi sistem ini menghasilkan (* **Buktikan** *)*

$$x_1 = -2s, x_2 = s, x_3 = s$$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 1$.

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

- *Untuk* $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Solusi sistem ini menghasilkan (***Buktikan***)*

$$x_1 = -s, x_2 = t, x_3 = s$$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen : Basis Ruang Eigen

Solution

- *Dengan demikian*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad dan \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 2$.

** Latihan 8

Tentukan nilai eigen dan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks yang diberikan berikut

$$1)\ \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

" Terima Kasih, Semoga Bermanfaat "