**BAB V**

**MATERI MATEMATIKA**

1. **Sejarah dan Filsafat Matematika**
2. **TUJUAN**

Setelah mempelajari materi ini peserta diharapkan dapat:

1. Memahami perkembangan filsafat Matematika (SMP/SMA/SMK)
2. Menjelaskan proses penemuan rumus barisan atau deret (SMP)
3. **URAIAN MATERI**

Perkembangan Teknologi Informasi dan Komunikasi (TIK) sangat membantu pekerjaan manusia di berbagai bidang termasuk pendidkan. Dengan adanya TIK guru akan terbantu dalam mengerjakan tugas-tugasnya seperti membuat perencanaan pembelajaran, melaksanakan pembelajaran, mengevaluasi hasil pembelajaran, hingga menindaklanjuti hasil pembelajaran. Dalam perencanaan pembelajaran guru dapat memperkaya materi yang akan disampaikan dengan mencari informasi dengan bantuan internet. Pada saat pelaksanaan pembelajaran, guru dapat menggunakan komputer dan perangkatnya sebagai media sehingga materi pelajaran dapat disajikan dengan lebih menarik.Agar dalam mengevaluasi hasil pembelajaran lebih cepat dan tepat guru dapat memanfaatkan program-program yang ada di komputer.

Walaupun peran TIK dalam pembelajaran cukup besar namun peran guru tidak dapat digantikan.Oleh karena itu guru hendaknya menguasai TIK agar dapat menjalankan tugas-tugasnya dengan mudah dan cepat namun tetap dapat mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan. Guru tidak harus mempelajari semua program komputer namun cukuplah beberapa aplikasi dasar seperti pengolah kata, pengolah angka, penyajian presentasi, dan penggunaan internet.

* 1. **Mengapa guru perlu Memahami Filsafat dan Sejarah Matematika**

Filsafat matematika dan sejarah matematika merupakan materi yang tidak populer di kalangan matematikawan maupun guru matematika. Membicarakan keduanya dianggap menghabiskan waktu, sia-sia, dan tidak berguna. Anggapan umum mempelajari filsafat matematika tidak diperlukan karena dengan mempelajari cabang-cabang matematika, seperti teori bilangan, aljabar, kalkulus, statistik, maupun kombinatorik secara tidak langsung telah mempelajari apa sesungguhnya matematika itu.

Kesulitan-kesulitan dan permasalahan-permasalahan dalam belajar matematika lebih karena kelemahan-kelemahan terhadap konsep-konsep prasyarat, kerumitan pemahaman prinsip-prinsip atau dalil-dalil tertentu, dan kelemahan terhadap logika struktur matematika yang ketat (rigor). Bukan dipengaruhi kelemahan terhadap filsafat matematika. Dengan demikian yang dipelajari atau diperlukan hanya aspek-aspek pragmatis matematika bukan hal-hal yang filosofis maupun sejarah.

Anggapan berikutnya tuntutan mempelajari filsafat dan sejarah matematika tidak tercantum dalam struktur kurikulum tingkat sekolah dasar, menengah, maupun perguruan tinggi. Di perguruan tinggi seandainya terdapat matakuliah tersebut hanya merupakan mata kuliah pilihan saja. Padahal kalau direnungkan kembali terutama bagi guru matematika dengan mempelajari kedua tema tersebut akan memberikan kepuasan tersendiri.

Dengan mengenal dan memahami filsafat matematika paling tidak memperoleh manfaat sebagai berikut.

1. Menambah keyakinan bagi guru bahwa memahami matematika tidak sekedar aspek-aspek pragmatisnya saja, tetapi filosofis. Pandangan guru terhadap apa sebenarnya matematika akan memberi dampak bagaimana seharusnya matematika dipelajari dan diajarkan, serta bagaimana cara mengajarkannya.

Hubungan keyakinan antara matematika dan pengajaran serta pembelajarannya dijelaskan Goos,et.al (2007) berikut.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  **Keyakinan terhadap Matematika** | **Keyakinan terhadap pengajaran matematika** | **Keyakinan terhadap pembelajaran matematika** |
| Instrumentalis: Matematika sebagai suatu seperangkat alat dari fakta-fakta, aturan-aturan, dan keterampilan keterampilan | Menfokuskan isi dengan penekanan pada kinerja | Ketuntasan keterampilan, penerimaan yang pasif terhadap pengetahuan |
| Platonis: Matematika sebagai suatu bodi statis yang absolut dan pengetahuan yang pasti dan abstrak. | Menfokuskan isi dengan menekankan pada pemahaman | Konstruksi aktif dari pemahaman |
| Pemecahan masalah: Matematika sebagai sesuatu yang dinamis dan hasil kreasi manusia | Menfokuskan pada pebelajar | Eksplorasi otonom dari keinginan/minat sendiri. |

1. Memberi apresiasi terhadap perkembangan dan pemikiran-pemikiran dalam matematika. Mempelajari apa sebenarnya matematika merupakan apresiasi terhadap matematika sebagai buah budi dan karya manusia dari tahun ke tahun, maupundari peradaban ke peradaban. Manfaat matematika di zaman teknologi dan informasi saat ini berkembang adalah akibat perbedaan-perbedaan pandangan ahli masa lalu. Matematika adalah peradaban universal yang tidak diperuntukkan suatu kelompok atau masa tertentu.
2. Perjalanan pemikiran hakiki manusia tentang matematika dapat memberi inspirasi untuk memunculkan ide-ide kreatif membngun matematika yang lebih berguna dan menopang kehidupan manusia. Matematika mungkin dipandang sebagai objek yang lepas dari realitas hanya ide-ide abstrak dalam pemikiran. Tetapi kondisi demikian dan dengan kebebasan kerja pikir manusia yang tak terbatas memungkinkan inspirasi-inspirasi berbeda berkembang. Inspirasi tidak lazim seperti ide-ide geometri Non Euclid maupun Zadeh tentang logika dan himpunan kabur (Fuzzy) menjadi suatu keniscayaan.

 Sedang mempelajari sejarah matematika, menurut Panasuk & Horton (2012) akan memberikan manfaat, yaitu (1) sejarah memberikan suatu latar belakang untuk mendapatkan pemahaman yang mendalam tentang evolusi konsep-konsep matematika, (2) memahami tentang bagaimana dan mengapa konsep-konsep dasar dikembangkan melalui kerja keras bertahun-tahun dapat memberi kesempatan melacak perkembangan intelektual manusia, serta melihat bahwa matematika ditempatkan sebagai aspek praktis yang membantu manusia, (3) mempelajari sejarah dapat meningkatkan minat siswa dan memberi pengaruh sikap positif terhadap matematika.Sedang Swetz (dalam Panasuk & Horton, 2012) mengatakan bahwa sejarah matematika memberikan bantuan manusia mencari akar-akar dan landasan konsep-konsep tertentu. Hal tersebut menghubungkan matematika dengan manusia dan kebutuhannya, sehingga konsep-konsep tersebut tampak manusiasi bukan hal yang mistik.

 Dalam pembelajaran matematika di kelas, sejarah matematika dapat berperan sebagai motivasi dan menarik minat siswa mempelajari konsep tertentu. Guru yang mengajar dengan menceritakan sejarah dari suatu konsep memungkinkan memberi dampak positif bagi siswa. Sejarah juga dapat menjadi sumber dalam membangun konsep tertentu. Sejarah dijadikan tema yang memungkin siswa melakukan aktifitas-aktifitas sehingga seakan menemukan konsep itu kembali. Selain itu, sejarah matematika dapat menjadi tema-tema untuk latihan-latihan penguatan suatu konsep dan pemecahan masalah, karena banyak ide-ide penyelesaian yang saat ini tidak populer atau tidak digunakan lagi.

**2.2 Apakah Filsafat itu**

Filsafat merupakan suatu ilmu yang sudah lama berkembang, bahkan sebelum munculnya ilmu itu sendiri. Filsafat membahas ilmu itu sendiri. Awalnya, filsafat itu menelaah semua cabang pengetahuan, namun dengan berkembangnya pengetahuan ilmiah manusia, maka cabang-cabang pengetahuan itu memisahkan sendiri menjadi bidang-bidang yang terpisah, seperti ilmu kedokteran, hukum, matematika, fisika, biologi, kimia, atau ekonomi.

Filsafat dikatakan “the great mother of sciences” , seperti disebutkan Francis Bacon seorang filsuf zaman Ranaissance dari Inggris (The, 1999). Dengan demikian semua ilmu termasuk matematika asal usulnya dianggap merupakan bagian dari filsafat. Pendapat berbeda mengatakan bahwa geometri sebagai cabang dari matematika berkembang bersamaan dengan filsafat atau dikatakan “the twin sisters (saudara kembar)”. Keduanya lahir dari pikiran Thales (640-546 sebelum Masehi) di Miletus sekarang pantai barat negara Turki (The, 1999).

Filsafat merupakan suatu kajian yang umum terhadap masalah-masalah mendasar, seperti hal-hal yang berkaitan dengan eksistensi, pengetahuan, nilai-nilai, alasan-alasan, pemikiran, dan bahasa. Filsafat membahas permasalahan-permasalahan dengan telaah kritis menggunakan pendekatan umum yang sistematik, dan berdasar argumen-argumen rasional. Kata “Filsafat” atau *philosophy* dari Bahasa Yunani, yaitu φιλοσοφία (*philosophia*), yang berarti “mencintai kebijaksanaan atau kearifan”.

Pertanyaan “apakah filsafat itu?” merupakan pertanyaan filsafati yang tidak ada kesatuan atau bahkan bertentangan satu sama lain dalam jawabannya (The, 2004). Setiap filsuf terkemuka dan sesuai aliran filsafatnya memberikan definisi yang berlainan sesuai dengan aspek-aspek yang menjadi pusat kajiannya. Misalkan seorang filsuf yang berpandangan dunia akan menyatakan filsafat adalah suatu pemikiran rasional tentang pandangan dunia dalam kehidupan manusia. Sedang filsuf yang menitikberatkan pada segi bahasa akan menegaskan bahwa filsafat adalah analisis kebahasaan untuk mencapai kejelasan makna dari kata-kata dan konsep-konsep.

Filsafat atau *philosophy* berasal dari akar kata philos (philia, cinta) dan sophia (kearifan) yang berarti cinta kearifan. Kata *philosophia* dikemukakan awalnya oleh Phytagoras (572-497 sebelum masehi) dan dia menyebut dirinya sebagai “philosophos” (pecinta kearifan). Kearifan sesungguhnya hanyalah dimiliki oleh Tuhan, sehingga dia menyatakan sebagai pecinta kearifan, bukanlah orang yang arif. Phytagoras mengembangkan aliran filsafat Phytagoreanisme yang bersifat metafisik dengan mengatakan bahwa bilangan merupakan intisari dari semua benda maupun dasar pokok sifat-sifat benda. Gejala-gejala alam merupakan pengungkapan inderawi dari perbandingan-perbandingan matematik. Dalilnya berbunyi “bilangan mengatur jagad raya (number rules the universe)”.

Aliran filsafat alam semesta diungkapkan oleh Thales (640-546 sebelum Masehi) mengatakan filsafat adalah suatu penelaahan terhadap alam semesta untuk mengetahui asal mulanya, unsur-unsurnya, dan kaidah-kaidahnya. Socrates (469-399 sebelum Masehi) seorang filsuf moral mengatakan filsafat adalah suatu peninjauan diri yang bersifat reflektif atau perenungan terhadap asas-asa kehidupan yang adil dan bahagia. Menurutnya pengetahuan adalah kebajikan dan kebajukan adalah kebahagiaan. Plato (427-347 sebelum Masehi) mengubah pandangan pengertian kearifan (sophia) yang bersifat praktis menjadi pemahaman intelektual. Dalam karyanya “*Republic*” menegaskan bahwa filsuf adalah pencinta pandangan tentang kebenaran (*vision of truth*). Filsafat dikatakan sebagai pencarian yang bersifat spekulatif atau perekaan terhadap pandangan tentang kebenaran. Filsafat Plato digolongkan sebagai filsafat spekulatif. Aristoteles (384-322 sebelum Masehi) mengatakan kearifan merupakan kebajikan tertinggi dan philosophia merupakan padanan dari “episteme”, yaitu suatu kumpulan teratur pengetahuan rasional mengenai sesuatu objek yang sesuai. Dia memberi definisi terhadap prote philosophia (filsafat pertama) sebagai ilmu tentang asas-asas pertama dan sebagai suatu ilmu yang menyelediki keberadaan sebagai keberadaan dan ciri-ciri yang tergolong pada objek itu berdasarkan sifat alaminya.

Aliran filsafat Stoicisme berdasar pada suatu sistem etika untuk mencapai kebahagiaan dalam diri masing-masing orang dengan mengusahakan keselarasan antara manusia dan alam semesta. Keselaran tersebut tercapai jika hidup sesuai alam, yaitu mengikuti petunjuk akal dan hukum alam dari “logos”. Dalam pandangan ini, filsafat adalah suatu pencarian terhadap asas-asas rasional yang mempertalikan alam semesta dan kehidupan manusia dalam suatu kebulatan tunggal yang logis. Tokoh filsafat ini adalah Cicero seorang filsuf Romawi Kuno. Dalam bukunya “De Natura Deorum” dikatakan filsafat adalah ibu dari semua pengetahuan dan filsafat diartikan sebagai ars vitae (the art of life) ysitu pengetahuan kehidupan.

Pada abad tengah di Eropa, filsafat dianggap sebagai pelayan teologia, yakni sebagai suatu sarana untuk menetapkan kebenaran-kebenaran mengenai Tuhan yang dapat dicapai oleh akal manusia. Thomas Aquinas (1225-1274) yang alirannya dinamakan filsafat Thomisme menyatukan secara ssitematis ajaran teologi gereja Katolik dengan filsafat Aristoteles. Menurutnya, kebenaran teologis yang diterima oleh kepercayaan melalui wahyu tidak dapat ditentang oleh suatu kebenaran filsfati yang dicapai akal manusia. Sehingga seorang filsuf dapat bebas melakukan penyelidikan dengan metode-metode rasional, asalkan simpulan-simpulannya tidak bertentangan dengan kebenaran teologi. Francis Bacon (1561-1626) mengembangkan metode induktif berdasarkan pengamatan dan percobaan untuk menemukan kebenaran dalam berbagai bidang pengetahuan.

Pengertian-pengertian filsafat itu demikian banyaknya sehingga perlu memilih salah satu pandangan sesuai dengan bidang ilmu yang terkait dengan filsafat itu sendiri. Menurut Suriasumantri (2003), filsafat diartikan sebagai suatu cara berpikir yang radikal dan menyeluruh dan mengupas sesuatu yang sedalam-dalamnya.

Secara umum untuk pembahasan ini, filsafat diartikan sebagai suatu kajian yang kritis dan rasional untuk menjawab pertanyaan tentang sesuatu yang menyeluruh, mendalam, dan mendasar. Filsafat berkaitan dengan ilmu. Ilmu merupakan kumpulan pengetahuan yang mempunyai ciri-ciri tertentu yang membedakan dengan pengetahuan-pengetahuan lainnya (Suriasumantri, 2003). Ciri-ciri keilmuaan itu didasarkan pada jawaban yang diberikan ilmu tersebut terhadap ketiga pertanyaan yang mendasar.

Pertanyaan pertama merupakan pertanyaan yang terkait dengan *ontologi*. Ontologi membahas tentang apa ilmu itu atau menyangkut eksistensi ilmu. Pertanyaan kedua terkait dengan *epistemologis (teori pengetahuan)*, yaitu bagaimana cara mendapatkan pengetahuan itu. Sedang pertanyaan ketiga menyangkut *oxiologi (teori tentang nilai)*, yaitu tentang apa nilai kegunaan ilmu itu. Contoh yang terkait dengan ontologi, misalkan agama merupakan ilmu yang membahas hal-hal di luar jangkauan manusia. Biologi membahas pengetahuan yang bersifat empirik dan terkait dengan mahluk hidup. Contoh yang terkait epistemologis, misalkan agama diperoleh melalui telaah-telaah didasarkan pada wahyu ilahi. Sedang Biologi didasarkan pada metode keilmuan yang ilmiah yang bersifat empiris. Logika atau matematika didasarkan pada logika deduktif untuk menurunkan pengetahuan-pengetahuan baru dari pengetahuan-pengetahuan sebelumnya yang sudah diketahui. Contoh yang terkait dengan axiologi, misalkan agama berguna untuk mengembangkan moral, akhlaq, atau keyakinan seseorang, sehingga ia mendapatkan ketentraman batin dan kebahagiaan.

Selanjutnya terkait dengan bidang matematika akan dibahas apakah sebenarnya filsafat matematika itu?

* 1. **Apakah Matematika itu**

Dalam memahami hakekat matematika yang populer terdapat 3 aliran, yaitu logisisme, formalisme, dan intusionisme. Logisisme dikembangkan oleh filsuf Inggris Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) pada tahun 1903. Prinsipnya menjelaskan bahwa matematika semata-mata merupakan deduksi-deduksi dengan prinsip-prinsip logika. Matematika dan logika merupakan bidang yang sama, karena seluruh konsep-konsep dan teorema-teorema diturunkan dari logika.



David Hilbert (1862-1943)

Tokoh Matematika Formalisme

Aliran berikutnya adalah formalisme dengan tokohnya David Hilbert (1862-1943) dari Jerman. Menurut pandangannya sifat alami matematika adalah sebagai sistem lambang yang formal. Matematika berhubungan dengan sifat-sifat struktural dari simbol-simbol dan proses pengolahan terhadap lambang-lambang itu. Simbol-simbol dianggap mewakili pelbagai sasaran yang menjadi objek matematika. Bilangan misalakan dipandang sebagai sifat-sifat struktural yang paling sederhana. Dengan simbol abstrak yang dilepaskan dari suatu sifat tertentu dan hanya bentuknya saja, aliran ini berusaha menyelediki berbagai sistem matematika. Menurut pandangan aliran ini matematika merupakan ilmu tentang sistem-sistem formal.

 Berlawanan dengan aliran formalisme, aliran intusionisme dipelopori oleh ahli matematika Belanda Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Pandangannya bahwa matematika adalah sama dengan bagian eksak dari pemikiran manusia. Ketepatan dalil-dalil matematika terletak pada akal manusia (human intelect) dan tidak pada simbol-simbol di atas kertas. Matematika didasarkan pada suatu ilham dasar (basic intuition) mengenai kemungkinan membangun sebuah barisan bilangan yang tak terhingga. Intuisi pada hakekatnya sebagai suatu aktivitas berpikir yang tak tergantung pada pengalaman, bebas dari bahasa simbolisme, serta bersifat objektif.



Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

Tokoh Matematika Intusionisme

Dalam memandang apa itu matematika juga terdapat pemikiran, yaitu realisme terdiri dari pandangan platonis, empiris, dan monisme. Realisme matematis seperti pandangan realisme secara umum bahwa matematika merupakan entitas yang independen dari pikiran manusia. Manusia tidak menemukan (*invent*) matematika, tetapi menemukan kembali (*discovery*) konsep-konsep matematika. Dalam pandangan ini ada “segitiga” merupakan suatu entitas yang real bukan kreasi pikiran manusia. Banyak matematikawan yang memiliki pandangan seperti ini, misalkan [Paul Erdős](http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erd%C5%91s) and [Kurt Gödel](http://en.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del). Godel menyakini bahwa realitas objektif matematis dapat diterima sebagai suatu cara yang analog dengan persepsi naluriah. Dalam pandangan ini platonisme menjelaskan bahwa entitas matematis adalah abstrak, tidak terbatas waktu atau sifat-sifat kausal, serta tidak berubah. Tokoh kelompok ini misalkan Plato atau Phytagoras. Empirisme adalah suatu bentuk realisme yang menolak matematika sebagai sifat a priori dalam segala hal. Dikatakan seseorang menemukan kembali fakta-fakta matematika dengan penelitian empiris, seperti penelitian-penelitian dalam ilmu lain. Pandangan ini bukan klasik tetapi ditemukan pada abad pertengahan. Menurut pandangan John Stuart Mill mengatakan “2 + 2 = 4” bukan keluar dari ketidakpastian tetapi dapat dipelajari melalui observasi contoh-contoh dari pasangan-pasangan yang disatukan sehingga membentuk empatan. Monisme matematika memandang matematika tidak hanya merupakan objek yang ada, tetapi juga tidak ada. Pandangannya semua struktur matematika yang ada secara matematis juga ada secara fisik. Keberadaannya diterima secara objektif sebagai sesuatu yang “nyata” dalam dunia fisik.

Kelompok berikutnya yang sudah dijelaskan adalah logisme, formalisme, dan intusionisme. Pandangan yang berbeda adalah kelompok psikologis yang memandang kebenaran konsep-konsep matematika berasal dari penjelasan fakta-fakta psikologis. Pandangan lain adalah konstruktivisme yang melibatkan prinsip-prinsip regulatif entitas matematis dapat dikonstruksi secara eksplisit. Matematika adalah suatu latihan intuisi manusia, bukan hanya suatu permainan simbol yang tidak bermakna.

Matematika sebenarnya memiliki pengertian yang beragam berdasar bidang keahlian matematiknya, sehingga cukup sulit untuk didapat pengertian tunggal. Akan tetapi bisa dirumuskan ciri-cirinya. Matematika sebagai ilmu memiliki ciri, yaitu (1) memiliki objek abstrak, (2) bertumpu pada kesepakatan, (3) berpola pikir deduktif, (4) memiliki simbol-simbol yang kosong arti, (5) memperhatikan semesta pembicaraan, dan (6) konsisten dalam sistemnya (Soedjadi, 2000).

* 1. **Bagaimana Sejarah Bilangan**

 Sejarah matematika tidak lepas dari perkembangan bilangan. Operasi hitung mulai dipakai sejak masa 2000 sebelum Masehi di Mesir dan Babilonia. Penulisan sistem numerik dimulai dengan sistem hieroglipik di Mesir yang lebih menyederhanakan dari cara membuat turus-turus. Saat ini digunakan sistem desimal berbasis 10. Banyak topik yang berkembang terkait bilangan. Salah satu contoh topik yang digunakan dalam pembelajaran di SMP barisan dan deret, yaitu aritmetik dan geometrik.

 Barisan matematika adalah barisan bilangan yang perbedaan tiap sukunya konstan. Misalkan barisan 3, 5, 7, 9, 11, 13, … yang bedanya 2. Rumus suku ke-n dari barisan aritmetik adalah

 d adalah beda dan a1 adalah suku pertama.

Deret dari barisan aritmetika adalah jumlah terhingga dari suku-suku barisan.

Rumus deret aritmetika dinyatakan berikut.





Dengan menjumlahkan keduanya diperoleh,



Sehingga didapat:



Bentuk lain adalah : :

![Description:  S_n=\frac{n}{2}[ 2a_1 + (n-1)d].]()

Metode ini ditemukan oleh [Aryabhata](http://en.wikipedia.org/wiki/Aryabhata), pada 499 AD seorang matematikawan dan astronomer dari India dalam bukunya [*Aryabhatiya*](http://en.wikipedia.org/wiki/Aryabhatiya).

Barisan geometri terdapat pada buku VIII dan IX dari Euclid, yaitu Element. Pada *Elements*, buku IX, barisan geometri adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32, … (atau dalam sistem numerik biner 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, … ). Pada buku IX, proposisi 36 membuktikan bahwa jumlah suku ke-n dari bilangan-bilangan prima adalah bilangan sempurna. Sebagai contoh 5 suku pertama dari deret 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, adalah bilangan prima.

Secara singkat pemikiran tentang barisan maupun deret geometri sebenarnya sejak pada masa Yunani dan saat ini kembali diajarkan lagi.