Tinjauan Aliran Fluida dengan Menggunakan Metode Homotopi

Abd. Djabar Mohidin

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Gorontalo

Abstrak

Dalam makalah ini, akan dibahas tinjauan matematis mengenai gelombang permukaan pada kedalaman yang cukup besar, ayarat batas pada domain fluida yang ditunjukkan berupa fungsi taklinear, sehingga penyelesaian masalah nilai batas yang muncul menjadi sulit dilakukan baik secara analitik, maupun secara numeric dengan metode penyelesaian masalah nilai batas yang disebut metode homotopi.

Air laut dianggap sebagai suatu fluida ideal, yaitu fluida yang takmampat (*incompressible*) dan takkental (*inviscid*). Domain fluida dimisalkan hanya berdimensi dua, meskipun kenyataannya berdimensi tiga. Hal ini dapat dilakukan karena sifat homogen fluida, yaitu garis arusnya pararel dengan garis arus yang lain pada suatu bidang yang tetap, bahkan partikel-partikel pada bidang tersebut memiliki kecepatan dan arah yang sama (Streeter, 1984). Garis arus adalah garis yang digambarkan pada fluida yang memiliki kemiringan pada tiap titik sama dengan kecepatan partikel fluida di titik tersebut.

Masalah gelombang baik permukaan maupun internal merupakan suatu masalah taklinear, yang sulit diselesaikan secara analitik sehingga menarik perhatian peneliti sejak pertengahan abad ke-19. Stokes menggunakan metode perturbasi untuk mendapatkan solusi hampiran sampai orde ke-5 dalam penghitungan amplitudo gelombang (Stokes, 1883). Beberapa peneliti telah menerapkan metode perturbasi yang dilakukan Stokes, seperti Schwartz dengan menghitung hingga orde ke-58 (Schwartz, 1974). Longuct-Higgins memperluas yang dilakukan Stokes untuk menghitung amplitudo gelombang sampai orde tinggi dan memeriksa pula kestabilan solusinya (Longuct–Higgins, 1978). Chen dan Saffman menggunakan analisis numerik untuk memperlihatkan bifurkasi pada titik tetap untuk gelombang internal yang tunak (Chen dan Saffman, 1980).

Fluida adalah zat yang dapat mengalir, artinya zat yang bergerak terhadap sekitarnya. Persamaan dasar akan diturunkan berdasarkan hukum kekekalan massa dan momentum. Hukum kekekalan massa didasarkan pada kesetimbangan massa. Perubahan massa merupakan selisih antara massa yang masuk dan keluar. Misalkan $\rho(x,y,t)$ rapat massa fluida, $u(x,y,t)$ dan $w(x,y,t)$ masing-masing kecepatan partikel fluida pada arah horizontal dan arah vertikal. Massa yang masuk pada elemen luas tersebut adalah $(\rho u)|_x\,\Delta y$ dan $(\rho w)|_y\,\Delta x$, sedangkan massa yang keluar adalah $(\rho u)|_{x+\Delta x}\,\Delta y$ dan $(\rho w)|_{y+\Delta y}\,\Delta x$. Jika selisih antara massa yang masuk dengan massa yang keluar pada arah horizontal adalah $\rho u\Delta y|_x - \rho u\Delta y|_{x+\Delta x}$, sedangkan arah vertikal adalah $\rho w\Delta x|_y - \rho w\Delta x|_{y+\Delta y}$, maka laju perubahan massa fluida pada arah horizontal dan vertikal adalah

$$\Delta x\Delta y\frac{\partial\rho}{\partial t} = \Delta y\left[(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}\right] + \Delta x\left[(\rho w)|_y - (\rho w)|_{y+\Delta y}\right]. \qquad (1)$$

Jika persamaan (2.1) dibagi oleh $\Delta x\Delta y$, maka diperoleh

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left[\frac{(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}}{\Delta x}\right] + \left[\frac{(\rho w)|_y - (\rho w)|_{y+\Delta y}}{\Delta y}\right].$$

Untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta y \to 0$, diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial y},$$

atau dapat dituliskan

$$\rho_t = -[u\rho_x + \rho u_x + w\rho_y + \rho w_y] \tag{2}$$

Persamaan (2) menyatakan laju perubahan rapat massa yang disebabkan oleh perubahan massa. Penulisan bentuk lain dari persamaan (2) adalah dengan menggunakan operator *D/Dt* sebagai simbol untuk turunan total suatu fungsi dengan variabel *x*, *y*, *t* terhadap waktu *t*, yaitu

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3}$$

Sehingga turunan total dari ρ terhadap waktu t adalah

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho_t + u\rho_x + w\rho_y. \tag{4}$$

Jika persamaan (2) disubstitusikan ke dalam persamaan (4), maka diperoleh

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(u_x + w_y) \tag{5}$$

Dengan notasi vektor persamaan (5) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\nabla \cdot \vec{q}\right), \qquad \text{dengan} \qquad \vec{q} = (u, w).$$

Jika digunakan asumsi fluida takmampat (*incompressible*), maka rapat massa konstan sehingga persamaan (2.5) menjadi

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Persamaan (4) dan (6) masing – masing dapat ditulis menjadi

$$\left.\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + w\rho_y &= 0, \\ u_x + w_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Persamaan (7) merupakan persamaan kontinuitas untuk fluida takmampat.
Selanjutnya, jika diasumsikan bahwa partikel fluida takberotasi (*irrotational*), yaitu $\nabla \times \vec{q} = 0$, maka terdapat fungsi kecepatan potensial ϕ, sehingga

$$\vec{q}(x, y, t) = \nabla\phi(x, y, t).$$

Jadi persamaan (6) dapat ditulis

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ atau } \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \tag{8}$$

Persamaan (8) disebut *persamaan kontinuitas fluida yang tak termampatkan*. Selanjutnya *hukum kekekalan momentum* dinyatakan sebagai laju perubahan momentum yang memengaruhi gaya pada permukaan fluida pada elemen luas pada Laju perubahan momentum merupakan selisih antara momentum masuk dan keluar serta ditambah dengan gaya-gaya yang berkerja pada elemen luas tersebut.
Faktor lain yang perlu diperhatikan adalah gaya-gaya yang terjadi pada elemen luas tersebut yaitu akibat tekanan fluida *p*, dan gaya gravitasi *g*. Gaya gesekan diabaikan karena fluida takkental (*inviscid*).

Dalam arah sumbu- x, momentum yang masuk adalah $(\rho uu)|_x\,\Delta y$ dan yang keluar $(\rho uu)|_{x+\Delta x}\,\Delta y,$ sedangkan dalam arah sumbu- y, momentum yang masuk dan keluar berturut - turut adalah $(\rho wu)|_y\,\Delta x$ dan $(\rho wu)|_{y+\Delta y}\,\Delta x$.

Jadi perubahan rata- rata momentum pada arah sumbu-x adalah

$$\Delta x\Delta y\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=\Delta y(\rho uu)|_x-\Delta y(\rho uu)|_{x+\Delta x}+\Delta x(\rho wu)|_y-\Delta x(\rho wu)|_{y+\Delta y}+$$
$$\Delta y(p|_x-p|_{x+\Delta x})+\rho g_x\Delta x\Delta y \tag{9}$$

sedangkan perubahan rata – rata momentum pada arah sumbu- y adalah

$$\Delta x\Delta y\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}=\Delta y(\rho uw)|_x-\Delta y(\rho uw)|_{x+\Delta x}+\Delta x(\rho ww)|_y-\Delta x(\rho ww)|_{y+\Delta y}+$$
$$\Delta x(p|_y-p|_{y+\Delta y})+\rho g_y\Delta x\Delta y. \tag{10}$$

Bentuk $\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\right)$ dan $\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}\right)$ adalah laju perubahan

Momentum dalam elemen luas untuk arah sumbu- x dan sumbu- y. Karena fluida ideal, berarti fluida takkental, maka tegangan geser diabikan. Sedangkan bentuk $\Delta y(p|_x-p|_{x+\Delta x})+\rho g_x\Delta x\Delta y$ pada persamaan (9) menyatakan jumlah gaya yang berkerja pada sumbu- x, sedangkan bentuk $\Delta x(p|_y-p|_{y+\Delta y})+\rho g_y\Delta x\Delta y$ pada persamaan (10) menyatakan jumlah gaya yang berkerja pada sumbu- y.

Untuk menyederhanakan persamaan (9) dan (10) kedua ruas persamaan tersebut dibagi oleh $\Delta x\Delta y$ dan dengan menyatakan $\Delta x\to 0$ dan $\Delta y\to 0,$ diperoleh:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=-\left(\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho wu)}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x\ , \tag{11}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}=-\left(\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho ww)}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y \tag{12}$$

Dengan menggunakan persamaan kontinuitas untuk fluida tak termampatkan, persamaan (11) dan (12) menjadi

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt}&=-\frac{\partial p}{\partial x},\\ \rho\frac{Dw}{Dt}&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

atau dapat ditulis

$$\left.\begin{aligned}\rho(u_t+uu_x+wu_y)+p_x&=0,\\ \rho(w_t+uw_x+ww_y)+p_y+\rho g&=0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dengan demikian, dari persamaan (7) dan (14), persamaan dasar fluida ideal diberikan dalam sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\rho_t+u\rho_x+w\rho_y&=0\\ u_x+w_y&=0\end{aligned}\right\}\\ &\left.\begin{aligned}\rho(u_t+uu_x+wu_y)+p_x&=0\\ \rho(w_t+uw_x+ww_y)+p_y+\rho g&=0.\end{aligned}\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

Dua persamaan pertama adalah persamaan kontinuitas, sedangkan dua persamaan terakhir adalah persamaan Euler.

PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas persamaan dasar untuk aliran tunak. Ilustrasi aliran tunak adalah sebagai berikut. Misalkan suatu gelombang difoto dan gelombang tersebut bergerak seakan-akan bingkai foto yang bergerak, sehingga kecepatan gelombang sama dengan kecepatan bingkai. Misalkan gelombang tersebut hanya bergerak ke arah kanan dengan kecepatan *c*, maka koordinat *X* dapat dituliskan $X = x - ct$ sehingga

$$\partial_x = \partial_X \ , \partial_t = -c\partial_X .$$

Selanjutnya bentuk tunak dari persamaan (15) dapat ditulis

$$-c\rho_X + u\rho_X + w\rho_y = 0 \tag{16}$$

atau

$$U\rho_X + w\rho_y = 0,$$

dengan $U = u - c,$ sedangkan persamaan (15) dapat dituliskan sebagai berikut

$$U_X + w_y = 0.$$

Dengan cara yang sama diperoleh bentuk tunak dari persamaan (15) sebagai berikut

$$\rho(UU_X + wU_y) + p_x = 0$$

$$\rho(Uw_X + ww_y) + p_y + \rho g = 0.$$

Untuk memudahkan penulisan, notasi *X* dan *U* pada setiap persamaan ditulis dalam notasi *x* dan *u*, sehingga persamaan dasar fluida ideal untuk aliran tunak adalah:

$$\left.\begin{aligned} u\rho_x + w\rho_y &= 0 \\ u_x + w_y &= 0 \\ \rho(uu_x + wu_y) + p_x &= 0 \\ \rho(uw_x + ww_y) + p_y + \rho g &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Keempat persamaan ini akan disederhanakan untuk memperoleh persamaan gerak partikel fluida dengan aliran tunak sebagai berikut. Eliminasi *p* pada persamaan (17) dengan terlebih dahulu menurunkan masing-masing persamaan berturut-turut terhadap peubah *x* dan *y*, diperoleh

$$\begin{aligned} &\left(u_x w_x + w_x w_y\right) - \left(u_x u_x + u_y w_y\right) + \left(uw_{xx} + ww_{xy}\right) - \left(uu_{xy} + u_{yy} w\right) + \\ &\frac{1}{\rho}\left(\rho_x u w_x + \rho_x w w_x\right) - \frac{1}{\rho}\left(\rho_y u_x u + \rho_y u_y\right) + \frac{\rho_x g}{\rho} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Substitusikan persamaan (17 ke persamaan (18), diperoleh

$$\left(uw_{xx} + ww_{xy}\right) - \left(uu_{xx} + u_{yy}w\right) + \frac{\rho_x}{\rho}\left(uu_y + ww_y\right) - \frac{\rho_y}{\rho}\left(uu_x + ww_x\right) + \frac{\rho_x g}{\rho} = 0 \tag{19}$$

Misalkan $\xi = w_x - u_y$ dan gunakan diferensial total terhadap ξ, persamaan (19) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{D\xi}{Dt} + \frac{\rho_x}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right) - \frac{\rho_y}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right) + \frac{\rho_x g}{\rho} = 0, \tag{20}$$

dengan

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Karena $\rho = \rho(\phi)$ dan $\phi = \phi(x, y),$ persamaan (20) menjadi

$$\frac{D}{Dt}\left(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \frac{\rho_\phi}{\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right) + gy\right)\right) = 0 \tag{21}$$

Jika persamaan (21) diintegralkan terhadap *t*, maka diperoleh

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}+\frac{\rho_\phi}{\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)+gy\right)=H(x)$$

atau
$$\nabla^2\phi+\frac{\rho_\phi}{\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)+gy\right)=H(x). \qquad (22)$$

Misalkan fungsi $H(x)$ menggambarkan perubahan rapat massa dalam fluida yang ditentukan dengan cara berikut. Misalkan diberikan kondisi *upstream*, yaitu

$$\phi+\gamma=Cy \ \text{ di } \ x\to\pm\infty,$$

maka diperoleh $\phi_x=0,\ \phi_{xx}=0,\ \phi_y=C,$ dan $\phi_{yy}=0,$ sehingga dari persamaan (22) diperoleh

$$H(x)=\frac{\rho_\phi}{\rho}\left(\frac{C^2}{2}+g\left(\frac{\phi+\gamma}{C}\right)\right) \qquad (23)$$

Substitusikan persamaan (22) ke persamaan (23), diperoleh

$$\nabla^2\phi+\frac{\rho_\phi}{\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\phi_x^2+\phi_y^2-C^2\right)+g\left(y-\frac{\phi+\gamma}{C}\right)\right)=0 \qquad (24)$$

Misal fluida yang di tinjau memiliki rapat massa yang konstan, maka persamaan (24) menjadi persamaan Laplace berikut:

$$\nabla^2\phi=0, \qquad (25)$$

dengan syarat batas sebagai berikut

$$C^2\phi_{xx}+g\phi_y+\frac{1}{2}\nabla\phi\nabla(\nabla\phi\nabla\phi)-2C\nabla\phi\nabla\phi_x=0 \text{ di } y=\zeta(x) \qquad (26)$$

$$\zeta(x)=\frac{1}{\mathrm{g}}\left(\mathrm{C}\phi_x-\frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi\right) \ \text{ di } \ y=\zeta(x). \qquad (27)$$

Masalah nilai batas pada persamaan (25)-(27) akan digunakan dalam penelitian ini sebagai model persamaan untuk menjelaskan gerak gelombang permukaan pada fluida dengan kedalaman yang cukup besar. Berikut ini diberikan ilustrasi konsep metode homotopi. Misalkan diberikan persamaan diferensial berikut:

$$A[u(t)]=0, \qquad (28)$$

dengan *A* operator turunan, *t* variabel bebas dan *u(t)* fungsi yang akan ditentukan. Selanjutnya didefinisikan pula suatu operator linear $\mathfrak{L}$ yang memenuhi

$$\mathfrak{L}[f]=0, \ \text{ bila } \ f=0. \qquad (29)$$

Misalkan operator *A* dibagi menjadi dua bagian, yaitu $\mathfrak{L}$ dan $\mathfrak{N}$ yang masing-masing merupakan operator yang linear dan taklinear, sehingga persamaan (28) menjadi :

$$\mathfrak{L}[u(t)]+\mathfrak{N}[u(t)]=0.$$

Misalkan $u_0(t)$ merupakan pendekatan awal dari penyelesaian persamaan (28) dan $q\in[0,1]$ suatu parameter. Definisikan fungsi real $\phi(t,q)\colon \Omega\times[0,1]\to\Re$, dan suatu fungsi *H* sebagai berikut :

$$H[\phi,q]=(1-q)\mathfrak{L}[\phi(t)-u_0(t)]+qA[\phi] \qquad (30)$$

atau

$$H[\phi,q]=\mathfrak{L}[\phi(t)]+q\mathfrak{N}[\phi(t)]-(1-q)\mathfrak{L}[u_0(t)].$$

Berdasarkan persamaan (2.30), untuk $q=0$ dan $q=1$ masing-masing memberikan persamaan berikut:

$$H[\phi(t,0),0]=\mathfrak{L}[\phi(t,0)-u_0(t)]$$

dan

$$H[\phi(t,1),1]=A[\phi(t,1)]. \qquad (31)$$

Menurut persamaan (28), (29) dan (31) diperoleh bahwa fungsi $\phi(t,0)=u_0(t)$ dan $\phi(t,1)=u(t)$ masing-masing merupakan penyelesaian dari persamaan

$$H[\phi(t,0),0]=0 \text{ dan } H[\phi(t,1),1]=0.$$

Dengan demikian peningkatan nilai q dari 0 ke 1 menyatakan perubahan nilai $H[\phi(t),q]$ dari $\mathfrak{L}[\phi(t)-u_0(t)]$ ke $A[\phi(t)]$. Dalam topologi hal ini disebut dengan deformasi, sedangkan $\mathfrak{L}[\phi(t)-u_0(t)]$ dan $A[\phi(t)]$ disebut dengan homotopi.

SIMPULAN

Kajian ini menunjukan bahwa metode homotopi dapat digunakan untuk memecahkan masalah taklinear yang komplek dengan kondisi batas taklinear. Pendekatan terbaru tidak melibatkan parameter perturbasi dan menunjukan kekonvergenan yang lebih baik jika dibandingkan dengan penggunaan jenis pendekatan lainnya. Parameter digunakan di dalam ekspansi barisan tidak dijumpai pada ukuran batas permukaan yang diperoleh maupun pada solusinya. Yang paling penting adalah penggunaan metode ekspansi homotopi pade dapat menentukan solusi dari suatu barisan. Selanjutnya aplikasi dari metode homotopi pade expansi mengeliminir dari parameter tambahan yang digunakan untuk memformula daerah kekonvergenan.

DAFTAR PUSTAKA

Chen B, Saffman, P.G. 1980. Numerical evidence for the existence of new types of gravity waves of permanent form of deep water. *Studies in appl. Math* 62:1-21.

Gerkema T. 1994. *Nonlinear Dispersive Internal Tides: Generation Modeis for a Rotating Ocean* [PhD-Thesis]. The Netherlands: Univ. of Utrecht.

Holloway P, Pelinovsky E, Talipova T. 2001. Internal Tide Transformation and Oceanic Internal Solitary wave. Dalam Grimshaw R.(Ed) *Stratified Flows*. Dordrecht: Kluwer.

Liao, Shinjun, Cheung Kwok Fai. 2003. Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water. *Journal of Engineering Mathematics*. 45: 105-116.

Liao, Shijun. 2004. *Beyond Pertubation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, London, New York Washington, D.C.

Longuet, Higgins M.S. 1978. The instability of gravity of finite amplitude in deep water: subharmonics. *Proc. R. Soc. Lond. A* 360: 471-488.

Osborne A.R, T.L Burch. 1980. Internal Soliton in the Andaman Sea. *Science* 208: 451-460.

Schwartz, L.W. 1974. Computer extension and analytic continuitas of Stokes' expansion for gravity waves. *J.of Fluid Mech* 62(3): 553-578.

Stokes, G.G. 1883. On the highest waves of uniform propagation. *Proc. Cambridge Phil. Soc* 4: 361-365.

Streeter, V. L. 1984. *Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Book Company, New York Washington, D.C. Inc.