

ANALISIS KESTABILAN MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PENYEBARAN PENYAKIT PADA PREY DAN PEMANENAN PROPORSIONAL PADA PREDATOR

Siti Maisaroh¹, Resmawan², Emli Rahmi³

^{1,2,3}Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri
Gorontalo Jalan. Jenderal Sudirman No. 06, Kota Gorontalo, Indonesia.
Email: rafikapomalingo22@gmail.com, resmawan@ung.ac.id, emlirahmi@ung.ac.id.

Abstrak

Pada penelitian ini akan dibahas tentang model Eko-epidemiologi. Dalam model ini terdapat tiga sub-populasi yang saling berinteraksi yaitu *prey* rentan (x_S), *prey* terinfeksi (x_I) dan *predator* (y). Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui formulasi model Eko-epidemiologi dengan pemanenan proporsional pada *predator*, mengetahui titik ekuilibrium dan kestabilannya serta mensimulasikan model tersebut secara numerik. Dari model tersebut didapatkan lima titik ekuilibrium, dimana titik ekuilibrium E_0 adalah titik saddle dimana titik ini merupakan titik yang tidak stabil dan titik ekuilibrium E_1, E_2, E_3, E_4 adalah titik stabil asimtotik lokal dengan tipe spiral, dengan beberapa syarat yang harus dipenuhi. Pada titik stabil untuk nilai awal yang bersesuaian dengan kestabilan titik berapapun nilai awalnya, kurva solusi akan selalu menuju ke titik ekuilibrium. Titik interior dianalisis secara lokal dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz karena akar karakteristik dari titik ekuilibrium merupakan persamaan kubik, dan ditunjukkan simulasi untuk melihat perilaku dinamik dari model di sekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan metode Runge-kutta orde empat.

Kata kunci: Model Eko-epidemiologi, Pemanenan proporsional, Titik ekuilibrium, Kestabilan.

Abstract

This research will discuss the Eco-epidemiology model. In this model, there are three sub-populations which are interrelated, they are susceptible prey is x_S , infected prey is x_I and predator is y . This study aims to determine the formulation of Eco-epidemiology models with proportional harvesting on predators, knowing the equilibrium point and its stability and simulating the model numerically. The model obtained five equilibrium points, while the equilibrium point E_0 is a saddle point where this point is an unstable point and equilibrium points E_1, E_2, E_3, E_4 are stable points of local asymptotic with spiral type, with several conditions is suitable. At a stable point for an initial value that corresponds to a stable point regardless of the initial value, the solution curve will always go to the equilibrium point. Interior points are analyzed locally using the Routh-Hurwitz criterion because the characteristic root of the equilibrium point is a cubic equation, and shown a simulation to see the dynamic of the model around the equilibrium point by using the fourth order Runge-kutta method.

Keywords: Eco-epidemiological model, Proportional harvest, Equilibrium point, Stability.

1 Pendahuluan

Pemodelan matematika merupakan cabang ilmu matematika yang merepresentasikan atau menjelaskan masalah di kehidupan nyata kedalam bentuk matematika. Pemodelan matematika biasanya selalu dikaitkan dengan cabang ilmu yang lain seperti biologi, fisika, kesehatan, dan teknik [1].

Ekologi adalah ilmu yang mempelajari makhluk hidup dan interaksinya terhadap lingkungan maupun interaksi dengan sesama makhluk hidup [2]. Pada dasarnya model matematika dalam

bidang ekologi merupakan studi tentang keterkaitan antara spesies dan lingkungannya, dalam bidang-bidang seperti interaksi pemangsa dan persaingan. Salah satu model matematika dalam bidang ekologi adalah model *predator-prey*, pada tahun 1926 Voltera pertama kali mengusulkan model sederhana yaitu model Lotka-Voltera. Model Lotka-Voltera tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan *predator-prey* dalam kasus yang paling sederhana.

Model matematika dalam epidemik salah satunya adalah model SI, model SI yaitu model *Susceptible* dan *Infected*, model ini mengasumsikan bahwa populasi yang telah terinfeksi tidak akan kembali rentan atau sembuh. Modifikasi model bertujuan untuk membuat model yang ada menjadi lebih realistis atau mendekati fenomena yang terjadi.

Modifikasi yang dilakukan pada penelitian ini yaitu digunakan model *predator-prey* tipe Gause dan model epidemiologi bertipe SI, diasumsikan terjadi penyebaran penyakit pada kompartemen *prey* sehingga *prey* terbagi menjadi kompartemen populasi *prey* rentan dan *prey* terinfeksi, dengan menambahkan fungsi pemanenan pada persamaan dalam kompartemen *predator*. Hal ini bertujuan untuk mempertahankan keberlangsungan *prey* di alam, dengan menjaga atau mengontrol jumlah *predator* dengan pemanenan proporsional atau bergantung pada jumlah *predator* yang tersedia. Fungsi respon digunakan untuk menunjukkan perilaku pemangsaan *predator* terhadap *prey*. Model yang kompleks pada umumnya sulit atau tidak mungkin diselesaikan secara analitik sehingga diperlukan pendekatan secara numerik dengan simulasi.

2 Model Matematika

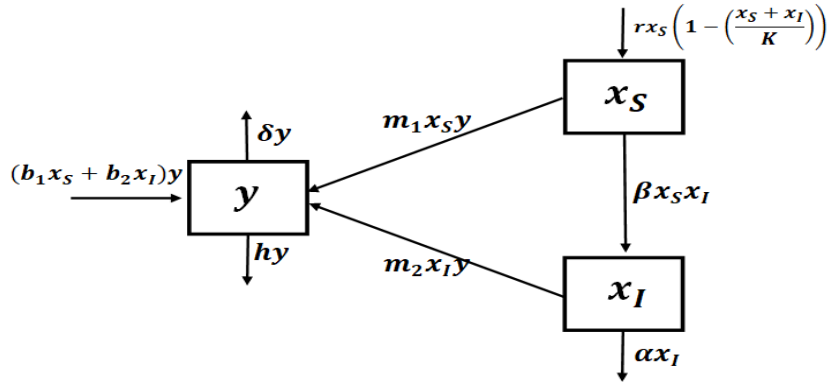
2.1 Asumsi

Asumsi-asumsi yang diberikan untuk model matematika *predator-prey* dengan penyebaran penyakit pada *prey* dan pemanenan proporsional pada *predator* sebagai berikut:

1. Dengan adanya penyakit pada *prey* menyebabkan *prey* terbagi atas 2 kompartemen yaitu kompartemen rentan atau x_S dan kompartemen terinfeksi atau x_I .
2. Populasi *prey* rentan tumbuh logistik dengan laju intrinsik pertumbuhan di misalkan r dan daya dukung lingkungan adalah K .
3. Diasumsikan bahwa penyakit ini menyebar hanya diantara populasi mangsa dan penyakit ini tidak diturunkan secara genetik, populasi yang terinfeksi tidak pulih atau menjadi kebal.
4. *Predator* diasumsikan dapat berinteraksi dengan kedua kompartemen *prey*.
5. Interaksi antara *prey* rentan dengan *prey* terinfeksi, diasumsikan bertambahnya jumlah populasi *prey* terinfeksi dan berkurang pada populasi *prey* rentan atau sakit.
6. Interaksi antara *prey* rentan dengan *predator* mengakibatkan bertambahnya jumlah populasi *predator* dan berkurangnya jumlah populasi *prey* rentan.
7. Diasumsikan interaksi antara *prey* terinfeksi dengan *predator* mengakibatkan bertambahnya jumlah populasi *predator* dan berkurangnya jumlah populasi *prey* terinfeksi.
8. Adanya kematian alami atas populasi *prey* rentan, *prey* terinfeksi dan *predator*.
9. Diasumsikan pemanenan bergantung pada rasio *predator* atau secara proporsional yaitu dengan melihat jumlah *predator* yang ada pada lingkup daerah tersebut.
10. Dibatasi dengan diabaikannya migrasi atau pengurangan populasi mangsa-pemangsa dari luar.
11. Fungsi respon yang digunakan adalah tipe I dimana tidak adanya perlawanan *prey* saat proses pemangsaan dan diabaikan waktu pencernaan *predator* saat mencerna *prey*.

2.2 Skema Model Matematika

Berdasarkan asumsi 2.1 diperoleh skema model matematika dapat dilihat pada Gambar 1



Gambar 1: Skema model Eko-epidemiologi

2.3 Model Matematika

Berdasarkan asumsi 2.1 dan skema pada Gambar 1 maka diperoleh model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_S}{dt} &= rx_S \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K} \right) - m_1 x_S y - \beta x_S x_I \\
 \frac{dx_I}{dt} &= \beta x_S x_I - \alpha x_I - m_2 x_I y \\
 \frac{dy}{dt} &= b_1 x_S y + b_2 x_I y - \delta y - hy
 \end{aligned} \tag{1}$$

Didefinisikan variabel dan parameter yang digunakan dalam model *predator-prey* dengan penyebaran penyakit pada *prey* dan pemanenan proporsional pada *predator* yang disajikan pada Tabel (1)

Tabel 1: Variabel dan parameter yang digunakan

Simbol	Definisi
$x_S(t)$	<i>Prey</i> rentan
$x_I(t)$	<i>Prey</i> terinfeksi
$y(t)$	<i>Predator</i>
r	Laju pertumbuhan intrinsik <i>prey</i> rentan
K	Daya dukung lingkungan
β	Laju perpindahan kompartemen <i>prey</i> rentan ke <i>prey</i> terinfeksi
m_1	Koefisien konversi <i>prey</i> rentan akibat adanya interaksi <i>predator</i> dengan <i>prey</i> rentan
m_2	Koefisien konversi <i>prey</i> terinfeksi akibat adanya interaksi <i>prey</i> terinfeksi dengan <i>prey</i> rentan
α	Kematian alami pada <i>prey</i> terinfeksi
b_1	Koefisien konversi pertumbuhan <i>predator</i> akibat adanya interaksi dengan <i>prey</i> rentan
b_2	Koefisien konversi pertumbuhan <i>predator</i> akibat adanya interaksi dengan <i>prey</i> terinfeksi
δ	Kematian alami <i>predator</i>
h	Pemanenan <i>predator</i> secara proporsional

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Analisis Kestabilan Model

1. Titik Ekuilibrium dari model.

Berdasarkan persamaan (1) untuk mencari titik ekuilibrium maka $\frac{dx_S}{dt} = 0$, $\frac{dx_I}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh lima titik ekuilibrium sebagai berikut:

- (a) Titik ekuilibrium kepunahan semua spesies.

$$E_0 = (0, 0, 0)$$

Karena $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$ maka, E_0 merupakan titik ekuilibrium.

- (b) Titik ekuilibrium kepunahan *prey* terinfeksi dan predator.

$$E_1 = (K, 0, 0)$$

Karena $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$ maka, E_1 merupakan titik ekuilibrium.

- (c) Titik ekuilibrium kepunahan *prey* terinfeksi.

$$E_2 = \left(\frac{\delta + h}{b_1}, 0, \frac{r \left(1 - \frac{\delta + h}{b_1 K} \right)}{m_1} \right)$$

Syarat $E_2 \in \mathbb{R}_+^3$ adalah

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\delta + h}{b_1 K} &> 0 \\ 1 &> \frac{\delta + h}{b_1 K} \\ b_1 K &> \delta + h \\ h &< b_1 K - \delta \end{aligned}$$

(d) Titik ekuilibrium kepunahan *predator*.

$$E_3 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{r(\beta k - \alpha)}{\beta(r + \beta k)}, 0 \right)$$

Syarat $E_3 \in \mathbb{R}_+^3$ adalah

$$\begin{aligned} \beta K - \alpha &> 0 \\ \beta K &> \alpha \\ \alpha &< \beta K \end{aligned}$$

(e) Titik ekuilibrium keberadaan semua spesies.

$$E_4 = \left(x_S^*, \frac{\delta + h - b_1 x_S^*}{b_2}, \frac{\beta x_S^* - \alpha}{m_2} \right)$$

$$\text{Dimana } x_S^* = \frac{r m_2 (\delta + h) + K m_2 \beta (\delta + h) - (r k b_2 m_2 + K b_2 m_2 \alpha)}{r b_1 m_2 + K m_2 b_1 - (r b_2 m_2 + K b_2 m_1 \beta)}$$

Syarat $E_4 \in \mathbb{R}_+^3$ adalah Jika $x_S^* > 0$

$$\begin{aligned} \text{dan } \delta + h - b_1 x_S^* &> 0 & \text{ dan } \beta x_S^* - \alpha &> 0 \\ x_S^* &< \frac{\delta + h}{b_1} & x_S^* &> \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} &< x_S^* & &< \frac{\delta + h}{b_1} \end{aligned}$$

2. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

$$\frac{dx_S}{dt} = r x_S \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K} \right) - m_1 x_S y - \beta x_S x_I = f_1$$

$$\frac{dx_I}{dt} = \beta x_S x_I - \alpha x_I - m_2 x_I y = f_2 ,$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 x_S y + b_2 x_I y - \delta y - h y = f_3$$

Dari persamaan diatas dapat diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_S} & \frac{\partial f_1}{\partial x_I} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_S} & \frac{\partial f_2}{\partial x_I} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_S} & \frac{\partial f_3}{\partial x_I} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dari persamaan (4.2) maka diperoleh matriks Jacobi untuk sistem persamaan sebagai berikut:

$$J(x_S, x_I, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx_S}{K} - \frac{rx_I}{K} - m_1y - \beta x_I & -\frac{rx_S}{K} - \beta x_S & -m_1x_S \\ \beta x_I & \beta x_S - \alpha - m_2y & -m_2x_S \\ b_1y & b_2y & b_1x_S + b_2x_I - \delta - h \end{pmatrix} \quad (3)$$

(a) Matriks Jacobi untuk titik ekuilibrium $E_0 = (0, 0, 0)$ adalah

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\delta - h \end{pmatrix} \quad (4)$$

Matriks $J(E_0)$ diperoleh dari substitusi nilai E_0 ke matriks (4.3). (Lihat lampiran 2)

Sehingga diperoleh, nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = r \text{ atau } \lambda_2 = -\alpha \text{ atau } \lambda_3 = -\delta - h$$

Oleh karena λ_1 bernilai positif dan λ_2 dan λ_3 bernilai negatif, dapat disimpulkan E_0 merupakan titik saddle. Dimana perilaku solusi untuk tipe saddle memperlihatkan bahwa untuk nilai awal yang bersesuaian kurva solusi akan bergerak menuju titik ekuilibrium dan saat mendekati titik ekuilibrium kurva solusi akan menjauh.

(b) Matriks Jacobi untuk titik ekuilibrium $E_1 = (K, 0, 0)$ adalah

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r & -K\beta - r & -m_1K \\ 0 & K\beta - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & Kb_1 - \delta - h \end{pmatrix} \quad (5)$$

Matriks $J(E_1)$ diperoleh dari substitusi nilai E_1 ke matriks (4.3). (Lihat lampiran 3)

Sehingga diperoleh, nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -r \text{ atau } \lambda_2 = K\beta - \alpha \text{ atau } \lambda_3 = Kb_1 - \delta - h$$

(a) $\lambda_2 < 0$ apabila memenuhi:

$$\begin{aligned} K\beta - \alpha &< 0 \\ K\beta &< \frac{\alpha}{\beta} \\ 0 < K &< \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

(b) $\lambda_3 < 0$ apabila memenuhi:

$$\begin{aligned} Kb_1 - \delta - h &< 0 \\ Kb_1 &< \frac{\delta + h}{b_1} \\ 0 < K &< \frac{\delta + h}{b_1} \end{aligned}$$

Dari (a) dan (b) maka dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium E_1 stabil jika $K < \min \left\{ \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\delta + h}{b_1} \right\}$.

(c) Matriks Jacobi untuk titik ekuilibrium $E_2 = \left(\frac{\delta + h}{b_1}, 0, r \left(1 - \frac{\delta + h}{b_1 K} \right) \right)$ adalah

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{r(\delta + h)}{b_1 k} & -\frac{(\delta + h)(K\beta + r)}{Kb_1} & -\frac{m_1(\delta + h)}{b_1} \\ 0 & -\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{Km_1 b_1} \right) & 0 \\ \frac{r(Kb_1 - \delta - h)}{Km_1} & \frac{r(Kb_1 - \delta - h)b_2}{Km_1 b_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

dengan :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= K\alpha b_1 + Krb_1 m_2 \\ \eta_2 &= K\beta\delta m_1 + K\beta m_1 h + \delta r m_2 + h r m_2 \end{aligned}$$

Matriks $J(E_2)$ diperoleh dari substitusi nilai E_2 ke matriks (4.3). (Lihat lampiran 4) Sehingga diperoleh, nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{Km_1 b_1} \right) \text{ atau } \lambda_2 = \frac{-\frac{r(\delta + h)}{b_1 K} + \sqrt{D_1}}{2} \text{ atau } \lambda_3 = \frac{-\frac{r(\delta + h)}{b_1 K} - \sqrt{D_1}}{2}$$

dimana:

$$D_1 = \left(\frac{r(\delta + h)}{Kb_1} \right)^2 - 4 \left(\frac{r(\delta + h)(Kb_1 - (\delta + h))}{Kb_1} \right)$$

(a) $\lambda_1 < 0$ apabila memenuhi:

$$\begin{aligned} 0 &< \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 &> \eta_2 \\ 0 &< \eta_2 < \eta_1 \end{aligned}$$

(b) $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ apabila memenuhi:

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{r(\delta + h)}{Kb_1} + \sqrt{D_1}}{2} &< 0 \\ \frac{-\frac{r(\delta + h)}{Kb_1} + \sqrt{D_1}}{2} &< 0 \\ -r(\delta + h) + Kb_1\sqrt{D_1} &< 0 \\ Kb_1\sqrt{D_1} &< r(\delta + h) \\ \sqrt{D_1} &< \frac{r(\delta + h)}{Kb_1} \\ D_1 &< \left(\frac{r(\delta + h)}{Kb_1} \right)^2 \end{aligned}$$

- $D_1 < 0$, dalam kondisi ini mengakibatkan $\sqrt{D_1}$ bernilai imajiner, jika hal ini terjadi maka sesuai dengan prinsip kestabilan titik ekuilibrium bahwa yang perlu diperhatikan hanyalah bagian riil dari nilai eigen tersebut.
- $D_1 \geq 0$ apabila nilai $\left(\frac{r(\delta + h)}{Kb_1} \right)^2 > 4 \left(\frac{r(\delta + h)(Kb_1 - (\delta + h))}{Kb_1} \right)$, karena nilai $\left(\frac{r(\delta + h)}{Kb_1} \right)^2$ pasti bernilai positif, sehingga $D_1 \geq 0$ bernilai positif

apabila $Kb_1 - \delta - h$ juga positif

$$\begin{aligned} Kb_1 - \delta - h &> 0 \\ Kb_1 &> \delta + h \\ K &> \frac{\delta + h}{b_1} \end{aligned}$$

Dari pembuktian diatas dapat dinyatakan bahwa E_2 merupakan titik yang stabil asimtotik lokal atau *sink*.

(d) Matriks jacobii untuk titik ekuilibrium $E_3 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{r(\beta k - \alpha)}{\beta(r + \beta k)}, 0 \right)$ adalah

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} -\frac{r\alpha}{\beta K} & -\frac{\alpha(K\beta + r)}{K\beta} & -\frac{m_1\alpha}{\beta} \\ \frac{r(K\beta - \alpha)}{K\beta + r} & 0 & -\frac{r(K\beta - \alpha)m_2}{\beta(K\beta + r)} \\ 0 & 0 & \frac{\xi_1 - \xi_2}{\beta(K\beta + r)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

dengan :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= K\alpha b_1\beta + \alpha r b_1 + K\beta b_2 r \\ \xi_2 &= K\beta^2\delta + K\beta^2 r b_2 + \alpha r b_2 + \beta\delta r + \beta h r \end{aligned}$$

Matriks $J(E_3)$ diperoleh dari substitusi nilai E_3 ke matriks (4.3). (Lihat lampiran 5)

Sehingga diperoleh, nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\beta(K\beta + r)} \text{ atau } \lambda_2 = \frac{-\frac{r\alpha}{\beta K} + \sqrt{D_2}}{2} \text{ atau } \lambda_3 = \frac{-\frac{r\alpha}{\beta K} - \sqrt{D_2}}{2}$$

dimana:

$$D_2 = \left(\frac{r\alpha}{\beta K} \right)^2 - 4 \left(\frac{\alpha r(K\beta + r(K\beta - \alpha))}{K\beta(K\beta + r)} \right)$$

(a) $\lambda_1 < 0$ apabila memenuhi:

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &< 0 \\ \xi_1 &< \xi_2 \\ 0 < \xi_1 &< \xi_2 \end{aligned}$$

(b) $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ apabila memenuhi:

$$\begin{aligned} -\frac{r\alpha}{\beta K} + \sqrt{D_2} &< 0 \\ -\frac{r\alpha}{\beta K} - \sqrt{D_2} &< 0 \\ -r\alpha + \beta K\sqrt{D_2} &< 0 \\ \beta K\sqrt{D_1} &< \frac{r\alpha}{\alpha K} \\ \sqrt{D_1} &< \frac{r\alpha}{\alpha K} \\ D_1 &< \left(\frac{r\alpha}{\alpha K} \right)^2 \end{aligned}$$

- $D_2 < 0$, dalam kondisi ini mengakibatkan $\sqrt{D_2}$ bernilai imajiner, jika hal ini terjadi maka sesuai dengan prinsip kestabilan titik ekuilibrium bahwa yang perlu diperhatikan hanyalah bagian riil dari nilai eigen tersebut.
- $D_2 \geq 0$ apabila nilai $\left(\frac{r\alpha}{\beta K} \right)^2 > 4 \left(\frac{\alpha r(K\beta + r(K\beta - \alpha))}{K\beta(K\beta + r)} \right)$, karena nilai

$\left(\frac{r\alpha}{\beta K}\right)^2$ pasti bernilai positif, sehingga $D_2 \geq 0$ bernilai positif apabila $K\beta - \alpha$ juga positif

$$\begin{array}{rcl} K\beta - \alpha & > & 0 \\ K\beta & > & \alpha \\ K & > & \frac{\alpha}{\beta} > 0 \\ 0 & < & \frac{\alpha}{\beta} < K \end{array}$$

Dari pembuktian diatas dapat dinyatakan bahwa E_3 merupakan titik yang stabil asimtotik lokal atau *sink*.

(e) Matriks jacobii untuk titik ekuilibrium $E_4 = \left(x_S^*, \frac{\delta + h - b_1 x_S^*}{b_2}, \frac{\beta x_S^* - \alpha}{m_2}\right)$ dapat dibentuk menjadi

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} -\frac{rx_S^*}{K} & -\frac{x_S^*}{K}(r + \beta K) & -m_1 x_S^* \\ \frac{\beta(\delta + h - b_1 x_S^*)}{b_2} & 0 & -\frac{m_2(\delta + h - b_1 x_S^*)}{b_2} \\ \frac{b_1(\beta x_S^* - \alpha)}{m_2} & \frac{b_2(\beta x_S^* - \alpha)}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

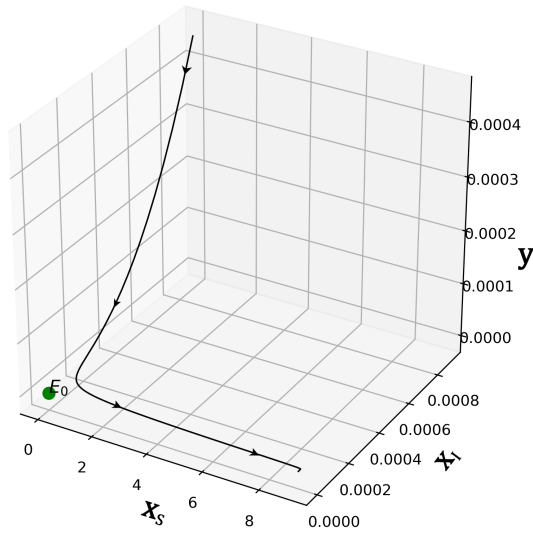
Untuk memenuhi syarat kestabilan dari suatu titik ekuilibrium, setiap akar-akar karakteristik harus bernilai negatif atau memiliki bagian riil negatif. Pada $J(E_4)$ diperoleh akar-akar karakteristik kubik yang sulit difaktorkan sehingga menggunakan Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz dalam penentuan stabilitas titik ekuilibrium.

4 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi dengan mengambil beberapa nilai parameter yang diperlukan dalam model Eko-epidemiologi dengan pemanenan proporsional pada *predator*. Tujuan yang ingin dicapai adalah melihat bagaimana perilaku solusi numerik terhadap titik ekuilibrium yang ada. Dengan mempertimbangkan nilai parameter dari titik-titik ekuilibrium E_0, E_1, E_2, E_3 dan E_4 yang berbeda serta memilih nilai awal yang sesuai dapat memperlihatkan perilaku dari setiap kompartemen populasi.

4.1 Simulasi 1

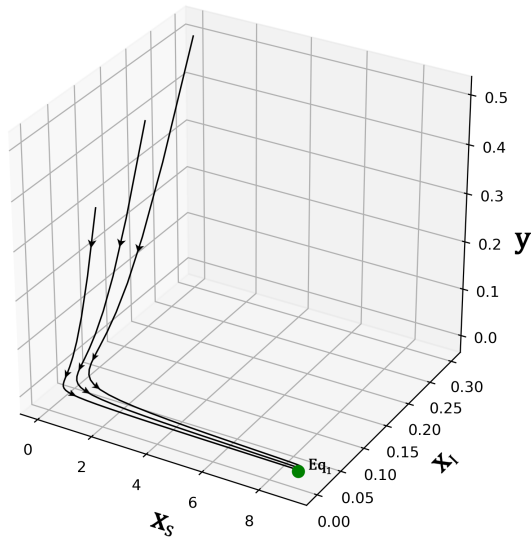
Parameter yang digunakan $r = 8, m_1 = 4, \beta = 0.4, m_2 = 6, \alpha = 4, b_1 = 1, b_2 = 1, \delta = 8, h = 5.5$ dan $K = 9$. Gambar 4.1 memperlihatkan bahwa titik E_0 adalah titik saddle, yang merupakan titik yang tidak stabil, dengan nilai awal $x_S = 0.001, x_I = 0.002$ dan $y = 0.003$. Solusi titik ini mendekati menuju titik ekuilibrium namun saat mendekati titik, solusi kurva kemudian menjauhi titik, yang artinya masing-masing populasi pada titik ekuilibrium ini tidak stabil.



Gambar 2: Titik ekuilibrium E_0

4.2 Simulasi 2

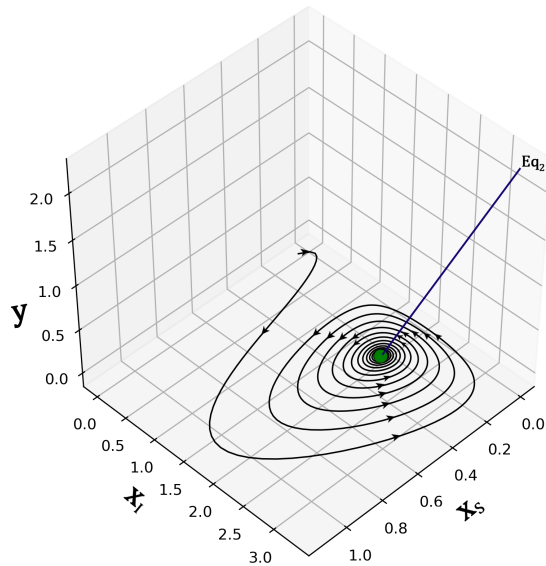
Parameter yang digunakan $r = 8, m_1 = 4, \beta = 0.4, m_2 = 6, \alpha = 4, b_1 = 1, b_2 = 1, \delta = 8, h = 5.5$ dan $K = 9$. Gambar 4.2 memperlihatkan bahwa titik E_1 merupakan titik ekuilibrium stabil asimtotik. Dari 3 nilai awal yang berbeda, untuk nilai awal pertama yaitu $x_S = 0.01, x_I = 0.1$ dan $y = 0.3$, nilai awal kedua yaitu $x_S = 0.02, x_I = 0.2$ dan $y = 0.4$ nilai awal ketiga yaitu $x_S = 0.03, x_I = 0.3$ dan $y = 0.5$ kurva solusi tetap mendekati menuju titik E_1 . Dapat dilihat pada plot bahwa untuk parameter dan nilai awal yang tepat dan sesuai dengan syarat eksistensi dan kestabilan pada analitiknya, kurva solusi akan selalu menuju titik ekuilibrium. Seperti pada rujukan teori yang menjelaskan bahwa titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang artinya jika kurva solusi mendekati atau bergerak menuju titik tetap dapat diartikan bahwa untuk setiap populasi akan stabil dititik tersebut dan tidak akan terjadi kepunahan pada masing-masing populasi.



Gambar 3: Titik ekuilibrium E_1

4.3 Simulasi 3

Parameter yang digunakan $r = 9, m_1 = 3.5, \beta = 3.5, m_2 = 3.5, \alpha = 1, b_1 = 1.5, b_2 = 2.5, \delta = 1.5, h = 1$ dan $K = 12$. Gambar 4.2 memperlihatkan bahwa titik E_2 merupakan titik ekuilibrium stabil asimtotik. Kurva solusi dengan nilai awal $x_S = 0.1, x_I = 1.1$ dan $y = 4.2$ mendekati titik ekuilibrium E_2 . Dapat dilihat pada plot bahwa untuk parameter dan nilai awal yang tepat dan sesuai dengan syarat eksistensi dan kestabilan pada analitiknya, kurva solusi akan selalu menuju titik ekuilibrium. Seperti pada rujukan teori yang menjelaskan bahwa titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang artinya jika kurva solusi mendekati atau bergerak menuju titik tetap dapat diartikan bahwa untuk setiap populasi akan stabil dititik tersebut dan tidak akan terjadi kepunahan pada masing-masing populasi.



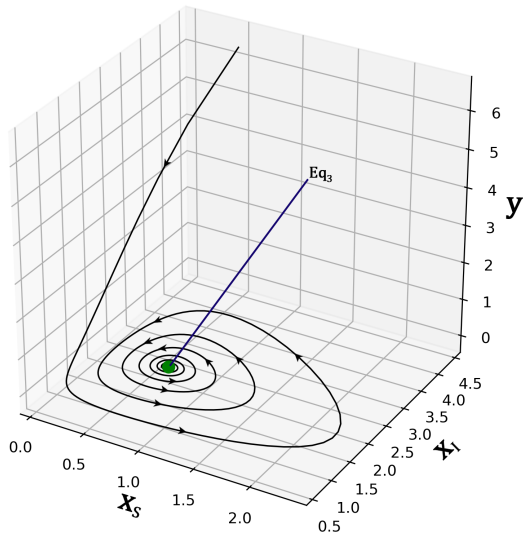
Gambar 4: Titik Ekuilibrium E_2

Interpretasi Biologis

Pada simulasi telah dapat digambarkan bagaimana kestabilan dan pendekatan numerik dari model yang diteliti. Titik ekuilibrium E_2 dapat dilihat bahwa populasi akan stabil apabila untuk nilai $\eta_1 > \eta_2$, untuk $D_1 < 0$ atau $D_1 \geq 0$ dan apabila kematian alami *predator* dan pemanenan *predator* bernilai lebih besar dari jumlah konversi pertumbuhan *predator* akibat adanya interaksi dengan *prey* rentan dengan daya tampung lingkungan yang lebih besar mengakibatkan kepunahan pada *prey* terinfeksi.

4.4 Simulasi 4

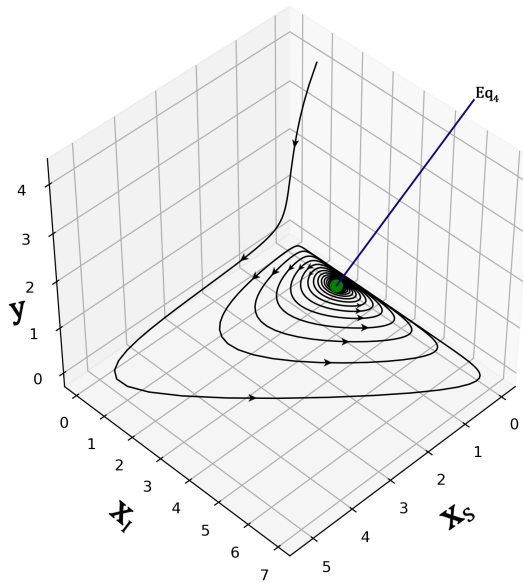
Parameter yang digunakan $r = 9, m_1 = 3.5, \beta = 3.2, m_2 = 1.5, \alpha = 2.198, b_1 = 1.5, b_2 = 2.5, \delta = 3.5, h = 1.5$ dan $K = 9$. Dari gambar diatas terlihat bahwa dengan nilai awal yang berbeda yaitu $x_S = 0.5, x_I = 4.39$ dan $y = 6.4$ solusi akan selalu mendekati titik ekuilibrium. Dapat dilihat pada plot bahwa untuk parameter dan nilai awal yang tepat dan sesuai dengan syarat eksistensi dan kestabilan pada analitikanya, kurva solusi akan selalu menuju titik ekuilibrium. Seperti pada rujukan teori yang menjelaskan bahwa titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang artinya jika kurva solusi mendekati atau bergerak menuju titik tetap dapat diartikan bahwa untuk setiap populasi akan stabil dititik tersebut dan tidak akan terjadi kepunahan pada masing-masing populasi.



Gambar 5: Titik ekuilibrium E_3

4.5 Simulasi 5

Parameter yang digunakan $r = 9, m_1 = 3.5, \beta = 3.5, m_2 = 3.5, \alpha = 1, b_1 = 1.62, b_2 = 3.5, \delta = 2.5, h = 1.5$ dan $K = 14$. Titik interior dari model ini adalah titik yang stabil asimtotik, dapat dilihat pada plot bahwa untuk parameter dan nilai awal yang tepat dan sesuai dengan syarat eksistensi dan kestabilan pada analitiknya, kurva solusi akan selalu menuju titik ekuilibrium. Seperti pada rujukan teori yang menjelaskan bahwa titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang artinya jika kurva solusi mendekati atau bergerak menuju titik tetap dapat diartikan bahwa untuk setiap populasi akan stabil dititik tersebut dan tidak akan terjadi kepunahan pada masing-masing populasi.



Gambar 6: Titik ekuilibrium E_4

5 Kesimpulan

Dari hasil penelitian pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika yang dihasilkan berupa sistem persamaan diferensial *non-linear* seperti yang ditunjukkan pada persamaan (4.1).
2. Berdasarkan model matematika, terdapat 5 titik ekuilibrium. Dari analisis yang dilakukan titik ekuilibrium E_0 merupakan titik yang tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium E_1, E_2, E_3 dan E_4 adalah titik yang stabil dengan beberapa syarat kestabilan.
3. Berdasarkan simulasi numerik dapat dilihat bahwa titik ekuilibrium E_0 merupakan titik yang tidak stabil bertipe saddle dan titik E_1, E_2, E_3 dan E_4 adalah titik stabil bertipe asimtotik lokal.
4. Pada kondisi-kondisi tertentu masing-masing populasi akan saling terpengaruh jumlahnya, seperti adanya kepunahan *prey* terinfeksi apabila jumlah pemanenan dan kematian alami *predator* lebih tinggi dari laju konversi pertumbuhan *predator* akibat adanya interaksi dengan *prey* rentan.

Referensi

- [1] Anton, H. 2004. *Aljabar Linear Elementer*, Erlangga, Jakarta

- [2] Boyce, William, R. Diprima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons. USA
- [3] Brauer, F., C. Castillo-Chavez. 2012. *Mathematical Model in Population Biology and Epidemiology*, Springer Science+Business Media. New York
- [4] Dawes, J.H.P, M.O., Souza. 2013. *A Derivation of Holling's Type I, II, and III Functional Responses in Predator-Prey Systems*, Journal of Theoretical Biology 327(2013):11-22
- [5] Finizio, N., G. Ladas. 1984. *An Introduction to Differential Equations*, Wadsworth, Inc. USA
- [6] Kant, Shashi, V. Kumar. 2016. *Stability Analysis of Predator-Prey System with Migrating Prey and Disease Infection in Both Species*, Applied Mathematical Modelling 42(2017):509-539
- [7] Keshet, Leah, Edelstein. 2005. *Mathematical Models in Biology*, Society for Industrial and Applied Mathematics. New York
- [8] Luenberger, D. 1979. *Introduction to Dynamic Systems Theory, Models, and Applications*, John Wiley and Sons, Inc. United States of America
- [9] Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology : I. An Introduction, Third Edition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York
- [10] Mu'tamar, K., dan Zulkarnain. 2017. *Model Predator-prey dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan pada Populasi Mangsa*, Jurnal Sains, Teknologi dan Industri. 15:1
- [11] Kot, M. 2001. *Elements of Mathematical Ecology*. New York, Cambridge University Press
- [12] Nasell, Ingemar. 2011. *Extinction and Quasistationarity in The Stochastic Logistic SIS Model*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York
- [13] Pastor, J. 2008. *Mathematical Ecology of Populations and Ecosystems*, John Wiley and Sons. UK
- [14] Perko, L. 2001. *Differential Equation and Dynamical System*, Springer-Verlag. New York
- [15] Purnomo, Anna, I. Darti, dan A. Suryanto. 2017. *Dynamics of Eco-Epidemiological Model with Harvesting*, American Institute of Physics, doi.org/10.1063/1.5016652
- [16] Reece, Jane B., Lisa A. Urry, Michael L. Chain, Seteven A. Wasserman, Peter V. Minorsky, dan Robert B. Jackson. 2011. *Campbell Biology*, San Fransisco, Pearson Education, Inc.
- [17] Suryanto, A. 2017. *Metode Numerik Untuk Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya dengan Matlab*, Universitas Negeri Malang. Malang
- [18] Upadhyay, R.K., dan S. R. K. Iyengar. 2014. *Introduction to Mathematical Modeling and Chaotic Dynamics*, Taylor and Francis Group. US