EKSISTENSI SUPREMUM DAN INFIMUM DENGAN TEOREMA CANTOR DEDEKIND

Nursiya Bito

Staf Dosen Jurusan Matematika dan IPA
Universitas Negeri Gorontalo

ABSTRACT

In this paper, we will try to proof existence of supremum and infimum with Cantor Dedekind theorem. Before we discuss this material, necessary to introduce several basic concepts, especially Cut Dedekind and Supremum and Infimum concepts. The method we are presenting here is due to Richard Dedekind (1831-1916) whose work entitled "What are and what should be numbers?".

Cantor Dedekind theorem very important to show that nothing "gap" at real numbers system.

PENDAHULUAN

Definisi 1. Cut Dedekind

Misalkan Q himpunan bilangan rasional dan misalkan Q dibagi atas dua himpunan L dan U yang tidak kosong sedemikian hingga $L \cap U = \varnothing$ maka $L \mid U$ disebut *Cut Dedekind* jika $L \cup U = Q$ dan jika $p \in L$ dan $q \in U$ maka $p < q$. *Cut Dedekind* selanjutnya akan disebut dengan ***Cut***

Dari definisi di atas, L disebut bagian bawah dan U disebut bagian atas dari cut. Selanjutnya untuk sebarang cut $(L| U)$ dan untuk sebarang $p \in Q$ berlaku $p \in L$ atau $p \in U$. Jika $p \in L$ maka berlaku $p' < p$, $p' \in L$ dan jika $q \notin L$, maka untuk $q' > q$, $q' \notin L$. Selanjutnya, jika $p \in L$ dan $q \notin L$ maka $p < q$

Contoh:

1. Misalkan $L = \{r \in Q \mid r < 2\}$ dan $U = \{r \in Q \mid r \geq 2\}$. $L| U$ adalah cut
2. Misalkan $L = \{r \in Q \mid r < 2\}$ dan $U = \{r \in Q \mid r > 2\}$. $L| U$ bukan cut

Definisi 2: Kesamaan Dua Cut

Dua cut $(L_1| U_1)$ dan $(L_2| U_2)$ dikatakan sama jika $L_1 = L_2$ (akibatnya $U_1 = U_2$)

Definisi 3: Ketaksamaan Dua Cut

$(L_1| U_1) < (L_2| U_2)$ jika $p \in L_1$ mengakibatkan $p \in L_2$ dan terdapat elemen rasional $q \in L_2$ sedemikian hingga $q \notin L_1$

Teorema 1:

Jika $(L_1| U_1)$ *dan* $(L_2| U_2)$ adalah dua cut dan terdapat $a \in L_2$ sedemikian hingga $a \notin L_1$ maka $(L_1| U_1) < (L_2| U_2)$

Bukti :

Misalkan x $\in$ L_1, berlaku salah satu x < a atau x = a atau x > a

Tetapi x $\neq$ a dalam hipotesis. a $\in$ U_1, jadi x > a $\Rightarrow$ x $\in$ U_1 $\Rightarrow$ x $\notin$ L_1. kontradiksi

Pandang x < a dan a $\in$ L_2 mengakibatkan x $\in$ L_2

sehingga terbukti $(L_1| U_1) < (L_2| U_2)$

Teorema 2:

Misalkan $r \in Q$ dan misalkan $L = \{p : p < r, p \in Q\}$ dan $U = Q - L$ maka $(L| U)$ adalah cut dan r adalah elemen terkecil dari U

Bukti:

Berdasarkan definisi L dan U maka jelas L dan U himpunan tidak kosong
$L \cap U = \emptyset$, $L \cup U = Q$ dan $p \in L$, $q \in U$ maka $p < q$.
Berdasarkan definisi 1 maka $(L|U)$ adalah cut
Selanjutnya akan ditunjukkan r adalah elemen terkecil dari U
$r \not< r$ maka $r \notin L$ maka $r \in U$
akibatnya $p < r$ maka $p \in L$ dan $p \notin U$
Jadi r adalah elemen terkecil dari U (terbukti)
cut yang memenuhi kondisi teorema 1.1 di atas disebut *Cut rasional*.

Teorema 3:
Jika $(L_1| U_1) < (L_2| U_2)$, maka terdapat $r \in Q$ sedemikian hingga $(L_1| U_1) < C_r < (L_2| U_2)$ dimana C_r adalah cut rasional
Bukti
Karena $(L_1| U_1) < (L_2| U_2)$ maka berdasarkan definisi 1.3 $L_1 \subset L_2$.
Jadi terdapat $a \in Q$ dengan $a \in L_2$ sedemikian hingga $a \notin L_1$
Karena a bukan elemen terbesar di L_2 maka terdapat $r \in Q$ dengan $r \in L_2$ sedemikian hingga $r > a$
Pandang cut $C_r = (L | U)$ dengan $L = \{x : x < r,\ x,r \in Q\}$
Berdasarkan definisi L, maka $r \notin L$ tapi $r \in L_2$. Akibatnya $(L | U) < (L_2 | U_2)$
Karena $a < r$ maka $a \in L$
Karena $a \notin L_1$ tapi $a \in L$ maka $(L_1| U_1) < (L | U)$
Jadi terbukti bahwa $(L_1| U_1) < C_r < (L_2| U_2)$

Teorema 4

Untuk sebarang cut $(L | U)$, $r \in L$ jika dan hanya jika $C_r < (L| U)$

Bukti:
(⇒) Misalkan $(L | U)$ adalah cut di Q. Jika $r \in L$ maka $r \notin U$
Pandang cut $C_r = (L_1 | U_1)$ dengan $L_1 = \{x : x < r,:\ x,r \in Q\}$
Dari definisi L_1, $r \notin L_1$ tapi $r \in L$.
Akibatnya $(L_1 | U_1) = C_r < (L | U)$
(⇐) Misalkan $C_r = (L_1 | U_1) < (L | U)$ dengan $L_1 = \{x : x < r, x,r \in Q\}$
Berdasarkan definisi L_1, $r \notin L_1$
Karena $C_r < (L | U)$, maka $r \in L$

Definisi 4.
Misalkan $S \neq \phi$, $S \subseteq \Re$
(a) Himpunan S dikatakan Terbatas di atas ⇔ $\exists\ u \in \Re, \ni s \leq u, (\forall s)\ s \in S$
Setiap *u* disebut batas atas dari S
(b) Himpunan S dikatakan Terbatas di bawah ⇔ $\exists\ w \in \Re, \ni w \leq s, (\forall s)\ s \in S$
Setiap *w* disebut batas bawah dari S
(c) Suatu himpunan dikatakan terbatas jika terbatas diatas dan terbatas dibawah. Suatu himpunan dikatakan tak terbatas jika tidak terbatas.

Definisi 5.
Misalkan $S \neq \phi$, $S \subseteq \Re$
(a) Jika S terbatas diatas, maka u disebut Supremum (atau batas atas terkecil) dari S jika dan hanya jika:
 (1) *u* batas atas dari S
 (2) jika *v* batas atas yang lain dari S, maka $u \leq v$
(b) Jika S terbatas dibawah, maka w disebut Infimum (atau batas bawah terbesar) dari S jika dan hanya jika:
 (1) *w* batas bawah dari S
 (2) Jika *t* batas bawah yang lain dari S, maka $t \leq w$

II PEMBAHASAN

Teorema Cantor Dedekind

Misalkan R himpunan bilangan real dan misalkan R dapat dibagi atas dua himpunan A dan B yang tidak kosong dengan $A \cap B = \varnothing$, $(A \cup B = R)$ sedemikian hingga jika $a \in A$ dan $b \in B$ berlaku $a < b$ maka terdapat tepat satu $c \in R$ sedemikian $a \leq c, \forall a \in A$ dan $c \leq b, \forall b \in B$. Dalam hal ini c adalah elemen terbesar dari A atau elemen terkecil dari B.

Bukti:

Kasus 1 : A mempunyai elemen terbesar

Misalkan A mempunyai elemen terbesar sebut c maka $a \leq c, \forall a \in A$

Karena $c \in A$ dan $b \in B$ maka berdasarkan hipotesis : $c < b, \forall b \in B$.

Kasus 2 : A tidak mempunyai elemen terbesar

Jika A tidak mempunyai elemen terbesar, maka akan ditunjukkan elemen terkecil dari B. Konstruksi sebuah himpunan dengan cara sebagai berikut:

$L = \{x : x \in Q$ dan $x \in A\}$ dan $U = Q - L$. Akan ditunjukkan $(L| U)$ adalah cut

A tidak kosong sehingga ada a $\in$ A dan a $\in$ Q maka a $\in$ L . jadi L tidak kosong

B tidak kosong sehingga ada b $\in$ B dan b $\in$ Q sehingga b $\in$ U. Jadi U tidak kosong

Karena $A \cap B = \varnothing$ maka $L \cap U = \varnothing$. $L \cup U = Q$

Karena U memuat semua elemen rasional di B dan L memuat semua elemen rasional di A, maka jika $q \in L$ dan $p \in U$ mengakibatkan $q < p$.

Berdasarkan definisi 1, $(L|U)$ adalah cut. Misal $c = (L|U)$

Ambil sebarang $a \in R$ dengan $a \in A$

Karena A diasumsikan tidak memuat elemen terbesar, maka terdapat $a' \in R$

dengan $a' > a$ sedemikian hingga $a' \in A$

Dengan teorema 3 terdapat $d \in Q$ sedemikian hingga $a < d < a'$

Jadi $d \in A$, akibatnya $d \in L$

Berdasarkan teorema 4 : jika $d < c$ maka $a < c$

Sekarang, jika $b \in B$ dan $r \in Q$ sebarang sedemikian hingga $r < c$

Berdasarkan teorema 4, $r \in A$ maka $r \notin B$. Akibatnya $r < b$

Jadi untuk sebarang $b \in B$, jika $r < c$ maka $r < b$ mengakibatkan $c \leq b$

Karena $c \notin A$ maka $c \in B$. Jadi c adalah elemen terkecil dari B

Selanjutnya akan ditunjukkan c adalah tunggal

Andaikan terdapat $c', c' \in R$ dengan $c \neq c'$ yang memenuhi kondisi di atas

maka $c < c'$ atau $c' < c$

Pada kedua kasus tersebut, terdapat $r \in Q$ sedemikian hingga $c < r < c'$ atau $c' < r < c$.

Pandang $c < r < c'$. Jika $c < r$ maka $r \notin A$. Jika $r < c'$ maka $r \notin B$.

Terjadi kontradiksi. Demikian pula untuk kasus $c' < r < c$. Jadi haruslah $c = c'$.

Selanjutnya teorema di atas akan digunakan untuk membuktikan eksistensi infimum dan supremum

Teorema Eksistensi Infimum dan Supremum

Misalkan $A \subseteq R, A \neq \varnothing$

a) Jika A mempunyai batas bawah maka A mempunyai infimum
b) Jika A mempunyai batas atas maka A mempunyai supremum

Diketahui : $A \subseteq R, A \neq \varnothing$

a) Jika A mempunyai batas bawah maka A mempunyai infimum

Konstruksi himpunan S dengan cara sebagai berikut:

$x \in S$ jika dan hanya jika terdapat $x_0 \in A$ sedemikian hingga $x_0 < x$.

Jadi setiap elemen S lebih besar dari paling sedikit satu elemen A.

Dengan kata lain, tidak ada batas bawah A yang termuat di S

Konstruksi $T = R - S$
Jika $x \in T$ maka tidak terdapat elemen A yang lebih kecil dari x.
Jadi $x \in T$ jika dan hanya jika $x \leq y, \forall y \in A$.
Akibatnya T memuat semua batas bawah dari A.
Akan ditunjukkan T mempunyai elemen terbesar:
Karena A terbatas di bawah dan $A \neq \emptyset$, maka $T \neq \emptyset$
Karena $A \neq \emptyset$, maka terdapat $x_0 \in A$ dan terdapat $x \in R$ sed. hingga $x > x_0$.
Jadi $S \neq \emptyset$
Ambil sebarang $a \in T, b \in S$ maka a batas bawah A sedangkan b bukan batas bawah. Akibatnya $a < b$.
Jadi S dan T memenuhi hipotesis teorema Cantor Dedekind.
Jadi terdapat g sedemikian hingga $a \leq g, \forall a \in T, g \leq b, \forall b \in S$
dan g elemen terbesar dari T atau elemen terkecil dari S
Andaikan $g \in S$ maka terdapat $x_0 \in A$ sedemikian $x_0 < g$
Menurut teorema 3, terdapat $p \in Q$ sedemikian hingga $x_0 < p < g$
Berarti $p \in S$ dan $p < g$. Jadi g tidak mungkin elemen terkecil dari S
Kesimpulannya g elemen terbesar dari T

b) Jika A mempunyai batas atas maka A mempunyai supremum
Konstruksi himpunan T dengan cara sebagai berikut:
$x \in T$ jika dan hanya jika terdapat $x_0 \in A$ sedemikian hingga $x < x_0$.
Jadi setiap elemen T lebih kecil dari paling sedikit satu elemen A.
Dengan kata lain, tidak ada batas atas A yang termuat di T
Konstruksi $U = R - T$.
Jika $y \in U$ maka tidak ada elemen A yang lebih besar dari y.
Jadi, $y \in U$ jika dan hanya jika $x \leq y, \forall x \in A$.
Akibatnya U memuat semua batas atas dari A
Akan ditunjukkan U mempunyai elemen terkecil
Karena A terbatas di bawah dan $A \neq \emptyset$, maka $U \neq \emptyset$
Karena $A \neq \emptyset$, maka terdapat $x_0 \in A$ dan terdapat $x \in R$ sed. hingga $x < x_0$.
Jadi $T \neq \emptyset$
Ambil sebarang $a \in U, b \in T$ maka a batas atas A sedangkan b bukan batas atas. Akibatnya $b < a$.
Jelas pula $T \cup U = R$ dan $T \cap U = \emptyset$
Jadi T dan U memenuhi hipotesis teorema Cantor Dedekind.
Akibatnya terdapat c sedemikian hingga $b \leq c, \forall b \in T, c \leq a \; \forall b \in U$ dan c elemen terbesar dari T atau elemen terkecil dari U
Andaikan $c \in T$ maka terdapat $x_0 \in A$ sedemikian $c < x_0$
Menurut teorema 3, terdapat $p \in Q$ sedemikian hingga $c < p < x_0$
Berarti $p \in S$ dan $c < p$. Jadi c tidak mungkin elemen terbesar dari T
Kesimpulannya c elemen terkecil dari U

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan sebelumnya maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

a) $(L|U)$ dikatakan Cut Dedekind jika L dan U adalah himpunan bilangan rasional yang tidak kosong dengan $L \cap U = \emptyset$ dan $L \cup U = Q$ dan memenuhi kondisi Jika $p \in L$ dan $q \in U$ maka $p < q$
b) Jika $(L|U)$ CUT dan U mempunyai elemen terkecil maka $(L|U)$ disebut cut rasional.
c) Teorema Cantor Dedekind, disamping dapat digunakan untuk membuktikan eksistensi infimum dan supremum, juga menunjukkan bahwa pada sistem bilangan real tak ada "*gap*" (*teorema kepadatan*)

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G. dan Sherbert, Donald R. 2000. Introduction to Real Analysis. Third Edition. John Wiley & Sons Inc.

Goldberg, Richard R. 1976. Methods of Real Analysis. Second Edition. New York. John Wiley & Sons Inc

Saxena, Subhash Chandra & Shah, S.M. 1980. Introduction to Real Variable Theory. New Delhi. Prentice-Hill of India Private Limited