Saintek Vol 5. No 3 Tahun 2010

Penyelesaian Analitik dan Pemodelan Fungsi Bessel

Lailany Yahya

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Gorontalo

abstrak

Dalam makalah ini akan dilakukan penyelesaian analitik dan pemodelan persamaan diferensial Bessel serta menunjukkan sifat simetri pada ruang Hilbert dan ortogonalitas untuk memperoleh grafik Fungsi Bessel $J_n(x)$ dan fungsi Neuman $N_n(x)$.

1. Pendahuluan

Salah satu dari persamaan-persamaan diferensial yang terpenting dalam penerapan matematika adalah persamaan diferensial Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)\,y = 0$, di mana parameter v merupakan bilangan yang diberikan. Persamaan ini timbul dalam soal-soal tentang getaran (vibrasi), medan elektrostatik, rambatan (konduksi) panas, dan sebagainya, pada sebagian besar kasus persoalan tersebut menunjukkan sifat simetri silinder. Kita asumsikan bahwa parameter v di dalam persamaan diferensial di atas (*) adalah bilangan riil dan taknegatif. Perhatikan bahwa persamaan diferensial ini mempunyai titik singular reguler di x = 0. Jadi Persamaan mempunyai penyelesaian yang berbentuk

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \qquad \text{dengan } a_0 \neq 0 \text{ turunan-turunannya adalah}$$

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (m+r)\, a_m x^{m+r-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+1) a_{m+1} x^{m+r}$$

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} (m+r-1)(m+r)\, a_m x^{m+r-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+1)(m+r+2) a_{m+1} x^{m+r}$$

substitusikan y, y′ dan y″ ke persamaan diferensial di atas, diperoleh

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(r+m)(r+m-1)+(r+m)+(x^2-v^2)]a_m x^{m+r} = 0$$

Bagi persamaan ini dengan x^r dan kemudian kumpulkan koefisien dari x^m, maka didapat

$$(r^2 - v^2)a_0 + [(r + 1)^2 - v^2]\, a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty}[((r+m)^2-v^2)a_m + a_{m-2}]x^m = 0$$

$(r^2 - v^2)a_0 = 0$

$[(r + 1)^2 - v^2]\, a_1 = 0$

$$\sum_{m=2}^{\infty}[((r+m)^2-v^2)a_m + a_{m-2}] = 0$$

karena $a_0 \neq 0$, dari $(r^2 - v^2)a_0 = 0$ diperoleh persamaan penunjuk

$r^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm v$

begitu pula dari $[(r + 1)^2 - v^2]\, a_1 = 0$ di dapat $a_1 = 0$.

Sedangkan dari persamaan $\sum_{m=2}^{\infty}[((r+m)^2-v^2)a_m + a_{m-2}] = 0$ didapat rumus rekursi

$(r + m - v)(r + m + v)\, a_m = - a_{m-2}$, untuk m = 2, 3, … (1)

selanjutnya kita tinjau **kasus r = v.**

Penyelesaian Terhadap Akar $r_1 = v$

Untuk $r = r_1 = v$ maka rumus rekursi menjadi $m(2v + m)\, a_m = - a_{m-2}$, untuk m = 2, 3, … karena $a_1 = 0$, maka diperoleh $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, …, $a_{2k-1} = 0$, untuk k = 1, 2, … dengan syarat $2v + m \neq 0$ untuk m = 2, 3, ….

Gantikan m dengan 2m dalam rumus (1) memberikan

$a_{2m} = -\dfrac{1}{2^2 m(v+m)} a_{2m-2}$, untuk m = 1, 2, 3, … (2)

dengan syarat $v \neq - m$. Dari (2) kita peroleh koefisien-koefisien a_2, a_4, … secara berurutan. ganti m dengan m-1 dalam (2), sehingga diperoleh

$$a_{2m-2} = -\frac{1}{2^2(m-1)(v+m-1)} a_{2m-4}$$

dengan demikian

$$a_{2m} = \frac{(-1)^2}{2^4 m(m-1)(v+m)(v+m-1)} a_{2m-4}$$

apabila proses ini dilanjutkan, maka didapat

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(v+m)(v+m-1)...(v+1)} \quad , \quad \text{untuk } m = 1, 2, 3, ... \qquad (3)$$

a_0 masih sembarang, biasanya diambil

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

dimana Γ adalah fungsi Gamma. Untuk keperluan di sini cukup kita ketahui bahwa $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \qquad (\alpha > 0)$$

dengan integrasi parsial diperoleh

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha} dt = -e^{-t} t^{\alpha} \Big]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

pernyataan pertama di ruas kanan adalah nol dan integral di ruas kanan adalah $\Gamma(\alpha)$. Ini menghasilkan hubungan dasar

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha) \qquad (4)$$

karena

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

kita simpulkan dari (4) bahwa

$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1\,!$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$, dan umumnya $\Gamma(k+1) = k!$ untuk k = 0, 1, 2, ….

Ini menunjukkan bahwa fungsi gamma dapat dipandang sebagai generalisasi dari fungsi faktorial yang diketahui dari kalkulus elementer. Kita kembali pada masalah yang kita tinjau, (v+m)(v+m-1) … (v+1) Γ(v+1) = Γ(v+m+1) jadi rumus untuk a_{2m} pada (3) menjadi

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(v+m)(v+m-1)...(v+1)\Gamma(v+1).2^v}$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{v+2m} m!\Gamma(v+m+1)}$$, m = 0, 1, 2, …. (5)

Dengan menentukan r = v dan substitusikan (5) ke y(x) = $x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ dan mengingat $a_{2m-1} = 0$, untuk m = 1, 2, …, maka didapat

$$y(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{v+2m} m!\Gamma(v+m+1)} x^{2m}$$

fungsi ini dikenal sebagai fungsi Bessel jenis pertama orde v dan ditulis dengan notasi $J_v(x)$. Jadi

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{v+2m} m!\Gamma(v+m+1)} x^{2m} \qquad (6)$$

atau

$$J_v(x) = \frac{x^v}{2^v \Gamma(v+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2v+2)} + \frac{x^4}{2.4(2v+2)(2v+4)} + \dots \right]$$

dan berlaku untuk v yang bukan bilangan bulat negatif, atau

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m!(n+m)!} x^{2m}$$

Deret di ruas kanan pada (6) konvergen mutlak untuk setiap x (uji dengan tes hasil bagi). Fungsi ini merupakan solusi persamaan diferensial (6) untuk v bukan bilangan bulat negatif. Khususnya untuk v = 0, dari (6) diperoleh

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

yaitu fungsi Bessel orde nol.

2. Pembahasan

Pada pembahasan ini kita tinjau kasus **r = - v,** dengan mengganti v dengan –v di (6), kita peroleh

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-v} m!\Gamma(m-v+1)} x^{2m} \qquad (7)$$

Karena persamaan Bessel memuat v^2, maka fungsi-fungsi J_v dan J_{-v} merupakan penyelesaian-penyelesaian dari persamaan Bessel untuk v yang sama. Bila v bukan bilangan bulat, maka J_v dan J_{-v}

adalah bebas linear karena suku pertama di (6) dan suku pertama di (7) berturut-turut adalah kelipatan hingga yang tak nol dari x^v dan x^{-v}. Ini memberikan hasil berikut.

Teorema 1. (Penyelesaian umum persamaan Bessel)

Jika v bukan bilangan bulat, maka penyelesaian umum persamaan Bessel untuk setiap $x \neq 0$ adalah $y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$. Tetapi jika v suatu bilangan bulat, maka $y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$ bukan penyelesaian umum. Ini diperoleh dari teorema berikut.

Teorema 2. (Kebergantungan linear fungsi-fungsi Bessel J_n dan J_{-n})

Untuk bilangan bulat v = n, fungsi-fungsi Bessel $J_n(x)$ dan $J_{-n}(x)$ adalah bergantung linear karena

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ untuk n = 1, 2, 3, ….

Fungsi eksponensial dapat digunakan untuk menyatakan fungsi-fungsi $J_n(x)$. kita tahu bahwa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{xt}{2}\right)^n = e^{\frac{xt}{2}}$$

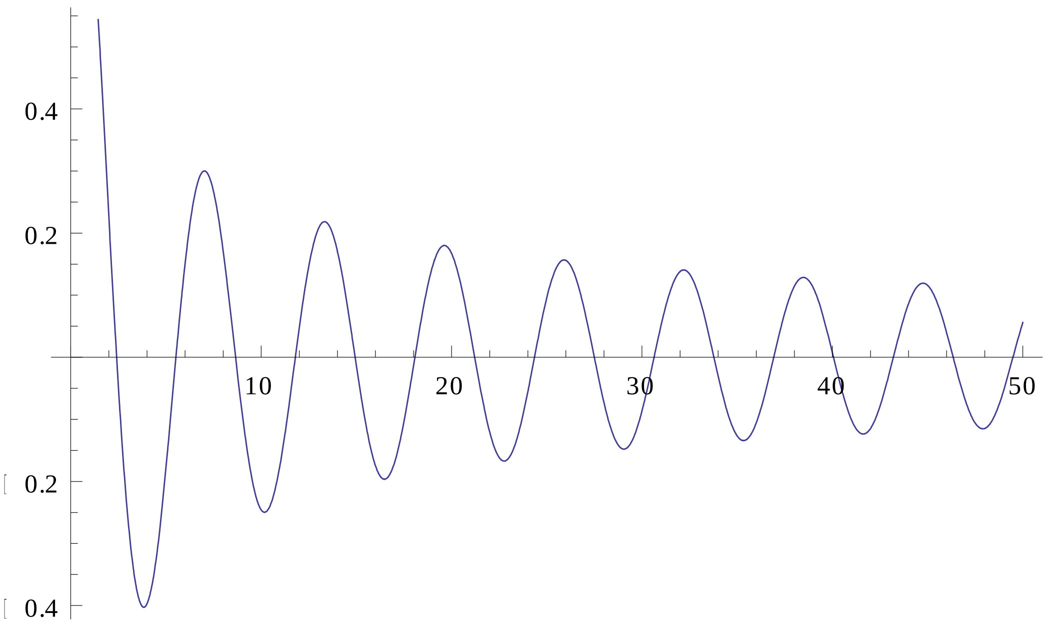
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{xt}{2}\right)^n = e^{-\frac{xt}{2}}$$

bila kedua deret itu kita perkalikan maka diperoleh

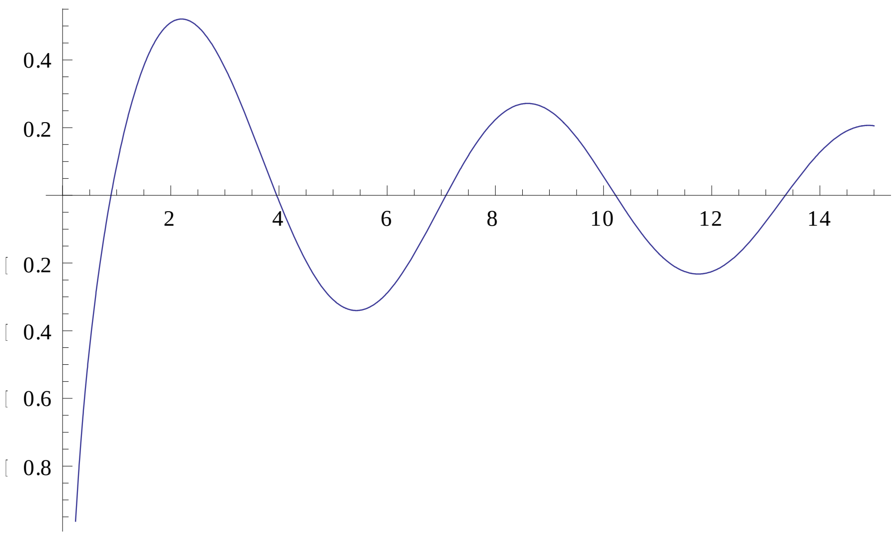
$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

$$= J_0(x) + J_1(x)\, t + J_2(x)\, t^2 + J_{-1}(x)\, t^{-1} + J_{-2}(x)\, t^{-2} + \ldots.$$

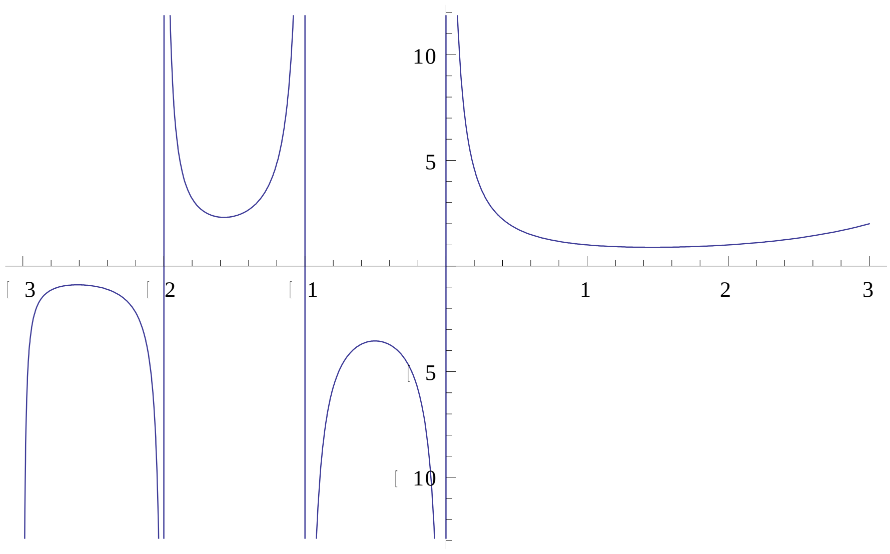
berlaku untuk setiap x dan $t \neq 0$. Jadi J_n merupakan koefisien dari uraian fungsi elsponensial di atas. Untuk memenuhi penyelesaian dan pemodelan fungsi Bessel dengan nilai limit dapat ditunjukkan dengan gambar di bawah ini



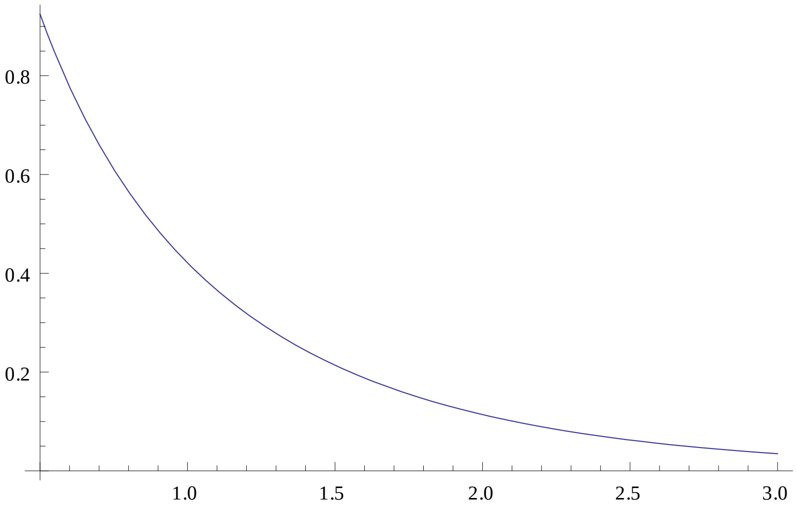
Gambar 1. Grafik fungsi-fungsi Bessel



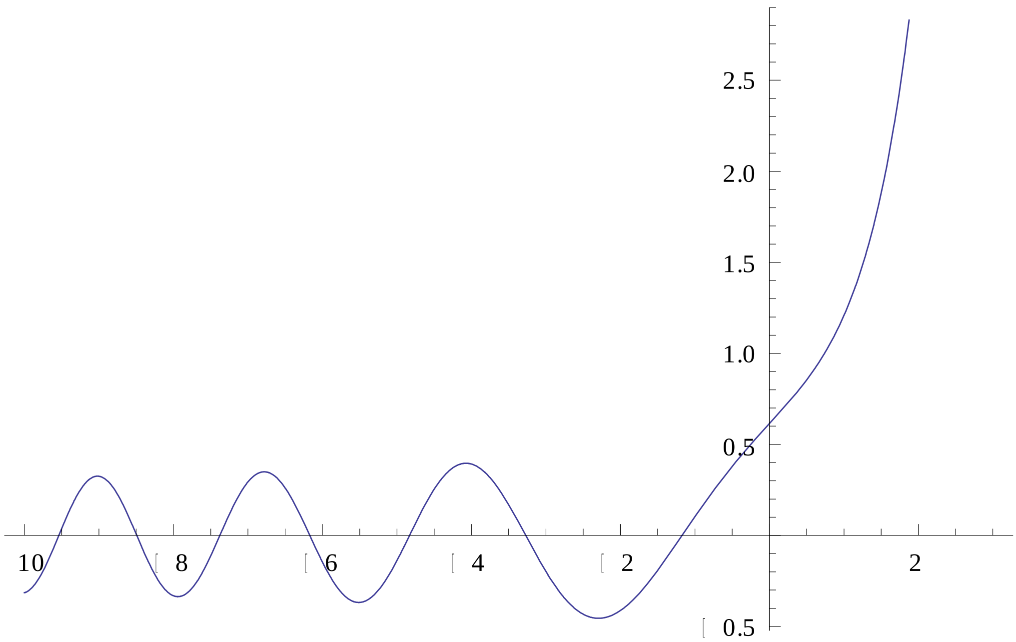
Gambar 2. Ruang Hilbert dengan deret Fourier Bessel



Gambar 3. Fungsi Bessel dengan Orde n



Gambar 4. Fungsi Bessel ortogonalitas



Gambar 5. Fungsi Bessel Neuman Sferis

3. Kesimpulan

Dari pemodelan persamaan diferensial Bessel yang disebut fungsi Hankel atau disebut fungsi Bessel jenis ketiga dan penyelesaian persamaan Helmholtz dalam sistem koordinat sferis dan duplikasi Legendre untuk menyelidiki ortogonalitas fungsi-fungsi harmonik diperoleh grafik fungsi Bessel $J_n(x)$ dan fungsi Neuman $N_n(x)$.

DAFTAR PUSTAKA

Abell, M. L. & J. P. Braselton, *Diferential Equations with Mathematica*, Third Edition, ELSEVIER Academic Press (2004).

Kreyszig, E, *Advanced Engineering Mathematics*, 5th Edition, John Wiley and Sons, New York (1983).