

Simulasi Numerik Model Epidemik Dengan Fungsi Linier

Franky Alfrits Oroh

Staf Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Gorontalo

Abstrak: Makalah ini merupakan simulasi numerik model epidemik dengan fungsi linier sebagai strategi intervensi menurunkan tingkat endemik terhadap perubahan perilaku dari evolusi penyakit yang lebih sederhana. Untuk memenuhi kekuatan infeksi, model dapat mempunyai kestabilan dari kesetimbangan bebas penyakit dan kestabilan dari kesetimbangan endemik pada waktu yang sama. Jika kita merubah rata-rata recovery, simulasi numerik menunjukkan bahwa batas dari daerah penyakit mengalami perubahan dari separatrix sadel ke limit cycle tidak stabil. Jika pencegahan akibat perubahan perilaku lemah, didapat dua limit cycle dan bifurkasi dari model seperti perubahan pada ukuran populasi untuk menemukan bahwa penyakit mungkin tidak lagi ada meskipun terdapat dua keseimbangan endemik.

Model dapat diartikan sebagai suatu proses penyederhanaan gejala alam ke dalam bentuk yang dapat dianalisis melalui cara yang dapat dipahami dan dipercaya yang membantu pembuat model untuk memprediksi atau menjelaskan perilaku dari suatu fenomena, percobaan atau peristiwa (Borelli & Coleman 1998). Untuk permasalahan dinamika dari beberapa fenomena dapat digunakan batasan parameter yang menggambarkan permasalahan secara alami. Berikut disajikan skema dinamika untuk batasan percobaan dengan menggunakan parameter alamiah. Adanya suatu permasalahan dari fenomena nyata diusahakan dapat dibawa dalam permasalahan yang lebih sederhana dengan dengan membuat suatu permodelan. Dari tahap awal yaitu proses melihat gejala sampai dengan memberikan intepretasi suatu solusi diberikan pada skema gambar berikut.

Untuk menentukan suatu penyakit menjadi endemik atau tidak, digunakan bilangan reproduksi dasar (\hat{A}_0), yaitu angka harapan banyaknya infeksi individu kedua dari populasi yang rentan sakit. Bila $\hat{A}_0 < 1$, tidak terjadi endemik, dan titik kesimbangan bebas penyakit adalah global stabil. Bila $\hat{A}_0 > 1$, terjadi endemik dan keseimbangan endemiknya adalah global stabil (Brauer 2008). Kemudian model tidak punya limit cycle. Meskipun Capasso dan Wilson [4] menunjukkan dua kasus kestabilan adalah lebih mungkin terjadi. Disini terjadi dua kestabilan maksudnya adalah keseimbangan bebas penyakit dan keseimbangan endemik stabil terjadi pada waktu yang sama. Tentu saja untuk beberapa peyakit, untuk perilaku waktu yang lama, penyebaran penyakit berhubungan dengan kondisi awal. Bila nilai awal dari banyaknya pembawa penyakit adalah besar, berarti terjadi penularan besar dari penyakit, sehingga penyakit akan terjadi wabah di daerah itu. Bila nilai awal banyaknya pembawa penyakit kecil, berarti penularan penyakit kecil, sehingga penyakit akan lenyap (Wang 2006).

Pada model epidemik klasik, timbulnya aksi massa incidence dan standar incidence adalah sering digunakan. Incidence ini mengakibatkan rata-rata kontak pada peluang infeksi rata-rata tiap kontak adalah konstan tiap waktu. Faktanya, kesibukan individu adalah dipengaruhi oleh bilangan dari infective individu, sebab bilangan ini menggambarkan resiko dari infeksi. Contoh, selama terjadi terjangkitnya SARS pada tahun 2003, ketika bilangan infeksi dari SARS naik, kita membutuhkan perlindungan saat pengukuran dan kebijakan pengendali yaitu menutup sekolah, menutup restoran, menunda konferensi dan seterusnya. Sehingga bilangan kontak tiap waktu menurun drastis, oleh karena itu incidence juga menurun (Wang & Ruan [17]). Hal ini berarti serangan infeksi mencakup adaptasi individu terhadap resiko infeksi. Untuk beberapa penyakit epidemik memerlukan kelipatan kontak untuk dapat menyebarkan penyakit. Hal ini menuju pada kekuatan infeksi sebagai fungsi nonlinear dari bilangan infeksi .

Dari dua gambar di atas menunjukkan bahwa penyebaran penyakit dipengaruhi oleh rata-rata kontak dari individu yang membawa penyakit terhadap populasi yang rentan terkena penyakit. Pada saat penyebaran penyakit tanpa ada kendali atau intervensi (gambar kiri), populasi yang rentan akan cepat tertular dengan cepat, sedangkan bila penyebaran penyakit di berikan kendali, misalnya dengan mengurangi rata-rata kontak pembawa penyakit dengan populasi yang sehat, penyakit akan menurun sehingga diharapkan tidak mewabah. Contoh bila di suatu daerah terjadi wabah demam berdarah, penderita dapat diisolasi, sekolah, kantor diliburkan, atau pemberantasan vektor demam berdarah dengan cepat dilakukan.

Pada Gambar 1 (sebelah kanan) menunjukkan efektif kontak antara individu yang terinfeksi dan individu yang susceptible tidak tumbuh dengan cepat, ketika banyak individu yang terinfeksi, sebab banyak individu yang terinfeksi atau sebab perlindungan pada waktu pengukuran. Kekuatan infeksi menggambarkan efek kebijakan intervensi. Ketika I besar, kita melaksanakan kebijakan intervensi, contoh penutupan sekolah, restoran, penundaan konferensi dst. Sehingga kekuatan infeksi turun cepat (Wang 2006).

Kebijakan intervensi adalah strategi yang dilakukan untuk mengkontrol penyakit, sehingga penyakit diusahakan dapat dikendalikan penyebarannya. Intervensi yang dimaksud disini adalah suatu tindakan dari otoritas penanggulangan penyakit untuk mencegah mewabahnya penyakit. Serangan penyakit bila dilihat dari penyebarannya ada yang bersifat sangat cepat menular atau mewabah ada pula yang bersifat pelan dalam penularannya. Untuk penyakit yang secara cepat mewabah diasumsikan penyebaran infeksi mengikuti fungsi nonlinear.

Beberapa kaidah yang digunakan untuk menganalisis model matematika dari suatu epidemik penyakit diantaranya dengan menentukan; bilangan dasar reproduksi (\hat{A}_0), titik tetap atau titik kesetimbangan, pelinearan model bila sistem persamaan model merupakan fungsi nonlinear, menentukan nilai-nilai eigen dengan menggunakan matriks Jacobi, kriteria kestabilan titik tetap dan menentukan hasil simulasi model (Keshet 1988). Tampilan dari simulasi yang digunakan pada paper ini menggunakan software Matlab.

Misal epidemik penyakit bertipe *SIRS* yang tersaji pada Gambar 1 berikut: dimana bilangan individu yang susceptible S , menyatakan banyak individu yang rentan sakit, infectious I , menyatakan banyak individu yang terinfeksi penyakit, recovered R , menyatakan banyak individu yang sembuh dari sakit, dan ukuran populasi N , dengan $N= S+I+R$, kita menganggap bahwa dinamika penyebaran penyakit dibangun oleh:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= dN - dS - \beta(I)S + vR, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(I)S - (d + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (d + v)R. \end{aligned} \tag{1}$$

Dimana d adalah rata-rata kelahiran dan rata-rata kematian populasi, γ adalah rata-rata dari individu yang terinfeksi, v adalah rata-rata removed dari individu yang kehilangan immunity dan kembali pada kelas rentan.

Untuk melakukan analisis model (1) dilakukan penskalaan, karena banyak populasi yang terinfeksi lebih kecil dibandingkan banyak populasi yang sehat dan juga akan diperoleh model yang lebih sederhana. Langkah penskalaan di mulai dengan mendefinisikan variabel-variabel baru berikut:

$$S = N\bar{S}, I = N\bar{I}, R = N\bar{R} \tag{2}$$

Persamaan (2) disubstitusikan pada sistem persamaan (1), dengan asumsi bahwa $\beta(I) = \beta =$ konstan, sehingga diperoleh:

Model (3) ditinjau dari individu yang terinfeksi dan yang sembuh diperoleh titik tetap $(0,0)$ dan $(I^*, R^*) = (\beta \bar{S} / (d + \gamma), \beta \bar{S} \gamma / (d + \gamma)(d + \nu))$. Kestabilan 2 titik tetap tersebut dilakukan dengan melihat nilai eigen matriks Jacobi pada titik tersebut,

$$J = \begin{pmatrix} -(\delta + \gamma) & 0 \\ \gamma & -(\delta + \nu) \end{pmatrix}$$

akan stabil bila $(\delta + \gamma) > 0$ dan $(\delta + \nu) > 0$. Sistem persamaan (2) mempunyai bilangan reproduksi dasar $\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{(d + \gamma)}$ (Bruear 2008). Bila dihubungkan dengan \mathfrak{R}_0 , kestabilan titik tetap dipenuhi bila $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan takstabil bila $\mathfrak{R}_0 > 1$.

Bila kekuatan infeksi tidak konstan, melainkan suatu fungsi infeksi, misalkan $\beta(I) = \lambda I / f(I)$, di mana $I / f(I)$ menggambarkan efek kebijakan intervensi pada penurunan koefisien kontak λ , maka dari (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= \delta N - \delta S - \frac{\lambda I}{f(I)} S + \nu R, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda I}{f(I)} S - (\delta + \gamma) I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (d + \nu) R. \end{aligned} \tag{3}$$

Pada analisis berikut menggunakan ukuran populasi N diasumsikan konstan, yang dilambangkan dengan C , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} N &= C \\ S + I + R &= C \\ S &= C - I - R, \end{aligned}$$

Dari sistem persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda I}{f(I)} (C - I - R) - (\delta + \gamma) I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\delta + \nu) R. \end{aligned} \tag{4}$$

Untuk memastikan kekuatan infeksi tidak monoton, diasumsikan bahwa:

(H1) $f(0) > 0$ dan $f'(I) > 0$ untuk $I > 0$;

(H2) terdapat $\xi > 0$ sehingga $(I / f(I))' > 0$ untuk $0 < I < \xi$ dan $(I / f(I))' < 0$ untuk $I > \xi$.

Menentukan titik tetap (4) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda I}{f(I)} (C - I - R) - (\delta + \gamma) I = 0 \\ \frac{\lambda I}{f(I)} (C - I - R) - (\delta + \gamma) I &= 0 \\ I \left[\frac{\lambda}{f(I)} (C - I - R) - (\delta + \gamma) \right] &= 0 \\ I &= 0 \\ R &= C - I - \frac{(\delta + \gamma) f(I)}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\delta + \nu)R = 0$$

$$\gamma I - (\delta + \nu)R = 0$$

$$I = \frac{(\delta + \nu)R}{\gamma}$$

$$(\delta + \nu)R = \gamma I$$

$$R = \frac{\gamma I}{(\delta + \nu)}$$

Titik tetapnya (0,0) dan $(\frac{(\delta + \nu)R}{\gamma}, C - I - \frac{(\delta + \gamma)f(I)}{\lambda})$

Misal (H3) dan (H4) berlaku. Bila $R_0 > 1$, keseimbangan endemik dari (2) adalah stabil saat

$$g'(I^*) < \frac{C\nu - I^*\nu - C\delta}{I^*(-C + I^* + R^*)^2}, \quad (5)$$

Dan tidak stabil saat

$$g'(I^*) > \frac{C\nu - I^*\nu - C\delta}{I^*(-C + I^* + R^*)^2}, \quad (6)$$

Bukti. Matriks Jacobian dari (2) pada E^* adalah

$$J_1 = \begin{bmatrix} (C - I^* - R^*)(g(I^*) + I^*g'(I^*)) - I^*g - \delta - \gamma & -I^*g \\ \gamma & -\delta - \nu \end{bmatrix}$$

Kemudian

$$\det(J_1) = g'(I^*)I^*(\delta + \nu)(-C + I^* + R^*) + D \quad (7)$$

Dimana

$$D = (d + \nu)(d + \gamma) + g(I^*)(-Cd - C\nu + 2\delta I^* + 2I^*\nu + dR^* + R^*\nu + \gamma I^*)$$

Dengan menggunakan (4.3), kita punya

$$g(I^*) = \frac{d + \gamma}{C - I^* - R^*}. \quad (8)$$

Dengan

$$D = \frac{(d + \gamma)I^*(d + \nu + \gamma)}{C - I^* - R^*}. \quad (9)$$

Dengan menganalisis untuk keberadaan E^* , kita lihat bahwa $F^1(I^*) > 0$. Jadi

$$g'(I^*) < \frac{g^2(I^*)(d + \nu + \gamma)}{(d + \nu)(d + \gamma)} = \frac{(d + \nu)(d + \nu + \gamma)}{(-C + I^* + R^*)^2(d + \nu)}. \quad (10)$$

Menurut (7) dan (9), $\det(J_1) > 0$. Maksudnya bahwa kestabilan E^* ditentukan oleh trace J_1 .

Catatan bahwa

$$\text{trace}(J_1) = g'(I^*)(I^*(C - I^* - R^*)) + (C - 2I^* - R^*)g'(I^*) - 2d - \gamma - \nu.$$

Menggunakan (8) didapat

$$\text{trace}(J_1) = g'(I^*)I^*(C - I^* - R^*) - \frac{\nu(C - I^*) + Cd}{(C - I^* - R^*)}.$$

dengan $\text{trace}(J_1) < 0$ bila (5) tetap dan $\text{trace}(J_1) > 0$ bila (6) tetap. Oleh karena itu, E^* adalah stabil bila (5) tetap dan tak stabil bila (6) tetap.

Misal E_1 dan E_2 stabil. Analisis keberadaan dari E_1 dan E_2 berakibat $F'(I_1) < 0$ dan $F'(I_2) > 0$. Bila J_{21} dan J_{22} adalah masing-masing matriks Jacobian dari (2) pada E_1 dan E_2 , maka dengan menggunakan pembicaraan yang sama sesuai dengan bukti pada Theorem 4.1 kita lihat $\text{trace}(J_{21}) < 0$ dan $\text{trace}(J_{22}) > 0$. Karena itu, E_1 adalah saddle dan E_2 adalah node atau focus. Maksudnya model mungkin punya saddle node bifurcation.

Pada bagian ini, kita tetapkan fungsi g di system (2) sebagai berikut:

$$g(I) = \lambda \frac{I}{1 + pI + qI^2}, \quad (11)$$

dengan fungsi g diberikan di (5.1) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \lambda \frac{I^2}{1 + pI + qI^2} (C - I - R) - (\delta + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\delta + \nu)R. \end{aligned} \quad (12)$$

Dengan menggunakan formula bilangan dasar reproduksi di [15], didapat $R_0 = 0$. Kemudian dengan menggunakan argumen yang lalu, kita lihat tidak terdapat keseimbangan endemik di (12) bila

$$\lambda C \leq p(\delta + \gamma) \quad (13)$$

Atau

$$\begin{cases} \lambda C > p(\delta + \gamma), \\ \lambda^2 (\delta + \nu) C^2 < 2p\lambda (\delta + \gamma) (\delta + \nu) C, \\ -(\delta + \gamma) (p^2 (\delta + \gamma) (\delta + \nu) - 4q(\delta + \gamma) (\delta + \nu) - 4\lambda (\delta + \nu + \gamma)), \end{cases} \quad (14)$$

Hanya terdapat satu keseimbangan endemik di (12) bila

$$\begin{cases} \lambda C > p(\delta + \gamma), \\ \lambda^2 (\delta + \nu) C^2 = 2p\lambda (\delta + \gamma) (\delta + \nu) C, \\ -(\delta + \gamma) (p^2 (\delta + \gamma) (\delta + \nu) - 4q(\delta + \gamma) (\delta + \nu) - 4\lambda (\delta + \nu + \gamma)), \end{cases} \quad (15)$$

Dan terdapat dua kesetimbangan endemik (12) bila

$$\begin{cases} \lambda C > p(\delta + \gamma), \\ \lambda^2 (\delta + \nu) C^2 > 2p\lambda (\delta + \gamma) (\delta + \nu) C, \\ -(\delta + \gamma) (p^2 (\delta + \gamma) (\delta + \nu) - 4q(\delta + \gamma) (\delta + \nu) - 4\lambda (\delta + \nu + \gamma)), \end{cases} \quad (16)$$

Dari syarat di atas untuk menentukan keberadaan keseimbangan endemik, didefinisikan

$$R_1 = \frac{\lambda C}{\delta + \gamma}$$

Kemudian didapat syarat keseimbangan endemik bila

$$R_1 > p + 2\sqrt{q + \lambda \frac{\delta + \nu + \gamma}{(\delta + \gamma)(\delta + \nu)}}, \quad (17)$$

dan tidak terdapat keseimbangan endemik bila

$$R_1 < p + 2\sqrt{q + \lambda \frac{\delta + \nu + \gamma}{(\delta + \gamma)(\delta + \nu)}}, \quad (18)$$

Jadi, kenaikan dari parameter p, q dan γ mengalami penurunan peluang saat keseimbangan endemik terjadi, tetapi naiknya ukuran populasi menambah kemungkinan terjadinya keseimbangan endemik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk membahas endemik atau tidak dengan menggunakan (17) dan (18) diperoleh hasil komputasi dengan mathematica

$$\frac{\lambda C}{\delta + \gamma} > p + 2\sqrt{q + \lambda \frac{\delta + \nu + \gamma}{(\delta + \gamma)(\delta + \nu)}},$$

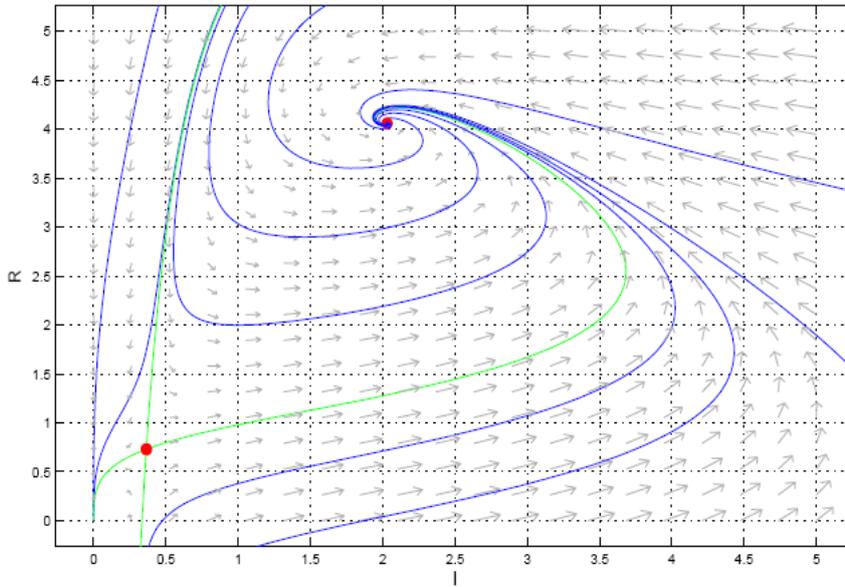
$$R_1 = \frac{1(12.4)}{1+3} = 12.4/4 = 3.1$$

$$p + 2\sqrt{q + \lambda \frac{\delta + \nu + \gamma}{(\delta + \gamma)(\delta + \nu)}}$$

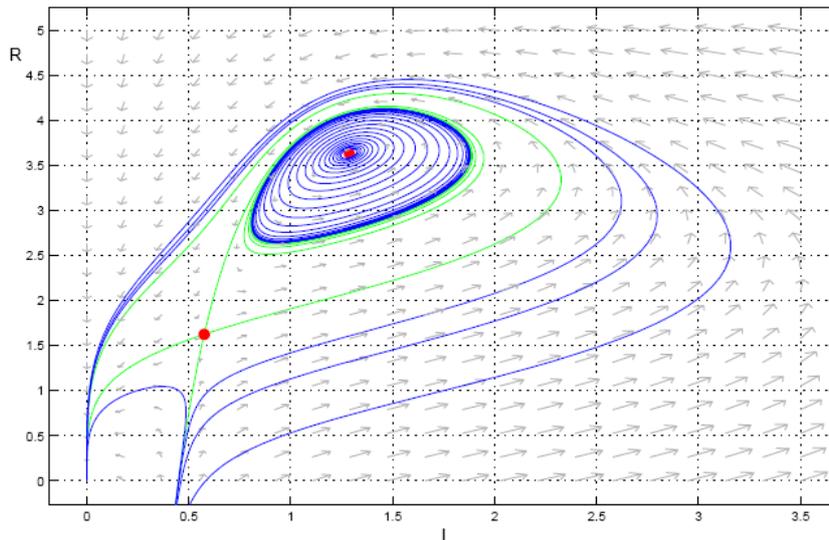
$$= 2.5\sqrt{0.001 + 1\left(\frac{1+0+3}{(1+3)(1+0)}\right)}$$

$$= 2.5\sqrt{1.001} = 2.5012$$

Perilaku asymptotic dari (1) ketika (4.7) diepenuhi. Kita mulai dari rata-rata recovery γ . Untuk $p=0.1, q=0.1, d=0.4, C=8, \nu=0$ dan $\lambda=0.5$. Maka (17) dipenuhi saat $0 < \gamma < 1.25$. Trace dari matriks Jacobian pada E_2 adalah negatif ketika $0 < \gamma < 1.14$ dan positif saat $1.14 < \gamma < 1.25$. Bila γ dinaikan dari 0 didapat tiga tipe dari perubahan perilaku. Bila $0 < \gamma < 1.111$ kestabilan manifolds dari saddle memisahkan diri di bagian dalam dari quadran pertama di R^2 dalam dua bagian sehingga awal orbits dari bagian kiri menuju keseimbangan bebas penyakit $(0,0)$, pada saat awal orbit dari sebelah kanan menuju ke keseimbangan endemik E_2 (lihat gambar 3). Bila $1.111 < \gamma < 1.14$ terjadi limit cycle tidak stabil sehingga awal dari bagian dalam menuju keseimbangan endemik di E_2 , saat awal orbit dari bagian luar akan menuju keseimbangan bebas penyakit di $(0,0)$, kecuali untuk manifolds (lihat gambar 4), dan limit cycle terjadi naik. Bila $1.14 < \gamma < 1.25$ limit cycle tidak ada dan semua orbit positif, kecuali dua keseimbangan endemik dan dua kestabilan manifolds dari saddle menuju keseimbangan bebas penyakit (lihat gambar 3).

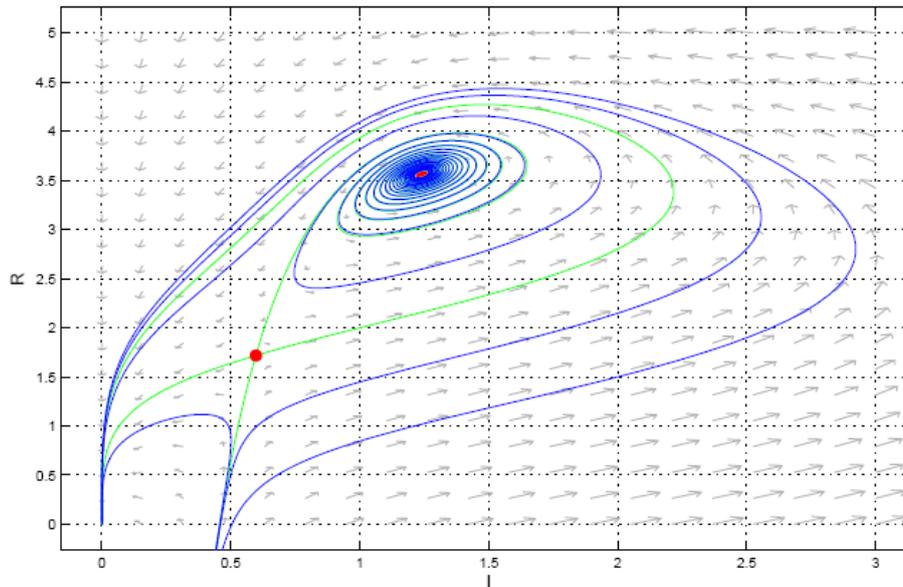


Gambar 1. Dua keseimbangan kestabilan saat $\gamma = 0,8$.

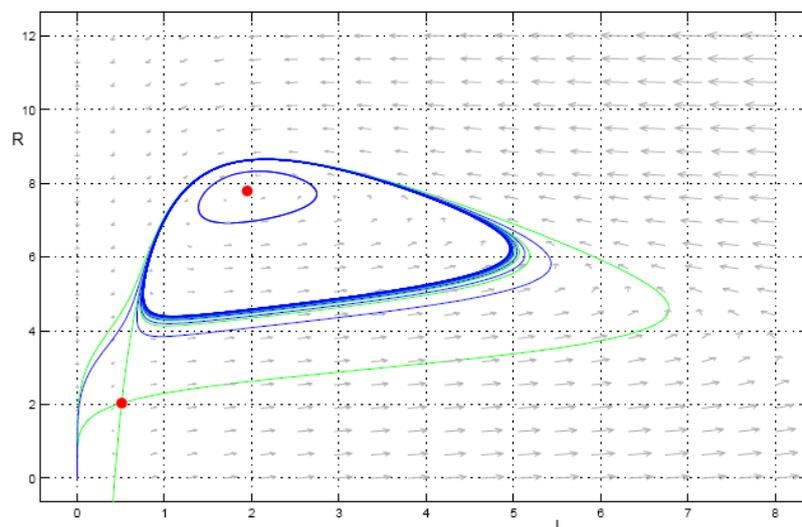


Gambar 2. Dua keseimbangan kestabilan dengan limit cycle tak stabil saat $\gamma = 1,13$.

Maksudnya adalah penyakit berhenti, meskipun terdapat dua kestabilan endemik. Bila p dan q kecil, yaitu bila pencegahan terhadap perubahan perilaku lemah, terdapat dua limit cycle di (12). Lebih besar 1 adalah tidak stabil dan kurang dari 1 adalah stabil sehingga bagian dalam orbit dari cycle yang besar (kecuali di E_2) menuju cycle yang kecil untuk waktu menuju tak hingga, dan hampir semua orbit luar menuju keseimbangan bebas penyakit untuk waktu mendekati tak hingga (lihat gambar 3). Tentu saja bila diketahui $p=0.005$, $q=0.008$, $v=0$, $\gamma=4$, $d=1$, $\lambda=1$, terjadi saddle node bifurcation dari orbit periodik nonhyperbolic pada (lihat gambar 2). Saat



gambar 3. Beakhirnya penyakt saat $\gamma = 1,15$ walaupun terdapat dua keseimbangan



Gambar 4. Limit cycle tak stabil dan limit cycle stabil.

$12.39579 < C < 12.421$, terjadi dua limit cycle. Penyusutan limit cycle kecil terhadap keseimbangan endemik E_2 di 12.421. Untuk $12.421 < C < 12.4297$ cycle yang lebih besar tetap ada, tetapi yang lebih kecil lenyap. Terjadinya orbit homoclinic pada (lihat gambar 4)., orbit homoclinic rusak dan kestabilan manifolds dari split saddle pada daerah fisibel dalam dua bagian, sehingga salah satu daerah menarik daerah lainnya untuk

SIMPULAN

Pada makalah ini, kita telah mempelajari model epidemik dengan kekuatan infeksi nonlinear. Untuk model strategi intervensi, kita telah menunjukkan bahwa keseimbangan bebas penyakit adalah global stabil bila bilangan dasar reproduksi kurang dari 1, dan keseimbangan endemik tunggal adalah global stabil bila bilangan dasar reproduksi lebih besar dari 1. Dari hasil yang diperoleh, kita telah membuktikan bahwa kebijakan intervensi menurunkan tingkat endemik. Untuk model dengan kekuatan infeksi penuh, dengan bantuan simulasi komputer, kita telah menunjukkan bahwa model kaya dengan perubahan perilaku. Dengan kata lain, model mempunyai saddle node bifurcation dari keseimbangan endemic, Hopf bifurcations, saddle node bifurcation dari nonhyperbolic periodic orbit, berakibat pada keberadaan dari dua limit cycle dan homoclinic bifurcations. Kita juga

menemukan model punya dua titik tetap kestabilan sehingga hasil dari evolusi penyakit bergantung pada saat kedudukan awal yang dialami. Dua contoh telah menunjukkan bahwa penyakit dapat berakhir, walaupun terdapat dua keseimbangan endemik. Maksudnya adalah tidak penting untuk menggerakkan peubah kontrol R_1 berikut didefinisikan oleh bagian kanan dari pertidaksamaan (8) untuk melenyapkan penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] E. Beretta and Y. Takeuchi, Global stability of an *SIR* epidemic model with time delays. *J. Math. Biol.* 33 (1995), 250-260.
- [2] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Texts in Applied Mathematics, 40. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] V. Capasso and G. Serio, A generalization of the Kermack-Mckendrick deterministic epidemic model, *Math. Biosci.* 42 (1978), 43-61.
- [4] V. Capasso and R. E. Wilson, Analysis of a reaction-diffusion system modeling man-environment-man epidemics, *SIAM J. Appl. Math.* 57 (1997), 327-346.
- [5] O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation*. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [6] A. Dhooge, W. Govaerts and Y.A. Kuznetsov, Limit cycles and their bifurcations in MatCont. <http://allserv.UGent.be/ajdhooge>.
- [7] J.M. Hyman and J. Li, Behavior changes in SIS STD models with selective mixing. *SIAM J. Appl. Math.* 57 (1997), 1082-1094.
- [8] H.W. Hethcote and S.A. Levin, Periodicity in epidemiological models, in "*Applied mathematical biology*", ed. S. A. Levin, T. G. Hallam and L. J. Gross, Biomathematics Texts, Vol.18, Springer-Verlag, New York, 1989. pp. 193-211.
- [9] W. M. Liu, S. A. Levin and Y. Iwasa, Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models, *J. Math. Biol.* 23 (1986), 187-204.
- [10] W. M. Liu, H. W. Hethcote and S. A. Levin, Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates, *J. Math. Biol.* 25 (1987), 359-380.
- [11] Z. Ma, Y. Zhou, W. Wang and J. Zhen, *Epidemic dynamics and its mathematical modelling*. Chinese Academic Press. Beijing. 2004.
- [12] M. Lizana and J. Rivero, Multiparametric bifurcations for a model in epidemiology. *J. Math. Biol.* 35 (1996), 21-36.
- [13] J.C. Polking, <http://math.rice.edu/dfield/6.5>.
- [14] S. Ruan and W. Wang, Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate. *J. Differential Equations.* 188 (2003), 135-163.
- [15] P. van den Driessche and J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Math. Biosci.* 180 (2002), 29-48.
- [16] T. W. Hwang and Y. Kuang, Deterministic extinction effect of parasites on host populations. *J. Math. Biol.* 46 (2003), 17-30.
- [17] W. Wang and S. Ruan, Simulating the SARS outbreak in Beijing with limited data. *J. Theor. Biol.* 227 (2004), 369-379.
- [18] W. Wang and X. Zhao, An epidemic model in a patchy environment. *Math. Biosci.* 190 (2004), 39-69.
- [19] H. Zhu, S.A. Campbell and G.S.K. Wolkowicz, Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM J. Appl. Math.* 63 (2002), 636C682.