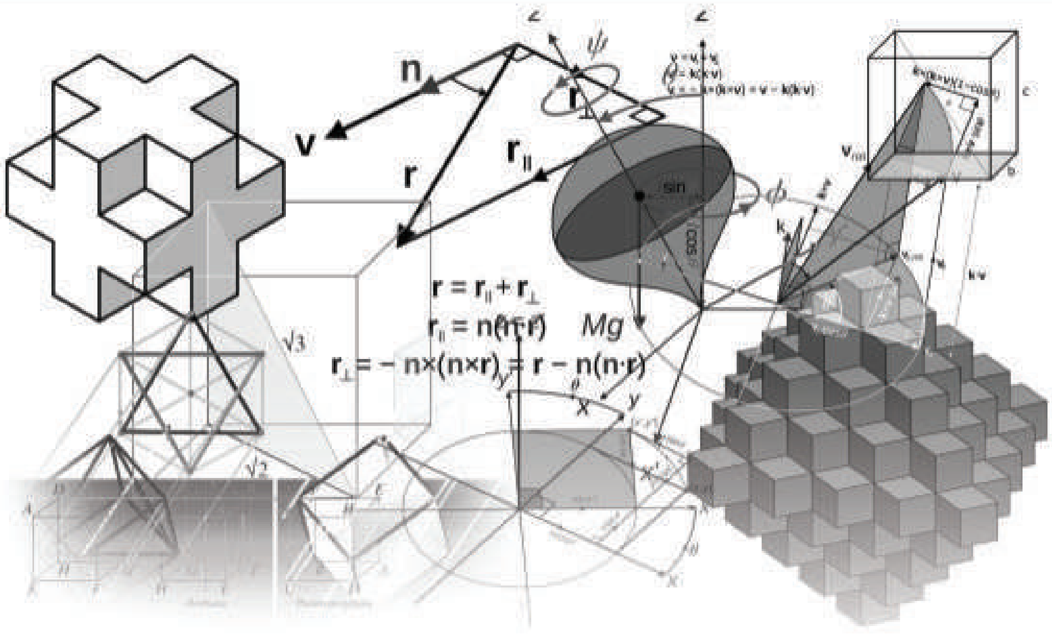
Arie Anang Setyo, M.Pd
Prof. Dr. Sarson P. Pomalato, M.Pd
Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd
Dr. Tedy Machmud, M.Pd.

Buku Ajar

MULTIMODAL GEOMETRI ANALITIK BIDANG

Berorientasi TPACK dan Keterampilan ABAD 21



Editor :
Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd | Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd
Dr. Ismail Djakaria, M.Si | Dr. Rustam I. Husein, M.Pd
Novriyanto Napu, M.AppLing, PhD | Dr. Haryanto, S.Pd., MSc
Prof. Dr. Novianty Djafri, M.Pd.I | Prof. Dr. Asna Aneta, M.Si
Prof. Dr. Ir. Hasim, M.Si

Buku Ajar

MULTIMODAL GEOMETRI ANALITIK BIDANG

Berorientasi TPACK dan Keterampilan ABAD 21

Buku ini merupakan bahan ajar multimodal mata kuliah geometri analitik bidang, yang disusun dengan berorientasi TPACK dan keterampilan abad 21. Pembahasan pada bahan ajar ini disajikan dengan memanfaatkan teknologi, pedagogi, dan konten mata kuliah geometeri analitik bidang dengan materi sistem koordinat kartesius, persamaan garis lurus, persamaan lingkaran, persamaan parabola, persamaan elips, dan persamaan hiperbola.

Materi yang disajikan dalam bahan ajar disajaikan dengan memaksimalkan keterampilan abad 21 (4Cs) berupa komunikasi, kolaborasi, berfikir kritis dan berfikir kreatif.

eureka media aksara
Anggota IKAPI
No. 225/JTE/2021

0858 5343 1992
eurekamediaaksara@gmail.com
Jl. Banjaran RT.20 RW.10
Bojongsari - Purbalingga 53362

ISBN 978-623-487-618-5
9 786234 876185

BUKU AJAR MULTIMODAL GEOMETRI ANALITIK BIDANG BERORIENTASI TPACK DAN KETERAMPILAN ABAD 21

Arie Anang Setyo, M.Pd.
Prof. Dr. Sarson P. Pomalato, M.Pd.
Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd.
Dr. Tedy Machmud, M.Pd

eureka
media aksara

PENERBIT CV.EUREKA MEDIA AKSARA

BUKU AJAR MULTIMODAL GEOMETRI ANALITIK BIDANG BERORIENTASI TPACK DAN KETERAMPILAN ABAD 21

Penulis : Arie Anang Setyo, M.Pd. | Prof. Dr. Sarson P. Pomalato, M.Pd. | Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd. | Dr. Tedy Machmud, M.Pd

Editor : Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd. | Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd. | Dr. Ismail Djakaria, M.Si. | Dr. Rustam I. Husein, M.Pd. | Novriyanto Napu, M.AppLing, PhD | Dr. Haryanto, S.Pd., M.Sc. | Prof. Dr. Novianty Djafri, M.Pd.I. | Prof. Dr. Asna Aneta, M.Si. | Prof. Dr. Ir. Hasim, M.Si.

Desain Sampul: Eri Setiawan

Tata Letak : Rizki Rose Mardiana

ISBN : 978-623-487-618-5

Diterbitkan oleh: **EUREKA MEDIA AKSARA, DESEMBER 2022**
ANGGOTA IKAPI JAWA TENGAH
NO. 225/JTE/2021

Redaksi:
Jalan Banjaran, Desa Banjaran RT 20 RW 10 Kecamatan Bojongsari Kabupaten Purbalingga Telp. 0858-5343-1992
Surel: eurekamediaaksara@gmail.com
Cetakan Pertama: 2022

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warah Matullahi Wabarakatuh, Segala puji penulis panjatkan kepada Yang Maha Kuasa dan pemberi Ilmu pengetahuan, Allah Subhanahu wa ta'ala, atas karunia, nikmat dan juga keberkahan Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan "Buku Ajar Multimodal Geometri Analitik Bidang Berorientasi TPACK dan Keterampilan Abad 21".

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan buku ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih pada semua pihak yang telah membantu penyusunan buku ini. Sehingga buku ini bisa hadir di hadapan pembaca.

Penulis sangat menyadari, dalam penulisan buku ajar ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh sebab itu, penulis sangat mengharapkan masukkan dan saran untuk penyempurnaan buku ajar ini.

Akhirnya, penulis mengharapkan agar kiranya buku ajar ini dapat dipergunakan dan dimanfaatkan oleh mahasiswa.

Sorong, Desember 2022
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR VIDEO

CPL DAN CPMK

A. Capaian Pembelajaran

1. CPL-PRODI (Capaian Pembelajaran Lulusan Program Studi)

Capaian pembelajaran lulusan program studi (CPL-PRODI) yang tercantum dalam kurikulum mata kuliah geometri analitik pada program studi pendidikan matematika Universitas Muhammadiyah Sorong antara lain.

a. Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri (S9).
b. Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya (KU1)
c. Mengaplikasikan konsep dan prinsip didaktik-pedagogis matematika serta keilmuan matematika untuk merencanakan pembelajaran, melaksanakan, dan mengevaluasi dengan memanfaatkan IPTEK yang berorientasi pada kecakapan hidup (life skills) (KK7)
d. Menguasai konsep, prinsip, dan prosedur dasar pengetahuan Matematika yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di satuan pendidikan menengah (PP1).

2. CPMK (Capaian Pembelajaran Mata Kuliah)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah yang dibebankan dalam mata kuliah geometri sesuai kurikulum yang di susun oleh Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Sorong adalah.

a. Mahasiswa mampu memahami konsep sistem koordinat kartesius dan melakukan analisis pemecahan masalah terkait sistem koordinat kartesius dengan penuh tanggung jawab (S9, KU1, KK7, PP1)
b. Mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait konsep persamaan garis lurus (KU1, KK7, PP1)
c. Mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait konsep persamaan lingkaran (KU1, KK7, PP1)
d. Mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait konsep persamaan parabola (KU1, KK7, PP1)
e. Mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait Persamaan Elips (KU1, KK7, PP1)
f. Mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait Persamaan Hiperbola (KU1, KK7, PP1)

KETERAMPILAN ABAD 21 YANG AKAN DIPEROLEH

A. Keterampilan Berfikir Kritis (*Critical Thinking Skills*)

Indikator keterampilan berfikir kritis yang akan diperoleh mahasiswa diadopsi dari (Ennis, 1995 dan BAN S/M, 2020), yang terdiri dari:

1. Keterampilan dalam mengamati dan mengidentifikasi masalah,
2. Keterampilan dalam menganalisis strategi dan teknik sebagai alternatif solusi.
3. Mampu memecahkan masalah

B. Keterampilan Berfikir Kreatif (*Creative Thinking Skills*)

Indikator keterampilan berfikir kreatif dalam buku ajar ini di adopsi dari (Marzano, 1988; Arnyana, 2019 dan BAN S/M, 2020) yaitu sebagai berikut:

1. Mampu menghadirkan banyak gagasan, atau memberi jawaban dari pertanyaan dan permasalahan serta efisiensi waktu penyelesaiannya.
2. Mampu menghadirkan variasi alternatif pemecahan masalah
3. Mampu menghadirkan suatu ide baru dan pemecahan masalah dengan cara berbeda dari sebelumnya
4. Mampu menghadirkan dan melakukan pengembangan gagasan, produk, atau situasi tertentu, sehingga menjadi lebih menarik.

C. Keterampilan Komunikasi (*Communication Skills*)

Indikator keterampilan komunikasi dalam buku ajar ini di adopsi dari (Arnyana, 2019; Zubaidah, 2016 dan Zubaidah, 2018)

1. Mampu mengartikulasikan ide atau gagasan secara efektif dan logis baik verbal dan nonverbal
2. Mampu mendengarkan dengan baik dan efektif sehingga memahami makna dapat berupa nilai, pengetahuan, sikap, ataupun budaya orang yang diajak bicara
3. Mampu memanfaatkan dan mengefisienkan penggunaan berbagai media teknologi
4. Mampu berkomunikasi dalam lingkungan yang majemuk.

D. Keterampilan Kolaborasi (*Collaboration Skills*)

Indikator keterampilan komunikasi dalam buku ajar ini di adopsi dari (Zubaidah, 2018; Brown, 2015 dan Arnyana, 2019) yaitu sebagai berikut:

1. Mahasiswa dapat menyampaikan dan menerima umpan balik dari semua anggota kelompok belajar
2. Mahasiswa dapat melakukan pembagian tugas yang sudah di berikan
3. Mahasiswa mampu mendengarkan pendapat dan gagasan anggota kelompok atau orang lain
4. Mampu mendengarkan dalam situasi konflik
5. Mendukung keputusan kelompok

Anda dapat menelaah video 1 untuk menambah pengetahuan terkait keterampilan ABAD 21 pentingnya keterampilan tersebut untuk dikembangkan dalam setiap pembelajaran, sehingga dapat meningkatkan keterampilan mahasiswa.

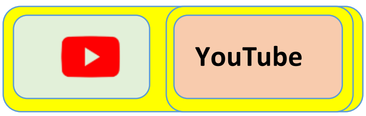
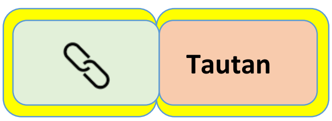
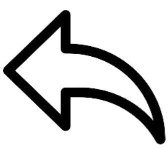
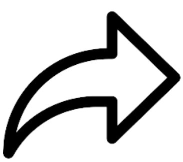
Video 1 Pembelajaran ABAD 21

PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU AJAR

Agar kegiatan belajar Anda dalam mempelajari materi ini dengan baik dan maksimal, maka Anda perlu melakukan beberapa hal berikut:

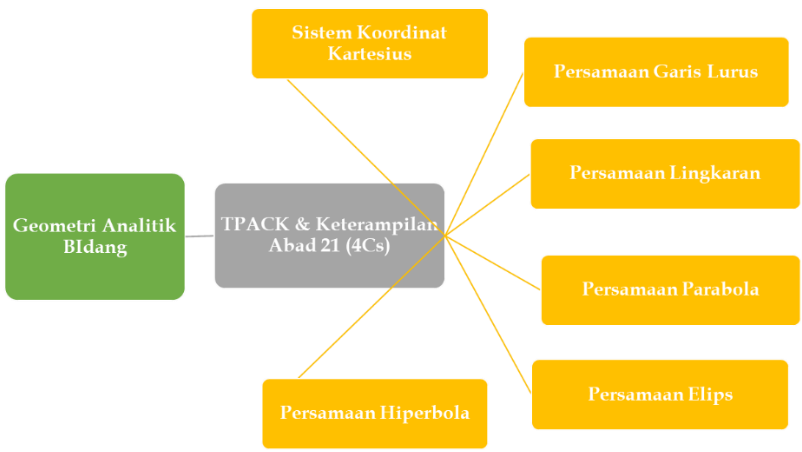
1. Pastikan sebelum belajar, Anda sudah berdoa terlebih dahulu dan memohon kepada Tuhan Yang Maha Esa, agar diberikan kemudahan dalam belajar dan menguasai materi
2. Baca dan pahami capaian pembelajaran
3. Bacalah uraian materi setiap bagian secara runtut
4. Setelah Anda membaca materi, diskusikan dengan teman atau dosen terkait hal-hal yang terdapat pada materi
5. Untuk meningkatkan pengetahuan Anda terkait materi, Anda dapat menyimak video pembelajaran yang disediakan.
6. Gunakan audio yang tersedia untuk membantu Anda dalam memahami materi yang disediakan.
7. Latihlah kemampuan Anda dengan mengerjakan soal-soal latihan yang tersedia, baik secara individu ataupun berkelompok.
8. Buatlah rangkuman yang menuliskan pengetahuan Anda terkait dengan materi yang sudah dikuasai
9. Gunakan tombol-tombol berikut untuk memaksimalkan penggunaan Buku ajar ini.

Tabel 1 Kegunaan Ikon dalam Buku ajar

Ikon	Kegunaan
	Menuju Daftar isi
	Mendengarkan Audio
	Melihat video atau YouTube
	Menuju link atau tautan yang di semat kan
	Menuju ke halaman sebelumnya
	Menuju halaman selanjutnya

PETA KONSEP ISI BUKU AJAR

Buku ajar ini berisi beberapa materi yang harus Anda kuasai pada mata kuliah geometri analitik bidang, Buku ajar ini disajikan dengan memaksimalkan pemanfaatan Technological Pedagogical and Content knowledge (TPACK) dan keterampilan abad 21 (4Cs) yaitu ***Critical Thinking Skills, Creative Thinking Skills, Communication Skills,* dan *Collaboration Skills,*** dalam setiap bab Secara umum dapat dilihat dalam peta konsep pada gambar 1.



Gambar 1 Peta Konsep

BAB 1 | SISTEM KOORDINAT KARTESIUS

A. Kompetensi yang akan Dicapai

1. Sejarah dan definisi dari sistem koordinat kartesius
2. Mampu menggambar dan menentukan titik tertentu pada koordinat kartesius.
3. Dapat menghitung jarak antara dua titik koordinat kartesius.
4. Mampu menyelesaikan masalah sehari-hari terkait dengan system koordinat kartesius

B. Capaian Pembelajaran

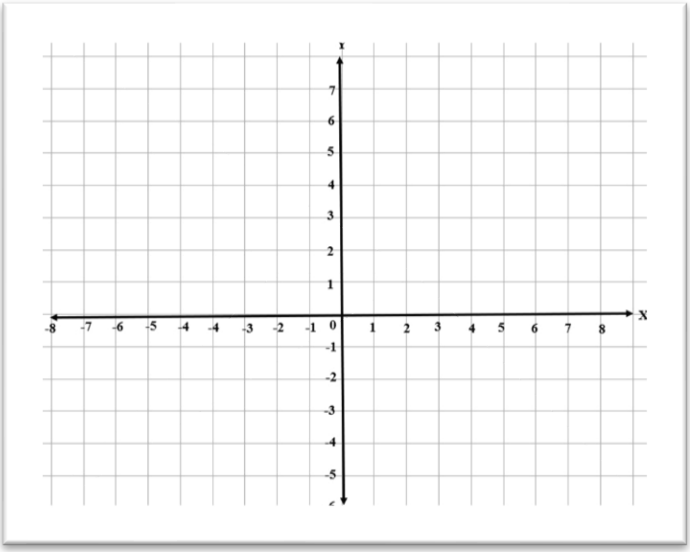
Mahasiswa mampu memahami konsep sistem koordinat kartesius dan melakukan analisis pemecahan masalah terkait sistem koordinat kartesius dengan penuh tanggung jawab.

C. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran tentang konsep sistem koordinat kartesius, mahasiswa diharapkan dapat menguasai pengetahuan antara lain:

1. Mampu memberi penjelasan sejarah dan definisi atau pengertian dari koordinat Kartesius
2. Dapat menentukan dan menggambar titik pada bidang koordinat kartesius

3. Mampu melakukan perhitungan jarak atau panjang antara dua titik yang telah di tentukan
4. Dapat menyelesaikan permasalahan sehari-hari terkait konsep sistem koordinat kartesius



Gambar 1. 1 Ilustrasi Koordinat Kartesius

D. Uraian Materi

1. Pengantar Materi

Pembahasan berikutnya terkait dengan koordinat kartesius. Materi koordinat kartesius banyak dimanfaatkan dalam berbagai kehidupan sehari-hari, antara lain pembuatan denah rumah, peta atau maps. aplikasi dari konsep koordinat kartesius lainnya adalah letak ataupun jarak titik. Gambar 1.2 menunjukkan peta propinsi Papua dengan skala peta 1:5.000.000 dengan empat koordinat yang ditentukan yaitu Fak-fak, Kumurkek, Serui dan Gunung Dom.

Gambar 1. 2 Ilustrasi Koordinat Kartesius dalam Peta

Dapatkah Anda menentukan jarak Fak-fak dan Serui, dan kumurkek dan Gunung Dom.

2. Sejarah Koordinat Kartesius

Rene Descartes (1596-1650) merupakan salah satu ahli matematika dalam bidang geometri analitik. Descartes lahir di sebuah desa bernama La Haye pada tahun 1596. Descartes muda menyelesaikan pendidikan pada college la Fleche di Yesuit. Sejak umur 20 tahun, ahli geometri analitik itu telah mendapatkan gelar ahli dalam bidang hukum dari Universitas Poitiers. Descartes meyakini bahwa semua ilmu apapun yang tidak akan dapat di percaya tanpa matematika (Suryani, 2017:1).

Descartes mengemukakan hasil pemikirannya terkait geometri analitik yang di tuangkan dalam buku ajar nya yang berjudul La Geometrie. Karyanya yang sampai saat ini di gunakan dalam pembelajaran matematika adalah koordinat kartesius. Ia juga mempelajari dan melakukan pengembangan terkait bentuk-bentuk geometri dengan mengaplikasikan sumbu-sumbu koordinat, hasil temuannya yang memberikan pengetahuan baru terkait dengan bahwa semua bentuk geometri mempunyai kategori persamaan umum seperti halnya sebuah garis lurus. Temuan lainnya adalah terkait dengan penentuan titik pada koordinat kartesius. Ia menambahkan bahwa dalam penentuan atau menggambarkan suatu titik harus memenuhi relasi x dan y, sehingga terbentuklah titik yang dapat dituliskan menjadi (x, y) (Suryani, 2017:1).

Agar menambah pengetahuan Anda terkait ahli matematika Rene Descartes, silahkan Anda telaah video 2!

Video 2 Tokoh Rene Descartes

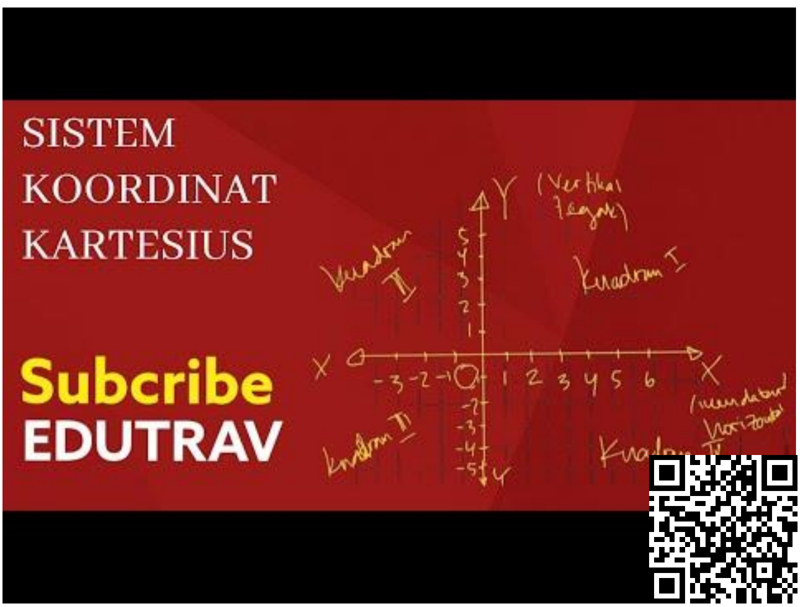
Anda bisa menambah wawasan Anda terkait dengan tokoh Rene Descartes dengan membaca pada link tautan 1 dibawah!

Tautan 1

https://id.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes.

3. Pengertian Koordinat Kartesius

Koordinat kartesius dapat dimaknai sebagai susunan garis dan berisi titik-titik yang berupa bidang datar atau dimensi dua dan tersusun garis horizontal yang disebut sumbu x dan garis vertikal yang disebut sumbu y yang saling bersilangan atau berpotongan tegak lurus, dan dapat digunakan untuk meletakkan atau menggambarkan, titik, garis ataupun bangun-bangun geometri. Sebelum mempelajari lebih lanjut terkait sistem koordinat kartesius, silahkan Anda menelaah materi dalam video 3, agar dapat menambah wawasan Anda!



Video 3 Sistem Koordinat Kartesius

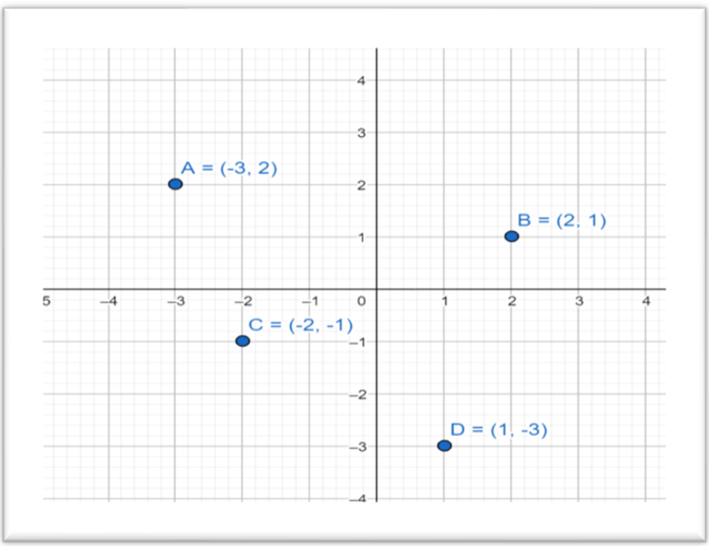
Anda dapat memanfaatkan aplikasi GeoGebra secara daring pada link Tautan 2 di bawah!

Tautan 2

https://www.geogebra.org/calculator

4. Menentukan Titik pada Koordinat Kartesius

Setelah Anda mempelajari pengertian koordinat kartesius, selanjutnya akan disajikan pembahasan tentang menggambar dan menentukan letak dan nilai titik pada bidang kartesius. Nama suatu titik dapat dituliskan dengan huruf kapital. Pada gambar 1.3 disajikan titik $A(-3,2)$, $B(2,1), C(-2,-1)$ dan titik $D(1,-3)$, perhatikan dengan seksama.



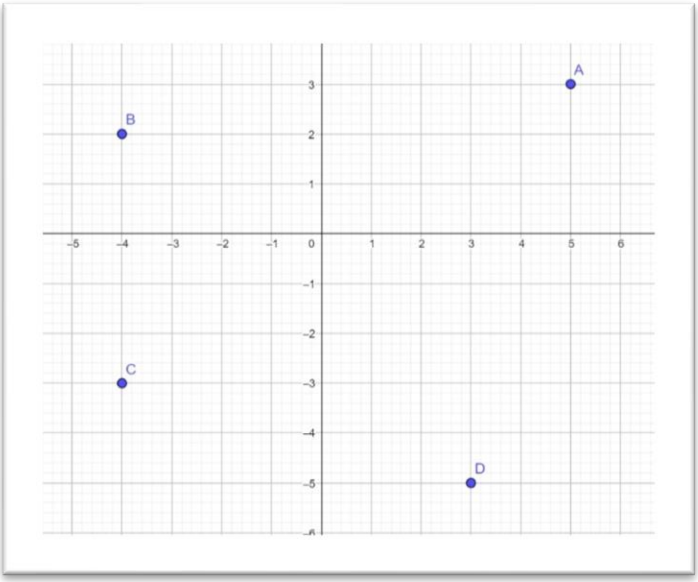
Gambar 1. 3 Ilustrasi Titik pada Koordinat Kartesius

Setelah menelaah video tersebut, coba Anda teliti lah beberapa pernyataan terkait unsur-unsur yang terdapat dalam sistem koordinat kemudian tentukan pilihan jawaban Anda sesuai pilihan jawaban yang disediakan.

a. Sumbu x merupakan sumbu yang horisontal atau mendatar yang terdiri nilai x positif, nol dan negatif (benar/salah/kurang tepat)
b. Sumbu y merupakan sumbu yang vertikal atau tegak dan terdiri dari bilangan y positif, nol dan negatif (benar/salah/kurang tepat)
c. Pangkal koordinat dapat dituliskan dengan huruf $O(0,0)$ dan merupakan titik acuan pada koordinat kartesius, dan merupakan titik potong sumbu x dan sumbu y (benar/salah/kurang tepat)
d. Jika titik $A\ (p, q)$ merupakan suatu titik, maka p disebut ordinat dan y merupakan absis (benar/salah/kurang tepat)
e. Koordinat kartesius dibagi menjadi dua kuadrat (benar/salah/kurang tepat)

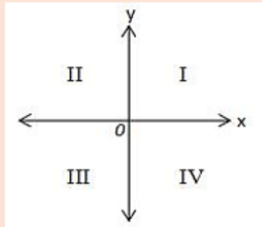
Latihan Soal

1. Tentukan nilai setiap titik A, B, C dan D!



Gambar 1. 4 Ilustrasi Soal

2. Gambar lah koordinat kartesius dan tentukan letak titik $E\ (2,-2), F\ (-4,5), G\ (-3,6)$ dan $H(-4,-3)$!
3. Gambarkan pada koordinat kartesius setiap titik-titik yang memenuhi $(x, x-4)$ dimana:
   a. $x \in Z, 1 \leq x \leq 3$ (Berilah nama titik-titik tersebut dari A sampai C dari nilai x terkecil)
   b. $x \in Z, -3 \leq x < 0$ (Berilah nama titik-titik tersebut dari D sampai G dari nilai x terkecil)
4. Lengkapi lah dengan menentukan positif atau negatif setiap uraian berikut!



I merupakan kuadran.......

Nilai x............ dan nilai y...............

II merupakan kuadran ....

Nilai x............ dan nilai y...............

III merupakan kuadran ....

Nilai x............ dan nilai y...............

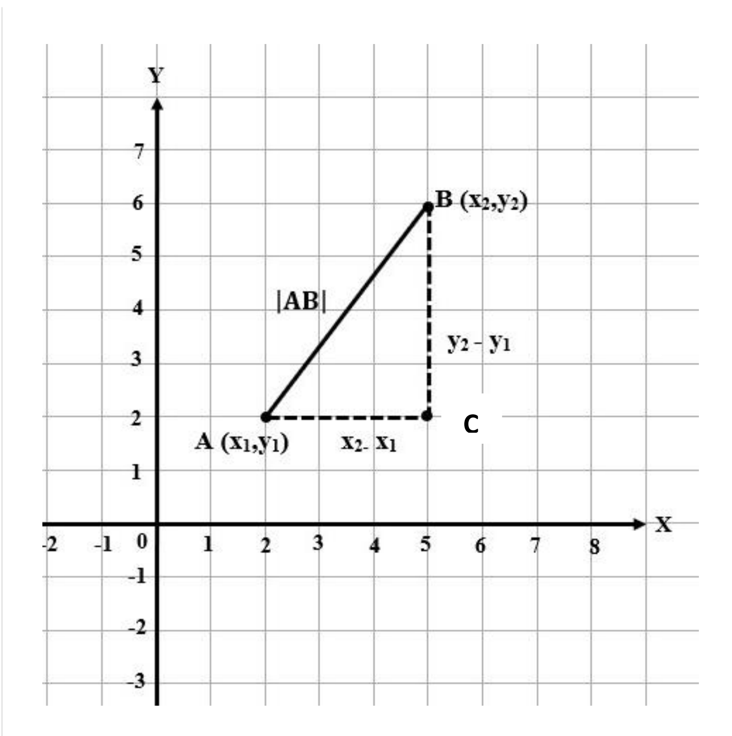
IV merupakan kuadran ....

Nilai x............ dan nilai y...............

5. Jarak antara Dua Titik Koordinat Kartesius

Pada pembahasan berikutnya, Anda akan mempelajari lanjutan dari konsep sebelumnya yaitu jarak antara dua titik. Konsep terkait dengan jarak di antara dua titik dapat dinyatakan dengan akar pangkat dua dari hasil jumlah pangkat dua setiap elemen skalar segmen garis hubung dari kedua titik tersebut, jarak sendiri dapat dikatakan sebagai panjang lintasan garis dan selalu bernilai positif (mutlak) (Mutia,2018: 32).

Pada titik A dan B dengan koordinat titik A (x_1, y_1) dan titik B $(x_{2,}\ y_2)$, maka jarak ruas garis AB ditentukan dari jarak antara kedua titik tersebut dengan titik A dan B sebagai ujung-ujung segmen garis tersebut. Jarak terpendek antara dua titik tersebut dapat dirumuskan dengan teorema Pythagoras, teorema Pythagoras menyebutkan bahwa kuadrat dari panjang sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat dari sisi siku-sikunya. Berdasarkan teorema tersebut, maka konsep panjang atau jarak suatu garis pada koordinat kartesius dapat ditentukan dengan ilustrasi seperti pada gambar 1.5.



Gambar 1. 5 Ilustrasi Jarak Antara Dua Titik

Pada Gambar 1.5 dapat ditelaah bahwa terdapat segitiga siku-siku ABC dengan sudut siku-sikunya pada sudut C. Berdasarkan teorema Pythagoras panjang garis AB dapat ditentukan dengan. $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, lakukan aktivitas 2 untuk membuktikan rumus tersebut.

Aktivitas Mahasiswa 1

Kolaborasi (*Collaboration Skills*)

Berfikir Kritis *(Critical Thinking Skills)*

Buat kelompok dengan anggota 4 orang, kemudian diskusikan hal-hal berikut berdasarkan Gambar 1.5! berbagilah tugas dengan semua anggota kelompok Anda, hasil kerja kelompok dipresentasikan di depan kelas secara bergantian.

1. Tentukan panjang AB, BC dan AC menggunakan teorema Pythagoras
2. Tentukan Panjang AB, BC dan AC menggunakan rumus jarak antara dua titik.
3. Bandingkan hasil Anda pada soal nomor 1 dan 2
4. Silahkan Anda simpulkan terkait hasil jawaban soal nomor 3?
5. Carilah alternatif solusi lainnya untuk menentu kan panjang AB, BC dan AC

Contoh Soal

Pada koordinat kartesius ditentukan tiga buah titik A, B dan C, dengan titik koordinat $A\ (2,1)$ dan titik $B\ (5,5)\ , C\ (-3,-4)$. Mince akan menghitung panjang jarak AB, BC dan AC, bantulah Mince untuk menghitungnya!

Alternatif jawaban

Untuk dapat menjawab soal tersebut perlu kita identifikasi dulu apa yang dibutuhkan dalam formula panjang garis yang melalui dua titik.

Diketahui : A (2, 1)
B (5, 5)
C (−3, −4).

Ditanyakan : 1. Panjang AB
2. Panjang BC
3. Panjang AC

Alternatif Penyelesaian

1. Untuk menjawab panjang AB atau $|AB|$ maka perlu kita menuliskan terlebih dulu komponen yang dibutuhkan dalam rumus jarak atau panjang garis melalui dua titik.

   Panjang $AB = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

   $A\ (2,1)$: maka $x_1 = 2\ dan\ y_1 = 1$; $B\ (5,5)$: maka $x_2 = \ldots dan\ y_2 = \ldots$

   Untuk menjawab panjang AB atau $|AB|$ dapat dilakukan seperti berikut:

$|AB| =$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$=$

$\sqrt{(5 - \ldots.)^2 + (\ldots. - 1)^2}$

$= \sqrt{(\ldots.)^2 + (\ldots.)^2}$

$= \sqrt{\ldots. + \ldots}$

$= \sqrt{\ldots.}$

$= \ldots.$

Jadi panjang garis AB adalah……

Berfikir Kritis
(Critical Thinking Skills)

Lengkapi titik-titik disamping, kemudian pikirkan bagaimana jika titik B yang merupakan x_1 *dan* y_1?

…………………………

…………………………

…………………………

Untuk meningkatkan keterampilan berfikir kritis Anda, silahkan lengkapi titik-titik di bawah dengan mendiskusikan dengan rekan kelompok Anda.

2. Panjang BC

$|BC| = \sqrt{(\ldots. - x_1)^2 + (\ldots. - y_1)^2}$

$= \sqrt{(\ldots. - \ldots.)^2 + (\ldots. - \ldots)^2}$

$= \sqrt{(\ldots.)^2 + (\ldots.)^2}$

$= \sqrt{\ldots. + \ldots}$

$= \sqrt{\ldots.}$

$= \ldots.$

Jadi panjang garis BC adalah……

3. Panjang AC

$|AC| = \sqrt{(\ldots. - \ldots)\quad + (\ldots. - \ldots)}$

$= \sqrt{(\ldots. - \ldots.)\quad + (\ldots. - \ldots)}$

$= \sqrt{(\ldots.)\quad + (\ldots.)}$

$= \sqrt{\ldots. + \ldots}$
$= \sqrt{\ldots.}$
$= \ldots.$

Jadi panjang garis AC adalah……

Coba Anda lakukan perhitungan untuk menentukan panjang garis pada contoh di atas dengan cara berbeda!

RANGKUMAN

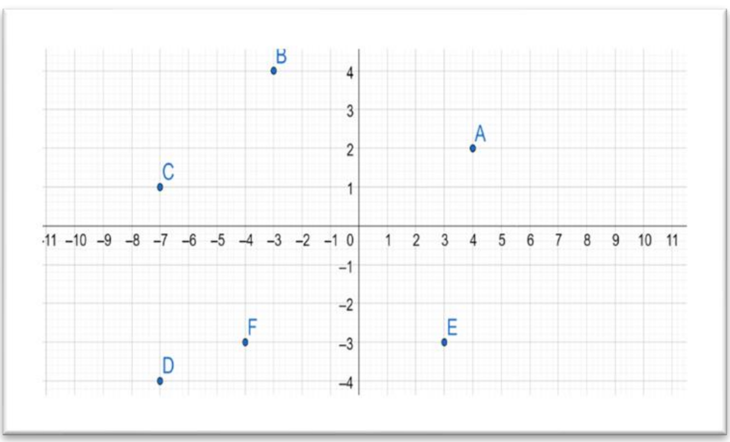
1. Koordinat kartesius dapat dimaknai sebagai susunan garis dan titik pada suatu bidang datar yang terdiri dari garis horizontal yang disebut sumbu x dan garis vertikal yang disebut sumbu y yang saling bersilangan atau berpotongan tegak lurus, dan dapat digunakan untuk meletakkan atau menggambarkan, titik, garis ataupun bangun-bangun geometri.
2. Titik pada koordinat kartesius selalu dinyatakan dengan (x, y), adapun x disebut dengan istilah absis, sedang y adalah ordinat.
3. Cara membaca dan mem plot kan titik-titik koordinat dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut:
   - Jadikan titik pangkal (0,0) sebagai titik acuan, untuk menentukan titik (x, y)
   - Jika x bernilai negatif maka melangkah sejumlah x ke arah kanan dari titik pangkal, jika bernilai negatif melangkah ke arah kiri di mulai dari titik pangkal
4. Sumbu y merupakan langkah pada posisi naik dan turun, dengan ketentuan, jika y positif maka melangkah naik sebanyak nilai y dan melangkah

turun sebanyak y jika bernilai negatif, yang dimulai dari titik (0,0) Dalam sistem koordinat kartesius.

5. koordinat kartesius di bagi ke dalam empat kuadran dari kuadran satu sampai empat, dengan ketentuan.
   - Kuadran satu : $x > 0, y > 0$
   - Kuadran dua : $x < 0, y > 0$
   - Kuadran tiga : $x < 0, y < 0$
   - Kuadran empat : $x > 0, y < 0$
6. Panjang garis dapat ditentukan dengan akar pangkat dua dari hasil jumlah pangkat dua setiap elemen skalar segmen garis hubung dari kedua titik tersebut, jarak sendiri dapat dikatakan sebagai panjang lintasan garis dan selalu bernilai positif (mutlak)
7. Rumus mencari jarak di antara dua titik yang melalui titik A(x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) dapat dituliskan panjang AB =$|AB|$ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

LATIHAN SOAL 1

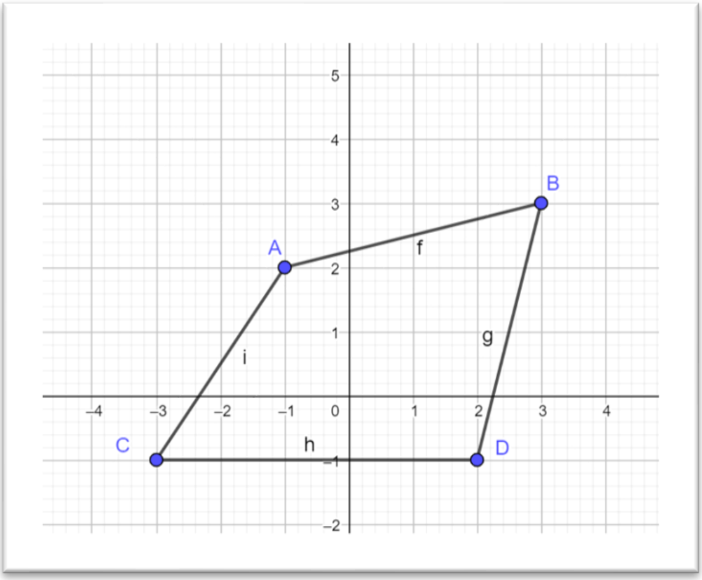
1. Pada gambar di bawah, tentukan setiap nilai A, B, C, D, E, dan F!



Gambar 1. 6 Ilustrasi Soal 1.1

2. Gambarkan pada koordinat kartesius setiap titik dibawah ini!
   a. A (-6,3)
   b. B (2, -5)
   c. E ($\frac{2}{3}$,-1)
   d. F ($-\frac{5}{2}, \frac{4}{10}$)
3. Gambarkan pada koordinat kartesius setiap titik-titik yang memenuhi $(x, 3x + 2)$ dimana:
   a. $x \in Z, -1 \leq x \leq 4$ (Berilah nama titik-titik tersebut dari A sampai F dari nilai x terkecil)
   b. $x \in Z, -6 \leq x < 0$ (Berilah nama titik-titik tersebut dari G sampai L dari nilai x terkecil)
4. Tentukan nilai titik A, B, C, D, E, dan F yang tersebar di semua kuadrat. Kemudian gambarkan pada koordinat kartesius dan hitunglah masing-masing jarak titik AB, BC, CD dan DE!
5. Hitunglah jarak antara kedua titik berikut ini nilai P jika
   a. Titik A $(3, p)$, titik B $(2p, -10)$, jarak titik A dan B adalah $\sqrt{14}$
   b. Titik C $(-7{,}3p)$, dan titik D $(p, -2)$, jarak C dan D adalah 20
6. Hitunglah nilai k + l jika nilai k adalah jarak titik G dan H dan l adalah jarak titik I dan J
   a. G $(-12, -6)$ dan B $(6, -3)$
   b. C $(6, -4)$ dan D $(-3, -2)$
7. Hitunglah dan tentukan nilai p^2 jika nilai $p = |KL|$ dengan koordinat K $(p - 9{,}1)$ dan L $(-1, p - 3)$!
8. Perhatikan gambar di bawah ini. Seorang anak-anak hendak berlari dari rumahnya yang berada di titik A menuju Ke rumah temannya yang berada di titik D

seperti gambar di bawah ini, tentukan: panjang jarak yang tempuh anak tersebut jika berlari pulang pergi sesuai rute jalan!



Gambar 1. 7 Ilustrasi Latihan Soal 1.8

9. Sebuah bangun datar ABCD memiliki titik koordinat A(-3,1), B(2,1), C(3,4), D(-2,4). Gambarkan bangun tersebut pada koordinat kartesius dan tentukan: a. bangun datar apa yang terbentuk, b. berapa keliling dan luas bangun tersebut
10. Selidikilah permasalahan yang berada di sekitar Anda terkait dengan sistem koordinat kartesius kemudian diskusikan dengan teman Anda bagaimana cara menyelesaikannya!

BAB 2 PERSAMAAN GARIS LURUS

A. Kompetensi yang akan Dicapai

1. Mampu menemukan konsep gradien garis.
2. Mampu menyusun persamaan pada suatu garis lurus
3. Dapat mengidentifikasi kedudukan dua garis lurus.
4. Menghitung jarak titik dan garis.
5. Menentukan sudut antara dua garis.
6. Menentukan titik potong dua garis

B. Capaian Pembelajaran

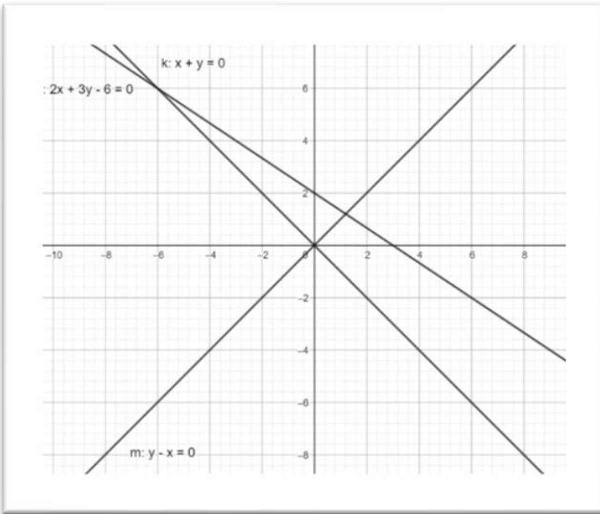
Mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait konsep persamaan garis lurus.

C. Tujuan Pembelajaran

Dalam bab ini Anda diharapkan dapat menguasai berbagai konsep penting dalam persamaan suatu garis lurus melalui berbagai aktivitas pembelajaran. Dengan mempelajari bab ini diharapkan Anda mampu mengusai beberapa konsep terkait persamaan garis dengan tujuan pembelajaran yaitu:

1. Mahasiswa mampu menemukan konsep gradien garis.

2. Mahasiswa mampu menyusun persamaan garis lurus.
3. Mengidentifikasi kedudukan dua garis lurus.
4. Menghitung jarak titik dan garis.
5. Dapat menghitung dan Menentukan sudut antara dua garis.
6. Dapat melakukan perhitungan dan menentukan titik potong suatu garis lurus



Gambar 2. 1 Ilustrasi persamaan Garis Lurus

D. Uraian Materi

Pernahkah Anda melihat menara Pisa yang ada di Italia. Pada gambar 2.2 menunjukkan monumen terkenal yang ada di Italia yaitu sebuah Menara Pisa yang dibangun pada tahun 1173 di Pisa, Italia. Menara ini mendapat banyak perhatian secara internasional karena keunikan yang dimilikinya yaitu kemiringan bangunannya.

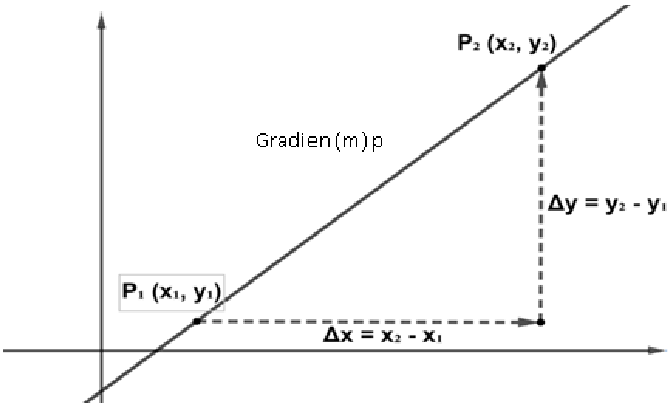
Gambar 2. 2 Ilustrasi Konsep Gradien, Menara Pisa sumber: https://kumparan.com/kumparansains/misteri-kokohnya-menara-pisa-yang-miring-akhirnya-terungkap

Setelah memperhatikan gambar 2.2 coba tentukan nilai kemiringan menara Pisa jika dipandang dari tanah mendatar dibawah menara Pisa!

Menurut Anda dapatkah kemiringan Pisa dapat disebut dengan gradien? Untuk menjawab dan memahami terkait konsep-konsep tersebut, pelajari dengan seksama materi berikut!

1. **Gradien/Kemiringan**
   a. **Pengertian Gradien/Kemiringan**

   Bapak geometri analitik asal Perancis Rene Descartes lahir pada 31 maret 1596 dan wafat pada tanggal 11 Februari 1650, beliau bukan hanya seorang matematikawan tetapi juga ia seorang fisikawan, filsuf, dan teolog, dialah penemu rumus gradien (kemiringan) (Aisyah, 2021:1). Bapak geometri ini juga menemukan metode untuk pemecahan masalah yang berkaitan dengan garis dan kemiringan baik secara aljabar ataupun geometri. Gradien dapat diartikan sebagai derajat kecuraman dan ke landaian suatu garis. Secara geometri gradien suatu garis dapat ditentukan seperti gambar 2.3.



Gambar 2. 3 Ilustrasi Penentuan Gradien

Gambar 2.3 dapat di identifikasi bahwa terdapat garis p yang melalui titik $P_1(x_{1,}y_1)$ dan $P_2(x_{2,}y_2)$ gradien garis p merupakan derajat kemiringan garis p yang diukur melalui titik P_1dan P_2 dan dapat ditentukan dengan menghitung perbandingan antara panjang garis y (Δy $= y_2 - y_1$) dan panjang garis x (Δx$= x_2 - x_1$), secara matematis dapat dituliskan dalam bentuk

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk lebih memahami konsep terkait gradien suatu garis lurus, Anda bersama rekan-rekan anggota kelompok dapat melihat pembahasan terkait konsep gradient pada video 4 dan 5.

Video 4 Konsep Gradien Garis

Video 5 Konsep Gradien Garis 2

Menyimpulkan

Berdasarkan pembahasan materi pada video 3 dan 4, apa yang dapat Anda simpulkan terkait dengan konsep gradien?

Gradien adalah…

$$Gradien\ (m) = \frac{perubahan\ nilai\ \ldots}{perubahan\ nilai\ \ldots}$$

$$= \frac{\Delta \ldots}{\Delta \ldots}$$

$$= \frac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots}$$

Aktivitas Mahasiswa 4.1

1. Buat kelompok dengan anggota 4 orang, kemudian diskusikan permasalahan berikut dan presentasikan di depan kelas, terkait konsep berikut:
   a. Gradien suatu garis yang melalui dua titik tertentu!
   b. Gradien suatu garis jika sketsa grafik nya diketahui!
   c. Gradien suatu garis jika diketahui persamaan garisnya!

Aktivitas Mahasiswa 4.1

2. Lakukan percobaan untuk mengetahui konsep-konsep berikut:
   a. Gradien suatu garis yang horisontal!
   b. Gradien suatu garis yang vertikal!
   c. Gradien suatu garis yang menanjak (condong ke arah kanan)!
   d. Gradien suatu garis yang menurun (condong ke arah kiri)!
   e. Gradien suatu Garis yang saling sejajar!
   f. Gradien suatu Garis yang saling tegak lurus!

b. Cara Menentukan Nilai Gradien

Setelah melakukan aktivitas mahasiswa 3. Bandingkan hasil kerja kelompok Anda dengan uraian berikut, Anda dapat memberikan masukkan ataupun perbaikan setiap langkah jika diperlukan!

1) Gradien garis melalui dua titik

Agar dapat memudahkan dalam menghitung dan menentukan gradien suatu garis jika diketahui kedua titik tertentu, Anda dapat melakukan dua langkah berikut:

a) Menentukan titik yang menjadi (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dari kedua titik tersebut.

b) Substitusi kan ke dalam rumus gradien!

$$Gradien\ (m) = \frac{perubahan\ nilai\ y}{perubahan\ nilai\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

> Buat Kesimpulan dengan bahasa Anda sendiri terkait konsep gradien garis melalui dua titik!

Latihan 2.1

- Tentukan gradien suatu garis yang ditarik melalui titik $A(3, -2)$ dan $B(-4,5)$!
- Tentukan nilai p jika nilai gradien garis CD adalah 4 dengan titik $C(-3,5)$ dan $D(p, 3)$!

2) Gradien garis jika diketahui sketsa grafik nya

Anda dapat melakukan beberapa langkah ini untuk dapat menentukan gradien garis yang gambar grafik nya sudah ditentukan.

a) Buat dua titik sembarang pada garis

b) Lanjutkan dengan membuat ruas garis 1 secara mendatar dari kiri ke kanan (horizontal) atau sejajar sumbu x dan garis 2 tegak lurus secara vertikal sumbu y. Sehingga membentuk segitiga siku-siku. (Lihat gambar 2.2)
c) Jumlahkan titik-titik yang dilalui secara terpisah dari sumbu x dan sumbu y.
d) Jumlah titik sumbu-x adalah perubahan nilai x, sedangkan jumlah titik sumbu y merupakan perubahan nilai y.
e) Substitusi ke dalam rumus.

$$Gradien\ (m) = \frac{perubahan\ nilai\ y}{perubahan\ nilai\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Atau dapat dengan mudah dengan cara menentukan titik yang dilalui garis, misalkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), kemudian di substitusi kan langsung ke persamaan gradien garis $(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3) **Gradien garis jika diketahui persamaan garisnya**

a) Gradien persamaan garis $y = ax + b$

koefisien dari x merupakan gradien garis dari persamaan tersebut, atau dapat di tuliskan $m = a$ atau secara umum dapat dituliskan

$$y = mx + b$$

b) Gradien persamaan garis $ax + by + c = 0$

Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam menghitung dan menentukan gradien garis dengan persamaan $ax + by + c = 0$, adalah dengan merubah persamaan tersebut menjadi $y = mx + b$, sehingga persamaan tersebut akan menjadi

$= \frac{-ax+c}{b}$.

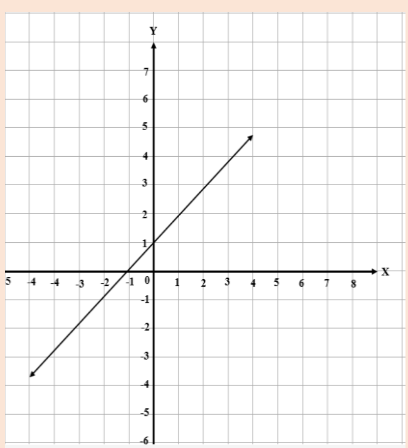
$y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$ sehingga gradien $m = -\frac{a}{b}$

c. Sifat gradien Suatu Garis

Sesuai dengan hasil pada aktivitas mahasiswa 3. Silahkan Anda lengkapi sifat-sifat gradien suatu garis dan sketsa kan gambarnya seperti contoh gradien yang bernilai positif ($m > 0$)

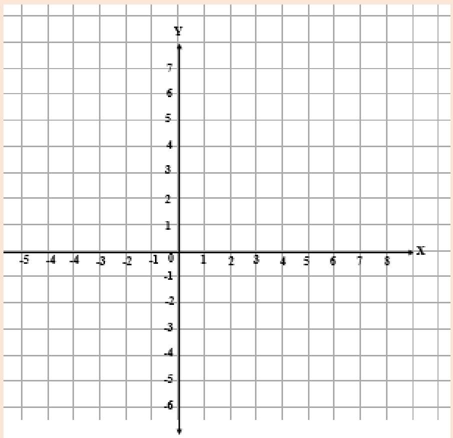
1) Gradien bernilai positif ($m > 0$)

Berlaku jika garis menanjak atau condong ke arah kanan



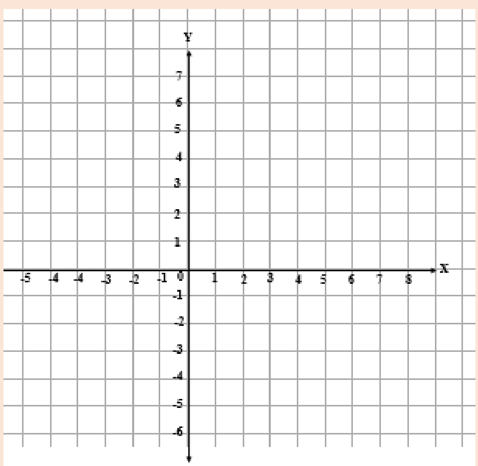
2) Gradien bernilai negatif ($m < 0$)

...



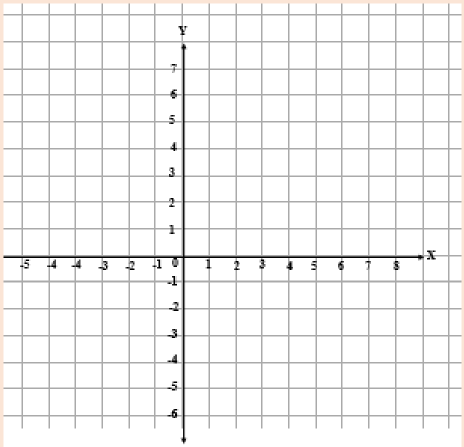
3) Gradien bernilai nol ($m = 0$)

...



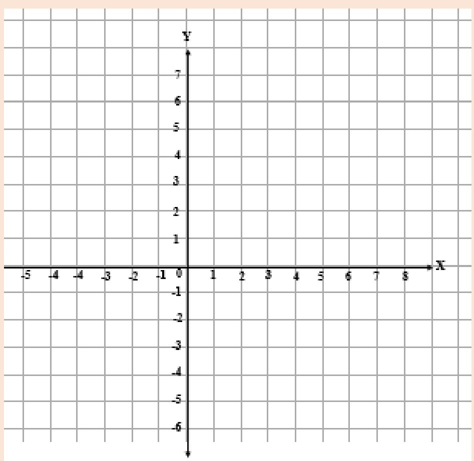
4) Gradien sama ($m_1=m_2=m_3=m_n$)

...



5) Gradien garis jika $m_1 \times m_2 = -1$

...



2. Persamaan Garis Lurus

a. Pengertian persamaan garis lurus

Garis adalah salah satu objek geometri dan terdiri dari sekumpulan titik (Fonna, M. & Mursalin, 2018). Persamaan garis merupakan persamaan yang mewakili suatu garis pada bidang koordinat. Persamaan juga dapat disebut hubungan antara titik-titik pada koordinat yang mewakili suatu garis lurus atau linier, secara umum, persamaan garis linier adalah sebagai berikut:

1) $ax + by + c = 0$
2) $y = mx + c$, m adalah gradien.

b. Menentukan Persamaan Garis Lurus

1) Persamaan garis dengan gradien dan suatu titik tertentu diketahui

Untuk memahami konsep persamaan garis dengan gradien dan suatu titik tertentu diketahui, ada dapat memisalkan suatu garis tersebut melalui titik A (x_1, y_1) dengan gradien m. Sesuai dengan bentuk umum persamaan garis adalah $y = mx + c$.

Karena garis melalui titik A (x_1, y_1) maka dapat dituliskan bahwa:

$y_1 = m(x_1) + c$; Karena$(x_1\ dan\ y_1)$ merupakan konstanta maka dapat dituliskan bahwa $c = y_1 - mx_1$, kemudian substitusikan nilai c kedalam bentuk umum $y = mx + c$. Sehingga menjadi:

$y = mx + y_1 - mx_1\ atau\ y - y_1 = m(x - x_1)$

Sehingga dapat dituliskan bahwa persamaan garis yang melalui suatu titik

(x_1, y_1) dan memiliki gradien m, di rumuskan dengan

$$y = mx + y_1 - mx_1 \text{ atau } y - y_1 = m(x - x_1)$$

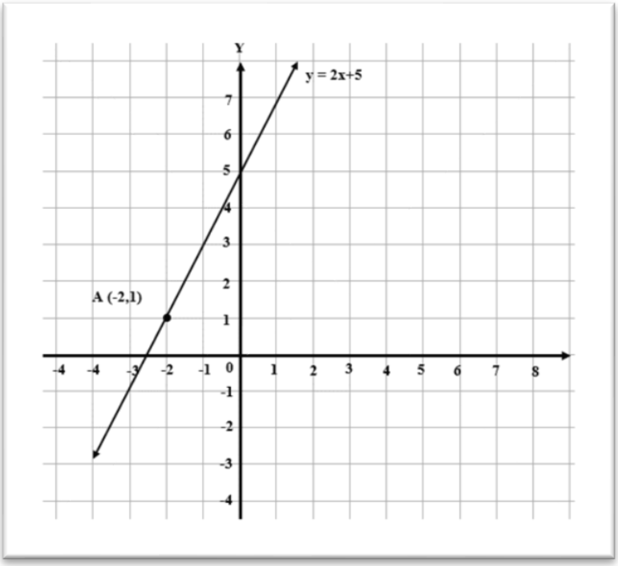
Contoh Soal 2.1

1. Tentukan persamaan garis dalam bentuk umum $y = mx + c$, garis yang ber gradien 2 dan melalui titik A $(-2,1)$, kemudian buatlah sketsa grafiknya!
   Alternatif Jawaban.
   Permasalahan dapat dijawab dengan formula $y = mx + y_1 - mx_1\ atau\ y - y_1 = m(x + x_1)$, Sehingga perlu dituliskan dulu apa yang dibutuhkan.
   Diketahui: $m = 2;\ x_1 = -2;\ y_1 = 1$
   Selanjutnya tinggal disubstitusikan ke rumus $= mx + y_1 - mx_1 \quad atau\ y - y_1 = m(x + x_1)$, seperti di bawah.

$y = mx + y_1 - mx_1$	$y - y_1 = m(x + x_1)$
$y = 2x + 1 - 2(-2)$	$y - 1 = 2(x - 2)$
$y = 2x + 1 - (-4)$	$y - 1 = 2x + 4)$
$y = 2x + 5$	$y = 2x + 5$

Jadi persamaan garis yang memiliki gradien 2 dan melalui titik A $(-2,1)$ adalah $y = 2x + 5$

Selanjutnya Sketsa grafik persamaan y=2x+5 dapat di telaah pada Gambar 2.4



Gambar 2. 4 Ilustrasi Contoh Soal 2.1.1

2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $O(0,0)$ dan bergradien -3 beserta sketsa grafiknya!

   Untuk contoh ini silahkan didiskusikan dengan teman di sebelah mu, dapat dijawab seperti contoh nomor 1 ataupun dengan cara lain yang sesuai.

   Alternatif Jawaban.

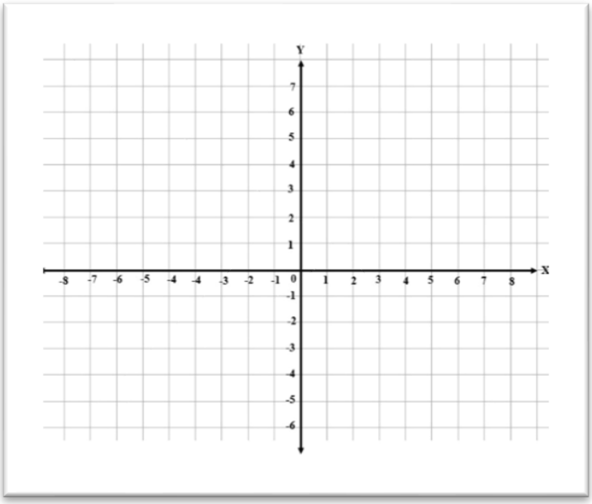
   Diketahui: $m = \ldots;\ x_1 = \ldots;\ y_1 = \ldots$

   Substitusi kan nilai $m = \ldots;\ x_1 = \ldots;\ y_1 = \ldots$, ke rumus $y = mx + y_1 - mx_1\ atau\ y - y_1 = m(x + x_1)$, seperti di bawah.

$y = mx + y_1 - mx_1$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y = \ldots x + \ldots$	$y - \ldots = \ldots(x - \ldots)$
$y = \ldots x + \ldots$	$y - \ldots = \ldots$
$y = \ldots$	$y = \ldots$

Jadi persamaan garis yang melalui titik $O(0,0)$ dan bergradien -3 adalah…

Sketsa grafik persamaan tersebut dengan terlebih dahulu membuat koordinat kartesius seperti gambar!



Gambar 2. 5 Koordinat Kartesius Contoh Soal 2.1.2

3. Hitunglah dan Tentukan persamaan suatu garis yang ditarik melalui titik $O(0,0)$ dan bergradien 4 beserta sketsa grafiknya!

   Untuk contoh ini silahkan didiskusikan dengan teman di sebelah mu, dapat dijawab seperti contoh nomor 1 dan nomor 2 pada isian yang sudah disediakan ataupun dengan cara lain yang sesuai.

   Alternatif Jawaban.

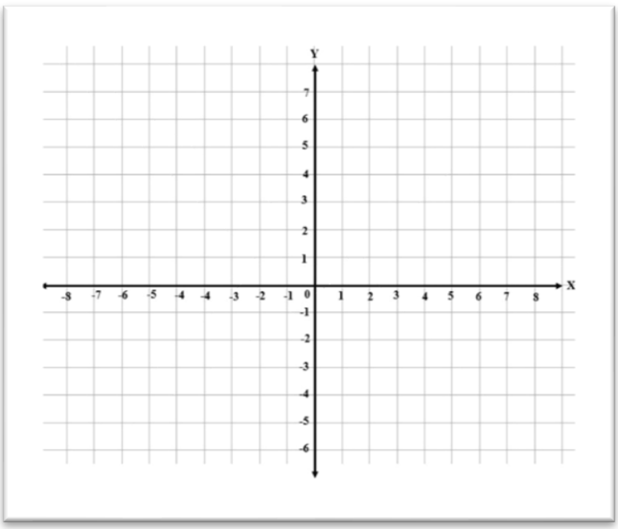
   Diketahui: $m =\ldots;\ x_1 =\ldots;\ y_1 =\ldots$

Substitusi kan nilai $m = \ldots;\ x_1 = \ldots;\ y_1 = \ldots$, ke rumus $= mx + y_1 - mx_1$ $atau$ $y - y_1 = m(x + x_1)$, seperti di bawah.

$y = mx + y_1 - mx_1$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y = \ldots x + \ldots$	$y - \ldots = \ldots(x - \ldots)$
$y = \ldots x + \ldots$	$y - \ldots = \ldots$
$y = \ldots$	$y = \ldots$

Jadi persamaan garis yang melalui titik $O(0,0)$ dan bergradien 4 adalah…

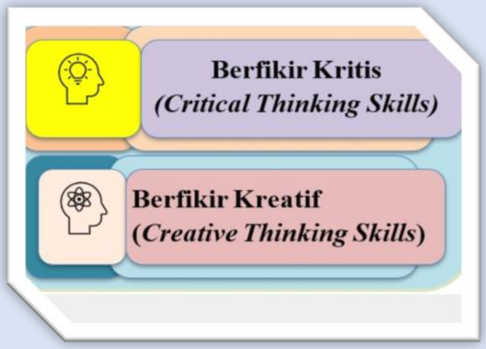
Sketsa grafik persamaan tersebut pada koordinat kartesius seperti gambar 2.5!



Gambar 2. 6 Koordinat kartesius contoh soal 2.1.3

Sesuai dengan pembahasan persamaan garis yang ber gradien m dan melaui titik tertentu, dapatkah Anda menarik kesimpulan? Tuliskan kesimpulan mu dengan terlebih dahulu membuat kolom seperti yang disediakan!

Menyimpulkan



Gunakan Bahasamu sendiri untuk menyimpulkan konsep yang telah Anda pelajari!

2) Persamaan Suatu Garis Lurus Melalui Dua Titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2)

Persamaan garis melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) juga dapat ditentukan dengan melakukan substitusi titik tersebut ke dalam bentuk umum persamaan garis $y = mx + c$.

Karena titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) dilalui garis maka dapat dituliskan

$y_1 = m(x_1) + c$ dan $y_2 = m(x_2) + c$; maka

$c = y_1 - m(x_1)$ dan $c = y_2 - m(x_2)$; dapat di subtitusikan menjadi

$$y_1 - m(x_1) = y_2 - m(x_2)$$
$$m(x_2) - m(x_1) = y_2 - y_1$$
$$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Selanjutnya ambil persamaan $c = y_1 - m(x_1)$ kemudian substitusi kan nilai $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; sehingga persamaan menjadi $c = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1)$;

kemudian substitusi kan kembali ke persamaan umum $y = mx + c$.

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1)$$
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1)$$
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi persamaan garis lurus tersebut yang melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) adalah

$$\boxed{\frac{\mathrm{y} - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x} - \mathrm{x}_1} = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}}$$

Contoh Soal 2.2

1. Gambar dan tentukan persamaan garis yang melalui titik $P(-1,6)$ dan $Q(2, -4)$!

Permasalahan ini dijawab dengan rumus $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ untuk itu, tentukan terlebih dahulu setiap unsur yang diperlukan dalam rumus.

Alternatif Solusi.

Diketahui: $P(-1{,}6);\ x_1 = -1, y_1 = 6$

$Q(2,-4);\ x_2 = 2, \quad y_2 = -4$

Ditanyakan : Persamaan garis lurus?

Alternatif Penyelesaian :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-\ldots}{\ldots-\ldots} = \frac{x-\ldots}{\ldots-\ldots}$$

$$\frac{\ldots}{\ldots.} = \frac{\ldots}{\ldots.}$$

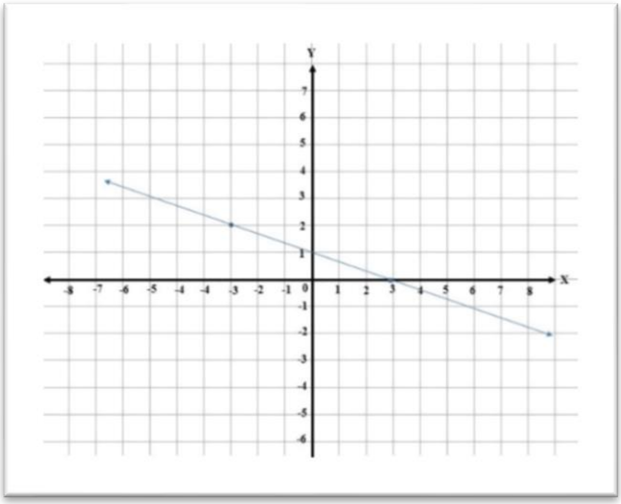
$$\ldots.(\ldots.-\ldots) = \ldots(x-\ldots)$$

$$\ldots y+\ldots = \ldots x+\ldots$$

$$\ldots x - y+\ldots = 0$$

Jadi, persamaan garis yang melalui titik $P(-1{,}6)$ dan $Q(2,-4)$ adalah ...

2. Gambar dan tentukan persamaan garis yang melalui titik $P(-2,-3)$ dan $Q(3,-2)$! (Kerjakan mandiri sesuai langkah-langkah pada contoh nomor 1)
3. Tentukan persamaan garis yang sesuai dengan grafik berikut!



Gambar 2. 7 Ilustrasi contoh soal 2.2.3

Petunjuk penyelesaian. Untuk Menjawab soal ini Anda perlu menentukan terlebih dahulu titik yang dilalui garis, kemudian dapat dilanjutkan sesuai langkah pengerjaan contoh soal nomor 1.

3. Kedudukan Dua Garis Lurus

Dalam koordinat kartesius, garis dapat saling sejajar, berimpit atau berpotongan. Misalkan p_1 dan p_2 masing-masing merupakan dua garis dengan persamaan sebagai berikut.

$p_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$p_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Maka:

a. Kedua garis saling sejajar, bila $mp_1 = mp_2$ dan $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

b. Kedua garis saling berimpit, bila $mp_1 = mp_2\ dan$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

c. Kedua garis saling berpotongan, bila $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$

d. Kedua garis saling tegak lurus, bila $m_1 . m_2 = -1$ atau $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$

Anda dapat membuktikan ke empat pernyataan di atas secara berkelompok atau berpasangan.

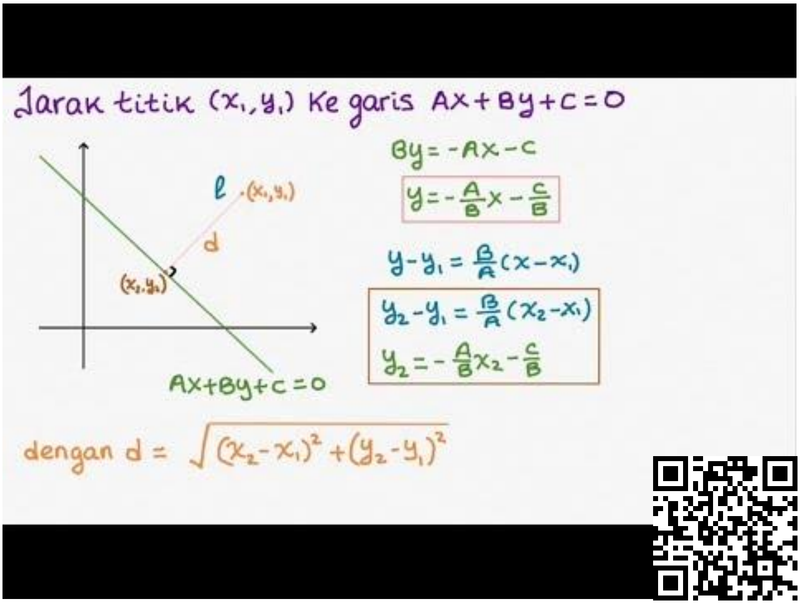
4. Jarak Titik dan Garis

a. Jarak antara titik ke garis

Pada pembahasan sebelumnya Anda sudah mempelajari bagaimana mencari jarak antara dua titik. Selanjutnya Anda dapat menelaah materi terkait jarak titik dengan garis, perlu diketahui jarak titik ke garis adalah jarak terpendek yang dapat ditarik dari suatu titik ke garis. Dalam menentukan jarak suatu titik ke garis yang diketahui persamaan garis g = ax + by + c = 0 dengan sebuah titik A (x_1, y_1), dapat ditentukan dengan formula:

$$\text{Jarak titik ke garis } (d) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Untuk pembuktian rumus jarak titik ke garis, Anda dapat membuktikan bersama rekan Anda. Berikut adalah salah satu alternatif pembuktian rumus tersebut, silahkan disimak dan ditelaah yang disajikan dalam Video 6.



Video 6 Pembuktian Rumus Jarak Titik ke Garis

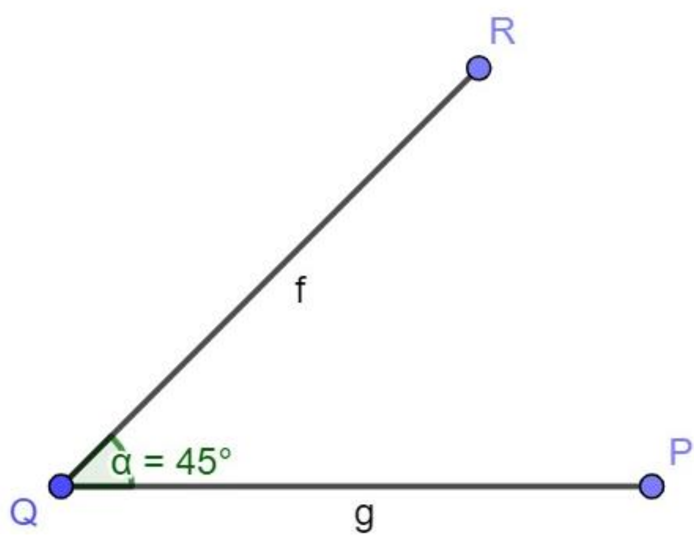
b. Jarak antara dua garis

Jarak antara dua garis dapat ditentukan hanya dan hanya jika kedua garis tersebut sejajar (Nurochman, B: 2007). Misalkan garis $i = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan garis $j = a_2x + b_2y + c_2 = 0$, maka jarak antara garis i dan j garis tersebut dirumuskan.

Untuk pembuktian rumus jarak antara dua garis tersebut, silahkan Anda diskusikan dengan rekan Anda!

c. Sudut Antara Dua Garis

Istilah sudut merupakan area yang merupakan hasil pertemuan dua buah garis lurus atau sinar garis, yang dilambangkan "$\angle$" (Kerami, Djati, DKK: 1994)". Pada gambar ditunjukkan sebuah sudut $\alpha = 45^o$, merupakan sudut yang terbentuk dari perpotongan ruas Garis PQ dan QR, sudut tersebut dapat dituliskan dengan $< Q$, atau dapat juga $< PQR$. Berdasarkan ukurannya terdapat beberapa jenis sudut yaitu: Sudut lancip; jika besar sudut antara 0° dan 90°, Sudut siku-siku dengan besar 90°, Sudut tumpul jika besar sudutnya lebih dari 90°, jika besar sudutnya 180° disebut dengan sudut lurus, sedangkan besar sudut antara 180° dan 360° disebut sebagai sudut refleks, sudut nol derajat ketika sudut tersebut terbentuk dari dua garis yang berimpit, berikutnya disebut dengan istilah sudut penuh dengan besar 360° (www.gramedia.com/literasi/jenis-jenis-sudut/). Ilustrasi terkait sudut antara dua ruas garis dapat dilihat pada gambar 2.8.



Gambar 2. 8 Ilustrasi Sudut Antara Dua Ruas Garis

Jika terdapat dua buah garis misalkan $p \equiv y = m_1x + a = 0,$ dan $q \equiv y = m_2x + b = 0$ yang berpotongan akan membentuk suatu sudut, dimisalkan dengan sudut α, maka untuk menentukan besar sudut α tersebut dapat menggunakan formula.

$$\tan \alpha = \left|\frac{\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2}{1 + \mathrm{m}_1 . \mathrm{m}_2}\right|$$

Anda dapat membuktikan formula di atas bersama teman anggota kelompok Anda!

Contoh Soal 2.3

1. Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh dua persamaan garis berikut. garis $r = x - y + 1 = 0$; dan garis $s = x + \ y - 4 = 0$

   Ditanyakan: Berapa besar sudut yang dibentuk?

   Alternatif jawaban:

   Langkah 1: Tentukan nilai gradien

   $m_r = \ 1$ dan $m_s = -1$

   Langkah 2**:** Substitusi ke rumus

   $tan\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}\right| = \left|\frac{1-(-1)}{1+(1.(-1))}\right| = \frac{2}{0} = \infty$

   $tan\,\theta = \infty,\ \theta = 90°$

   jadi besar sudut yang dibentuk oleh garis $r = x - y + 1 = 0$; dan garis $s = x + \ y - 4 = 0$ adalah $\theta = 90°$

5. Titik Potong Dua Garis

Pada pembahasan sebelumnya, Anda sudah mempelajari terkait dengan letak atau posisi garis pada bidang kartesius. Dua buah garis akan memenuhi kemungkinan yaitu saling sejajar, berimpit atau berpotongan. Pada sub bab ini, Anda akan mempelajari konsep garis linier yang saling berpotongan, lebih khusus dalam melakukan sketsa garis dan penentuan titik potongnya. Titik potong garis merupakan titik yang dilalui oleh dua atau lebih garis sehingga dapat juga dikatakan sebagai titik pertemuan dua.

Garis-garis yang berpotongan dapat terjadi jika kemiringan atau gradien garis tersebut berbeda. Ada beberapa cara untuk menghitung dan menentukan perpotongan suatu garis, yaitu dengan metode substitusi, grafik, dan eliminasi atau gabungan dari tiga metode tersebut. Pada pembahasan ini tidak dibahas secara rinci keempat metode untuk menentukan titik potong garis tersebut, namun lebih aplikasinya dalam penyelesaian soal.

Contoh Soal 2.4

Tentukan koordinat titik potong setiap garis berikut dengan metode substitusi, eliminasi, kombinasi eliminasi dan substitusi, grafik

a. Garis $p \equiv 2x - y = 4$ dan garis $q \equiv x - 4y = -5$
b. Garis $h \equiv 3x - 2y = -14$ dan garis $i \equiv x + 4y = 14$

Alternatif jawaban.
Diketahui: Garis $p \equiv 2x - y = 4$ dan garis $q \equiv x - 4y = -5$
Ditanyakan: Koordinat titik potong?

Penyelesaian:

a. Menggunakan metode substitusi

$2x - y = 4 \; \ldots\ldots (1)$
$x - 4y = -5 \ldots\ldots (2)$
Untuk melakukan penyelesaian dengan metode substitusi, Anda perlu mengubah salah satu persamaan tersebut ke dalam bentuk x atau y, kita akan merubah persamaan 1 ke dalam bentuk y, sehingga didapat:
$2x - y = 4 \quad => \; y = 2x - 4 \ldots\ldots (3)$
Kemudian substitusi persamaan 3 ke persamaan (2), yakni:
$x - 4(2x - 4) = -5$
$x - 8x + 16 = -5$
$x - 8x = -5 - 16$
$-7x = -21$
$x = 3$
Substitusi nilai $x = 3$ ke persamaan 1 $2x - y = 4$
$2(3) - y = 4$
$6 - y = 4$
$-y = 4 - 6$
$-y = -2$
$y = 2$
Jadi, koordinat titik potong garis $p \equiv 2x - y = 4$ dan garis $q \equiv x - 4y = -5$ berada pada titik (3,2)

b. Menggunakan metode eliminasi

Untuk menentukan titik potong dengan metode eliminasi, Anda harus menyamakan koefisien variabel yang sama. Anda dapat menyamakan koefisien dengan mengalikan atau membagikan dengan bilangan yang sama. Pada permasalahan ini kita akan mengeliminasi variabel x dengan cara mengalikan persamaan (1) dengan 1 dan persamaan (2) dengan 2, sedangkan proses eliminasi variabel y dengan mengalikan persamaan (1) dengan 4 dan persamaan (2) dengan 1. Untuk langkah-langkah pengerjaan nya dapat dilihat pada uraian di bawah.

Alternatif Penyelesaian:

Eliminasi x

$2x - y = 4$ di kali 1;

$2x - y = 4$

$x - 4y = -5$ di kali 2;

$2x - 8y = -10$

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 4 \\ \underline{2x - 8y} & \underline{=} & \underline{-10} \ - \\ 7y & = & 14 \\ y & = & 2 \end{array}$$

Eliminasi y

$2x - y = 4$ di kali 4; menjadi $8x - 4y = 16$

$x - 4y = -5$ di kali 1; $x - 4y = -5$

$$\begin{array}{rcl} 8x - 4y & = & 16 \\ \underline{x - 4y} & \underline{=} & \underline{-5} \ - \\ 7x & = & 21 \\ x & = & 3 \end{array}$$

Jadi titik potongnya adalah (3,2)

c. Menggunakan metode gabungan eliminasi dan substitusi

Metode berikutnya adalah kombinasi dari eliminasi dan substitusi, Untuk menentukan titik potong dengan metode kombinasi, Anda dapat mengeliminasi salah satu variabel kemudian dilanjutkan dengan melakukan substitusi.

Langkah awal dapat dilakukan dengan menggunakan metode eliminasi baik mengeliminasi nilai x atau y, kemudian digunakan dalam menentukan nilai lainnya dengan menggunakan metode substitusi.

Berikut ini langkah pengerjaan dengan melakukan eliminasi nilai x untuk mendapatkan nilai, kemudian hasil nilai y disubstitusikan dalam persamaan.

Eliminasi x	nilai $y = 2$, kemudian disubstitusikan ke persamaan
$2x - y = 4$ di kali 1; $2x - y = 4$	$2x - (2) = 4$
$x - 4y = -5$ di kali 2; $2x - 8y = -10$	$2x = 4$
$2x - y = 4$	$x = 2$
$\underline{2x - 8y = -10}$ _	
$7y = 14$	
$y = 2$	

Jadi titik potongnya adalah (3,2)

Eliminasi y	Selanjutnya akan dilakukan eliminasi terhadap nilai y untuk mendapatkan nilai x Hasil eliminasi, memberikan nilai $x = 3$,
$2x - y = 4$ dikali 4	$2(3) - y = 4$
$8x - 4y = 16$	$6 - y = 4$
$x - 4y = -5$dikali 1; $x - 4y = -5$	$-y = 4 - 6$
$8x - 4y = 16$	$-y = -2$
$\underline{x - 4y = -5}$ _	$y = 2$
$7x = 21$	
$x = 3$	

Jadi titik potongnya adalah (3,2)

d. Menggunakan metode grafik

Metode berikutnya adalah untuk menentukan titik potong adalah menggunakan grafik persamaan garis tersebut, walaupun cenderung lebih panjang namun menggunakan grafik menjadi salah satu cara yang dapat Anda gunakan. Langkah-langkah untuk menentukan titik potong menggunakan garis adalah dengan menentukan titik potong masing-masing garis terhadap sumbu x dan sumbu y, kemudian ditarik garis. Perpotongan antara dua garis tersebut merupakan titik potong garis yang akan ditentukan. Sebagai contohnya akan diselesaikan contoh yang sudah dibahas di atas.

Contoh Soal 2.4

$2x - y = 4$

Memotong sumbu x maka y = 0

$2x - 0 = 4$

$2x = 4$

$x = 2$

Titik potong dengan sumbu x dititik (2,0)

Memotong sumbu y maka x = 0

$$2x - y = 4$$
$$2(0) - y = 4$$
$$0 - y = 4$$
$$y = -4$$

Titik potong dengan sumbu y dititik $(0, -4)$

$x - 4y = -5$

Memotong sumbu x maka y = 0

$x - 4(0) = -5$

$x - 0 = -5$

$x = -5$

Titik potong dengan sumbu x dititik (-5,0)

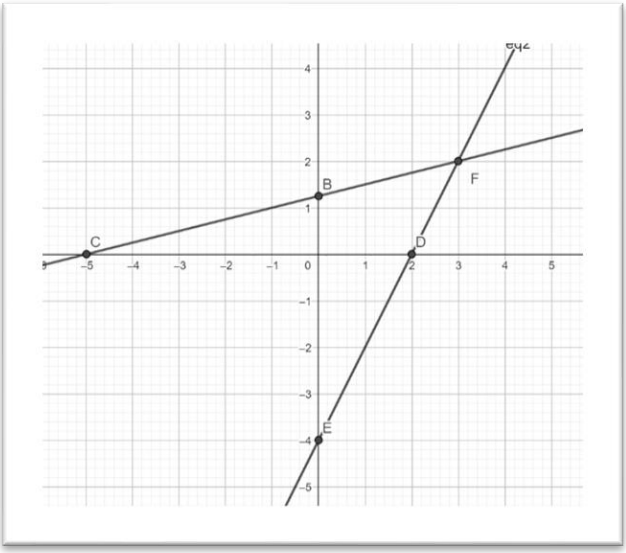
Memotong sumbu y maka x = 0

$$0 - 4y = -5$$
$$-4y = -5$$
$$-4y = -5$$
$$y = \frac{5}{4}$$

Titik potong dengan sumbu y dititik

$$(-5, \frac{5}{4})$$

Langkah 2. Gambarkan grafik pada koordinat kartesius

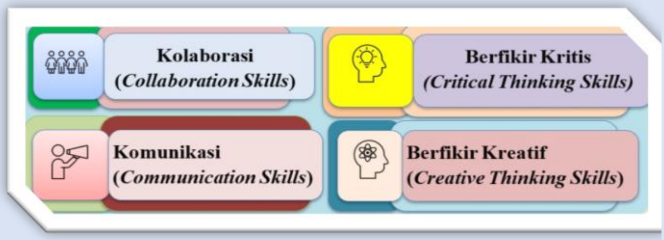


Gambar 2. 9 Ilustrasi Contoh Soal 2.4

Langkah 3. Menentukan titik potong

Pada gambar di atas dapat diketahui bahwa titik potong kedua garis tersebut berada dititik F (3,2).

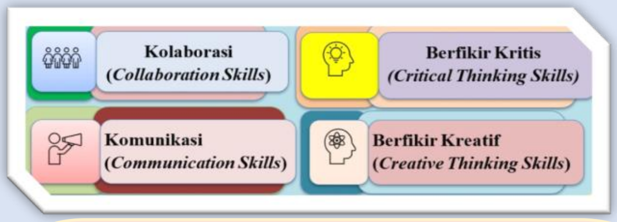
Aktivitas Mahasiswa 4.1



Buat kelompok dengan anggota 4 orang, kemudian diskusikan permasalahan berikut, bagi lah tugas setiap anggota kelompok, dan presentasikan di depan kelas:

1. Tentukan persamaan garis dalam bentuk $y = ax + b$; garis yang memenuhi:
    a. Ber gradien -2 dan melalui titik $(2, -3)$
    b. Ber gradien $\frac{1}{3}$ dan melalui titik $(-4, -2)$
    c. Melalui titik A $(2, -5)$ dan titik B $(-1,2)$
    d. Melalui titik C $(-1, -4)$ dan sejajar dengan garis $2x + 3y - 4 = 0$
    e. Melalui titik D $(-3, -5)$ dan tegak lurus dengan garis $x - 2y - 5 = 0$

Aktivitas Mahasiswa 4.1



2. Diketahui persamaan garis

   $R \equiv 3x - 2y + 4 = 0$; $S \equiv 6x - 4y + 4 = 0$;

   $T \equiv 9x - 6y + 12 = 0$; $U \equiv x + 3y + 4 = 0$;

   $V \equiv 2x + 3y + 12 = 0$; $X \equiv 4x - y + 6 = 0$

   Manakah persamaan garis yang saling sejajar? Kemudian hitunglah jarak antara garis tersebut, beserta gambar grafik nya!
3. Berdasarkan soal nomor 2, tentukan pasangan garis yang saling berpotongan, kemudian tentukan titik potong dan sudut yang dibentuk, beserta gambar grafik nya!
4. Sesuai soal nomor 2 tunjukkan pasangan garis yang saling berimpit beserta gambar grafik nya!

RANGKUMAN

1. Gradien dapat diartikan sebagai derajat kemiringan atau kecuraman dan ke landaian suatu garis m.
2. Gradien suatu garis dapat bernilai positif atau $m > 0$, bernilai negatif $(m < 0)$ serta bergradien $m = 0$

$$Gradien\ (m) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3. Garis adalah salah satu objek geometri dan terdiri dari sekumpulan titik
4. Persamaan garis yang melalui suatu titik (x_1, y_1) dan memiliki gradien m, di rumuskan dengan

$$y = mx + y_1 - mx_1 \text{ atau } y - y_1 = m(x - x_1)$$

5. Persamaan garis lurus yang melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) dapat ditentukan dengan rumus

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

6. Dua buah garis atau lebih akan memenuhi kemungkinan antara lain saling sejajar, berimpit atau berpotongan serta berpotongan tegak lurus
7. Jika diketahui persamaan garis $p_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $p_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$; akan berlaku:
   a. Kedua garis saling sejajar, bila $mp_1 = mp_2$ dan $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

b. Kedua garis saling berimpit bila $mp_1 = mp_2\ dan$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

c. Kedua garis saling berpotongan bila $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$

8. Jarak titik ke garis yang diketahui persamaan garis $g \equiv ax + by + c = 0$ dengan sebuah titik A(x_1,y_1), dapat ditentukan dengan formula :

   Jarak titik ke garis $(d) = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

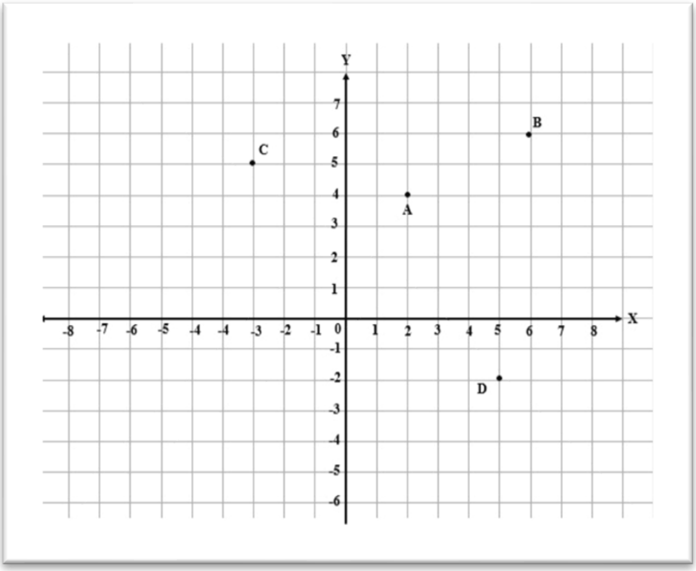
9. buah $p \equiv y = m_1x + a = 0$, dan $q \equiv y = m_2x + b = 0$ yang berpotongan akan membentuk suatu sudut α, sudut tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan formula.

   $$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right|$$

10. Terdapat beberapa cara yang dapat digunakan untuk menentukan titik potong garis, antara lain dengan metode substitusi, eliminasi, kombinasi eliminasi dan substitusi, serta metode grafik

LATIHAN SOAL 2

1. Tentukan gradien ruas garis AB, BC, CD dan BD pada grafik di bawah ini.



Gambar 2. 10 Ilustrasi Latihan soal 2.1

2. Tentukan nilai gradien pada persamaan garis $-14x - 7y + 3 = 0$.
3. Tentukan titik P, Q, R dan S, kemudian hitunglah gradien garis yang melalui titik P dan Q serta titik R dan S.
4. persamaan garis melalui titik pusat bidang kartesius dengan kemiringan $m = bulan\ lahir$ Anda adalah…
5. Jika gradien suatu garis adalah m dan $m = tanggal\ lahir\ Anda$ serta melalui titik $E(15, 4)$, maka persamaan garis yang memenuhi adalah ….
6. Garis a melalui titik $U(-4, -8)$ dan $V(-3, b)$, dengan b adalah bulan lahir Anda, tentukan Persamaan garis a!

7. Persamaan garis yang ditarik dari titik $R(-4,-1)$ dan titik potong garis $6\,x-4\,y+4=0$ dan $4x-y+6=0$ adalah…
8. Berapa besar sudut yang terbentuk dari dua persamaan garis berikut.
   a. $M=x-y+5=0$
   b. $N=6x-3y+7=0$
9. Garis j sejajar dengan garis $2x-5y=1$ dan melalui titik A $(-2,3)$. Sedangkan garis k juga melalui titik A namun tegak lurus dengan garis j, persamaan garis j dan k adalah ….
10. Garis k: $a(x+y)+2(x-y)=0$ dan garis l: $(5y-x)+3a(y-x)=5$ saling tegak lurus. Tentukan nilai a.

BAB 3 PERSAMAAN LINGKARAN

A. Kompetensi yang akan Dicapai

1. Mampu menyusun persamaan lingkaran
2. Dapat menentukan kedudukan titik dan garis pada suatu lingkaran
3. Dapat menentukan garis singgung pada lingkaran.
4. Mampu menyusun garis kutub.
5. Dapat menentukan kuasa suatu titik pada lingkaran.
6. Mampu menyusun garis kuasa.
7. Dapat menentukan titik kuasa.
8. Dapat mengidentifikasi Kedudukan Dua Lingkaran

B. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa mampu menyusun persamaan lingkaran, garis kutub, titik kuasa dan garis kuasa ketepatan menyusun garis singgung pada lingkaran.

C. Tujuan Pembelajaran

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari persamaan garis lurus melalui berbagai kegiatan dan aktivitas belajar. Dengan mempelajari bab ini diharapkan Anda mampu mengusai konsep terkait konsep persamaan lingkaran yaitu.

1. Menyusun persamaan lingkaran

2. Menentukan garis singgung pada lingkaran.
3. Menyusun garis kutub.
4. Menentukan kuasa suatu titik pada lingkaran.
5. Menentukan titik kuasa dan menyusun garis kuasa
6. Mengidentifikasi Kedudukan Dua Lingkaran

Gambar 3. 1 1 Ilustrasi lingkaran
Sumber:https://fisikaupiedu.files.wordpress.com/2017/04/komedi-putar-a.jpg

D. Uraian Materi

1. Persamaan Lingkaran

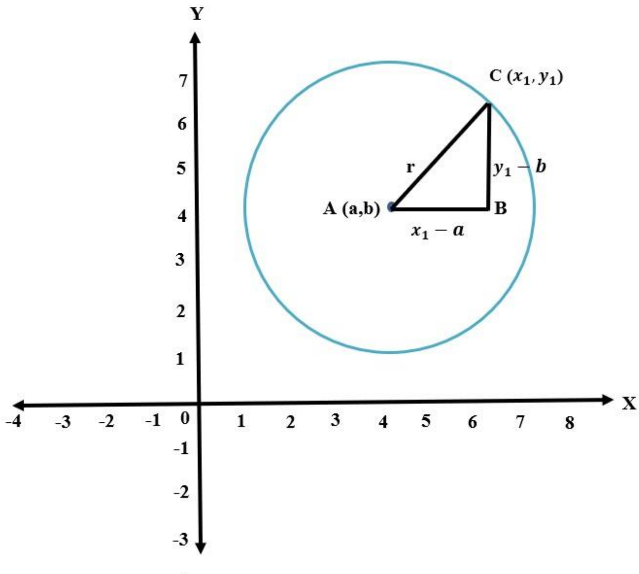
Ilmu pengetahuan yang terkait dengan matematika sangat banyak dimanfaatkan dalam berbagai aspek kehidupan dan perkembangan pengetahuan lainnya. Diantara ilmu dalam matematika adalah lingkaran, lingkaran banyak digunakan dalam berbagai bidang industri, teknologi dan bidang lainnya sehingga dapat membantu kehidupan manusia, baik yang bersifat nyata maupun yang bersifat abstrak. Lingkaran dalam matematika termasuk dalam bangun datar dan menjadi dasar pembentukan bangun ruang seperti tabung, kerucut, dan bola. (Busrah & Buhaerah (2021):73).

Konsep lingkaran dapat didefinisikan sebagai himpunan kedudukan titik-titik pada bidang yang memiliki jarak yang sama pada sebuah titik tertentu pada lingkaran yang dinamakan titik pusat lingkaran, jarak titik pusat ke keliling lingkaran disebut dengan istilah radius atau jari-jari (r), dan jarak dua buah jari-jari disebut dengan diameter lingkaran.

Setelah Anda mempelajari terkait dengan pengertian lingkaran, selanjutnya Anda akan menemukan konsep persamaan lingkaran.

a. Persamaan suatu lingkaran dengan titik pusat $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Untuk menemukan persamaan dari suatu lingkaran yang memiliki titik pusat di (a, b) dengan radius atau jari-jari r akan disajikan ilistrasi seperti pada gambar 3.2.



Gambar 3. 2 Ilustrasi Konsep Persamaan Lingkaran

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa terdapat lingkaran dengan titik pusat titik $A(a, b)$, titik C(x_1, y_1) merupakan titik pada keliling lingkaran. Titik B merupakan titik pada lingkaran dengan koordinat (x_1, b), dengan panjang AC sebagai jari-jari lingkaran (r). Pada lingkaran terbentuklah segitiga siku-siku ABC dan siku-siku pada sudut $< B$. Sehingga berlaku teorema Pythagoras yang berbunyi, jumlah kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya, dalam hal ini dapat dituliskan

$AC^2 = AB^2 + BC^2$; karena $AC = r, AB = x_1 - a$ dan $AC = y_1 - b$

Sehingga dapat dituliskan

$r^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$

Persamaan ini akan sama dengan

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Sehingga dapat dituliskan bahwa persamaan lingkaran dengan titik pusat (a, b) dengan jari-jari lingkaran (r) memiliki persamaan

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Persamaan tersebut dapat juga di uraikan lebih rinci menjadi:

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$, atau dapat juga dituliskan

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$; Jika $-2a=A$, $-2b=B$ dan $a^2+b^2-r^2=C$, maka persamaan lingkaran dapat dituliskan dalam bentuk

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$, bentuk ini disebut sabagai bentuk umum persamaan lingkaran dengan koordinat titik pusat $(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$

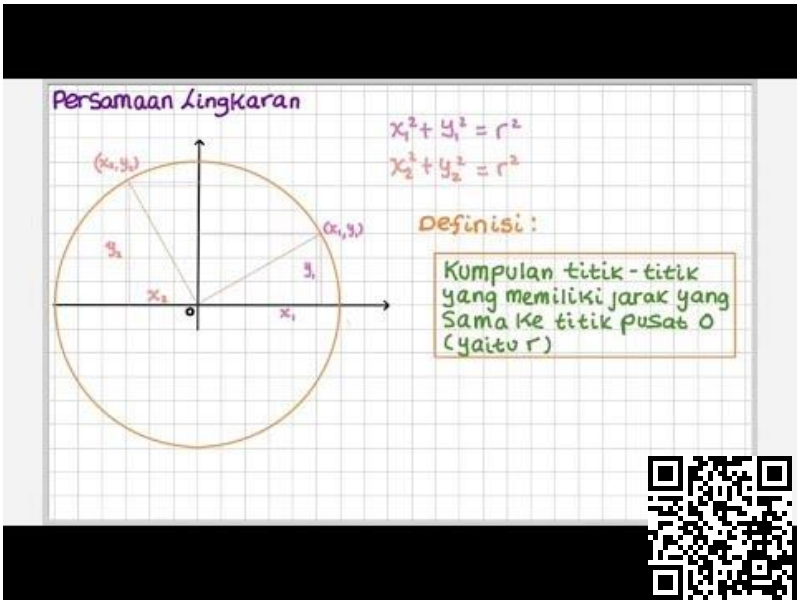
Jadi bentuk umum persamaan lingkaran adalah

$$\mathrm{L}\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

$$\text{Pusat}=-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B$$

$$r=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$$

Agar Anda lebih memahami konsep persamaan lingkaran, baik persamaan lingkaran yang berpusat di titik (p,q), ataupun persamaan yang lebih khusus atau memiliki pusat di titik O(0,0), bentuk umum persamaan lingkaran, serta menentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran, silahkan Anda bersama rekan kelompok melakukan telaah konsep lingkaran pada video 7 dan 8 di bawah!



Video 7 Persamaan Lingkaran

Video 8 Persamaan Lingkaran 2

Selanjutnya lakukan kegiatan aktivitas mahasiswa 5 untuk menambah pemahaman Anda terkait konsep persamaan lingkaran dan penyelesaian permasalahan yang berhubungan dengan persamaan lingkaran!

Kemudian, Bandingkan hasil kelompok Anda dengan hasil kelompok lain serta contoh soal 3.1! Kemudian berikan masukan dan saran jika dibutuhkan.

Aktivitas Mahasiswa

Colaborasi
(*Collaboration Skills*)

Berfikir Kritis
(Critical Thinking Skills)

Buat kelompok dengan anggota 4 orang, kemudian diskusikan permasalahan berikut:

1. Tentukan bentuk umum persamaan suatu lingkaran yang memiliki titik pusat di titik O (0,0) dan berdiameter p.
2. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat dititik O (0,0) dan melalui titik $B(-6,0)$
3. Lingkaran L berpusat dititik A $(-2,1)$ dan melalui titik $B(0,3)$, susun lah persamaan dalam bentuk umum dari lingkaran dengan unsur tersebut!
4. Jika terdapat sebuah lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$, tentukan titik pusat, jari-jari dan diameter serta sketsa nya!
5. Selidikilah kedudukan titik $A(-3,-1), B\ (-1,0),\ C(1,-2)$ dan $D(-1,1)$, serta garis $k: 5y - 3x - 15 = 0$, $l: 2y - 2x + 2 = 0$, dan $m: y + 3 = 0$ jika ditinjau dari lingkaran dengan $L \equiv x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

Contoh Soal 3.1

Lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari-jari 7 memiliki persamaan…

Alternatif jawaban

Diketahui: Lingkaran, berpusat di $(0,0)$ dan berjari-jari $(r) = 7$

Ditanya: persamaan lingkaran tersebut

Penyelesaian

Alternatif jawaban.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; karena berpusat dititik $(0,0)$ maka $a = 0$ dan $b = 0$; $r = 7$

Sehingga menjadi

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 7^2$

$x^2 + y^2 = 49$

$x^2 + y^2 - 49 = 0$

Jadi, persamaan dari lingkaran yang memiliki titik pusat pada titik $(0,0)$ dan berjari-jari 7 adalah $x^2 + y^2 - 49 = 0$

Contoh Soal 3.2

Suatu lingkaran memiliki titik pusat pada titik potong koordinat $(0,0)$ dan melalui titik $P(-3,4)$ hitung dan tentukan persamaan dalam bentuk umumnya!

Pembahasan

Diketahui: Lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan melalui titik $P(-3,4)$

Ditanyakan: persamaan lingkaran tersebut

Alternatif jawaban

Untuk dapat menentukan persamaan lingkaran tersebut, perlu Anda tentukan terlebih dahulu jari-jari atau r.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; Anda dapat menggunakan $x^2 + y^2 = r^2$; namun agar memudahkan Anda mengingat rumus, sebaiknya

gunakan satu rumus saja. Karena berpusat di (0,0) maka a = 0 dan b = 0 dan melalui titik $P(-3,4)$ menunjukkan $x = -3$ dan $y = 4$,
Sehingga menjadi
$(-3 - 0)^2 + (4 - 0)^2 = r^2$
$(-3)^2 + (4)^2 = r^2$
$9 + 16 = r^2$
$25 = r^2$ (Dapat di jabarkan sampai disini, atau dilanjutkan dengan mencari r nya.
$r = \sqrt{25}$
$r = 5$
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 25$
$x^2 + y^2 = 25$
Jadi, lingkaran yang bertitik pusat di (0,0) dan melalui titik $P(-3,4)$ adalah memiliki bentuk umum $x^2 + y^2 = 25$

Contoh Soal 3.3
Pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 30 = 0$. Tentukan titk pusat dan jari-jari dan sketsa grafiknya!
Pembahasan
Diketahui: lingkaran dengan persamaan: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 30 = 0$
Ditanyakan: Titik Pusat, Jari-jari dan sketsa grafik nya?
Alternatif jawaban.
Untuk dapat menjawab permasalahan ini Anda harus mengidentifikasi dan menentukan terlebih dahulu nilai A, B dan C dari lingkaran tersebut, sehingga dapat dituliskan
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Maka $A = -2 \,; B = -4 \,; C = -20$

Pusat $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$

$$= \left(-\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(-4)\right) = (1{,}2)$$

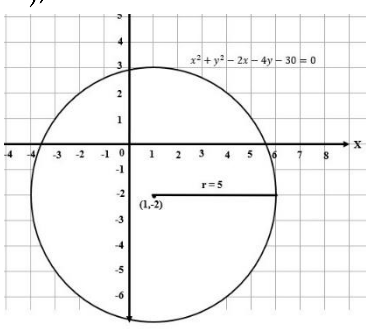
Jari-jari $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

$$= \sqrt{\frac{-2^2}{4} + \frac{-4^2}{4} - (-20)}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 20} = \sqrt{25} = 5$$

Jadi, Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 30 = 0$ berpusat di titik $(1, -2)$ dan berjari-jari 5

Selanjutnya dapat disketsakan grafik nya Untuk dapat menggambarkan grafik nya persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 30 = 0$ Anda perlu menggambar koordinat kartesius terlebih dahulu, kemudian plot lah titik pusat lingkaran, dalam hal ini adalah titik (1, -2),



Gambar 3. 3 2 Ilustrasi Sketsa grafik lingkaran

kemudian dari titik tersebut tariklah jari-jari sepanjang 5 satuan kemudian buatlah lingkaran nya dengan jangka seperti gambar.

Contoh Soal 3.4

Jika $k < 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - 3kx + 2ky - 3 = 0$ Berjari-jari 4, maka koordinat pusat lingkaran tersebut adalah…

Pembahasan

Diketahui: $x^2 + y^2 - 3kx + 2ky - 3 = 0$; $k < 0; r = 4$

Ditanya: Koordinat Titik Pusat lingkaran

Alternatif jawaban

$x^2 + y^2 - 3kx + 2ky - 3 = 0$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Maka $A = -3k$; $B = 2k$; $C = -3$

Jari-jari $r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$

$4^2 = \frac{(-3k)^2}{4} + \frac{(2k)^2}{4} + 3$

$16 = \frac{9k^2}{4} + \frac{4k^2}{4} + 3$

$16 - 3 = \frac{9k^2}{4} + \frac{4k^2}{4}$

$4(13 = \frac{9k^2}{4} + \frac{4k^2}{4})$

$52 = 9k^2 + 4k^2$

$52 = 13k^2$

$\frac{52}{13} = k^2$

$4 = k^2$

$\sqrt{4} = k$

$k = 2 \; atau \; k = -2$

Jadi nilai k yang memenuhi adalah -2

$\mathrm{A} = -3\mathrm{k}$	$\mathrm{B} = 2\mathrm{k}$
$\mathrm{A} = -3(-2)$	$\mathrm{B} = 2(-2)$
$\mathrm{A} = 6$	$\mathrm{B} = -4$

Pusat $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{A}, -\frac{1}{2}\mathrm{B}\right)$

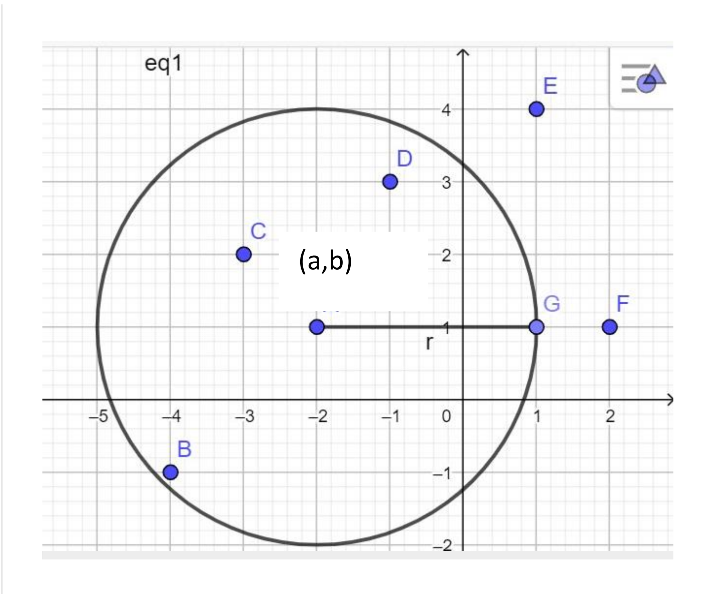
$= \left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-4)\right)$

$= (-3,2)$

Jadi koordinat titik pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 3kx + 2ky - 3 = 0$ adalah $(-3,2)$

2. Kedudukan dari Suatu Titik pada Lingkaran

Suatu titik pada sebuah lingkaran memiliki tiga kemungkinan antara lain, titik berada di luar lingkaran, berada dalam lingkaran dan yang berikutnya adalah titik tersebut berada pada lingkaran atau sepanjang keliling lingkaran. Untuk ilustrasi dapat dilihat seperti gambar 3.4.



Gambar 3. 4 Ilustrasi Kedudukan Titik pada Lingkaran

Gambar 3.4 menunjukkan lingkaran dengan pusat (a, b) dan berjari-jari r dengan beberapa titik dalam lingkaran, pada lingkaran dan di luar lingkaran. Secara geometri titik-titik tersebut dengan mudah ditentukan kedudukan nya dengan lingkaran, namun secara aljabar masih perlu dilakukan perhitungan lagi. Kedudukan suatu titik pada lingkaran dapat ditentukan dengan menghitung jarak antara titik dengan pusat lingkaran. Pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, dapat ditentukan sembarang titik misalkan $B(x_1,y_1)$ dengan jarak titik B ke pusat lingkaran (a,b) dimisalkan p, maka p dapat ditentukan dengan formulasi

$$p^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

a. Jika $p<r$, maka $p^2<r^2$. Mengakibatkan titik $B(x_1,y_1)$ berada di dalam lingkaran.
b. Jika $p=r$, maka $p^2=r^2$. Mengakibatkan titik $B(x_1,y_1)$ berada pada lingkaran.
c. Jika $p>r$, maka $p^2>r^2$. Mengakibatkan titik $B(x_1,y_1)$ berada di luar lingkaran.

Jika titik $B(x_1,y_1)$ dan pusat lingkaran berjarak p, maka persamaan juga dapat dituliskan menjadi $p^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$, dapat diuraikan menjadi $p^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=0$, dan dapat pula dibuat dalam bentuk $p^2=x^2+y^2+Ax+By-C=0$, Jadi pada bentuk umum persamaan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By-C=0$ juga berlaku:

a. Jika $p^2<0$ maka titik berada di dalam lingkaran
b. Jika $p^2=0$ maka titik berada pada lingkaran
c. Jika $p^2>0$ maka titik berada di luar lingkaran

Contoh Soal 4.5

1. Pada lingkaran dengan persamaan $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, Tentukan kedudukan titik berikut!
   a. (1,1)
   b. (2,5)

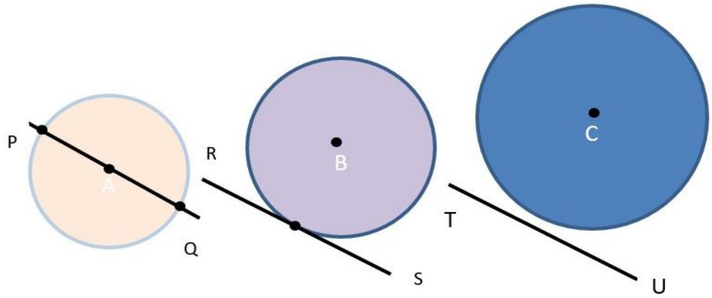
c. (4,1)

Penyelesaian

a. Untuk menjawab permasalahan ini, Anda perlu melakukan substitusi nilai (1,1) ke pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ adalah, maka dapat dituliskan
$p^2 = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20$, nilai x=1 dan y =1 disubtitusikan sehingga menjadi
$p^2 = (1)^2 + (1)^2 - 2(1) + 4(1) - 20$
$p^2 = 1 + 1 - 2 + 4 - 20$
$p^2 = -16$
Karena $p^2 = -16 < 0$ maka titik (1,1) berada di dalam lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
Untuk lebih memberikan pemahaman Anda, untuk contoh b dan c silahkan Anda coba selesaikan bersama rekan Anda!

3. Kedudukan Suatu Garis Terhadap Lingkaran

Suatu garis juga dapat memiliki kemungkinan yang berbeda dalam lingkaran. Seperti halnya sebuah titik, garis pada lingkaran akan memiliki tiga kemungkinan yang berbeda dan tidak dapat sekaligus dimiliki oleh suatu garis. Garis akan saling berpotongan dengan lingkaran di dua titik, berpotongan pada sebuah titik tertentu atau bersinggungan dengan lingkaran, serta tidak berpotongan ataupun bersinggungan dengan lingkaran. Ilustrasi kedudukan garis pada lingkaran dapat dilihat pada gambar 3.5.



Gambar 3. 5 Ilustrasi Kedudukan Garis pada Lingkaran

Gambar 3.5 menunjukkan sebuah lingkaran dengan titik pusat A dan saling berpotongan dengan garis PQ di dua titik yaitu titik P dan Q. Dimisalkan terdapat garis $y = mx + c$ pada lingkaran yang berpusat di titik (a, b) dan berjari-jari r, akan memotong lingkaran tersebut di dua titik jika memenuhi:

$$\frac{|\mathrm{b} - \mathrm{ma} - \mathrm{c}|}{\sqrt{1 + \mathrm{m}^2}} < \mathrm{r}$$

Lingkaran dengan titik pusat B merupakan contoh ilustrasi dari sebuah lingkaran yang saling menyinggung dengan sebuah garis atau berpotongan di satu titik, jika terdapat suatu persamaan garis $y = mx + c$, dan lingkaran dengan (a, b) sebagai pusat lingkaran nya serta berjari-jari r, akan menyinggung jika memenuhi:

$$\frac{|\mathrm{b} - \mathrm{ma} - \mathrm{c}|}{\sqrt{1 + \mathrm{m}^2}} = \mathrm{r}$$

Titik temu atau titik singgung antara garis dan lingkaran dapat ditentukan dengan persamaan

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{-1}=\frac{-(ma+c-b)}{1+m^2}$$

Pada lingkaran yang memiliki titik pusat C merupakan kedudukan dari sebuah garis dengan sebuah lingkaran yang tidak saling bersinggungan ataupun berpotongan. Jika terdapat sebuah garis $y = mx + c$ sebuah lingkaran dengan pusatnya (a, b) dan berjari-jari r, tidak memotong atau menyinggung lingkaran jika memenuhi:

$$\frac{|b-ma-c|}{\sqrt{1+m^2}}>r$$

Kedudukan garis $y = mx + c$ dengan pada lingkaran L≡ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dapat dihitung dan ditentukan dengan melakukan substitusi nilai $y = mx + c$ ke persamaan lingkaran tersebut, kemudian ditentukan nilai diskriminan nya (D) dan di sesuaikan dengan kriteria berikut:

(i) Suatu garis akan memotong lingkaran di dua titik, jika $\mathrm{D} > 0$,

(ii) Garis akan menyinggung lingkaran, jika $\mathrm{D} = 0$

(iii) Garis dan lingkaran tidak saling bersinggungan dan berpotongan jika, $\mathrm{D} < 0$,

Contoh Soal 4.6

1. Identifikasi lah kedudukan garis g yang melalui titik $A(2,3)$ dan $B(4,6)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.

   Alternatif jawaban

   Diketahui: garis g melalui titik $A(2,3)$ dan $B(5,6)$, terlebih dulu tentukan persamaan garisnya dengan rumus persamaan garis $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, kemudian pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dapat dituliskan bahwa titik pusat lingkaran adalah (0,0) dengan jari-jari 3. sehingga dapat dituliskan

   $\frac{y-3}{6-3} = \frac{x-2}{5-2}$

   $\left(\frac{y-3}{3} = \frac{x-2}{3}\right)$, kedua ruas di kali 3, akan menjadi

   $y - 3 = x - 2$

   $y = x + 1$

Maka dapat di identifikasi $a = 0, b = 0, m = 1$, $c = 1$ dan $r = 3$ kemudian menentukan nilai $\frac{|b-ma-c|}{\sqrt{1+m^2}}$ dan dibandingkan dengan nilai r.

$$\frac{|0 - 1(0) - 1|}{\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ jika dibandingkan dengan nilai r dapat dituliskan bahwa $\frac{1}{\sqrt{2}} < 3$ atau nilai $\frac{|b-ma-c|}{\sqrt{1+m^2}} < r$ sehingga dapat disimpulkan bahwa garis g memotong lingkaran di dua titik. Selanjutnya akan dibandingkan dengan menentukan letak garis pada lingkaran dengan rumus diskriminan. Dengan langkah-langkah pengerjaan yaitu substitusi persamaan garis $g \rightarrow y = x + 1$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

$x^2 + y^2 = 9$

$x^2 + (x + 1)^2 = 9$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 9 = 0$

$2x^2 + 2x - 8 = 0$

$x^2 + x - 4 = 0$

Kemudian tentukan nilai determinan dengan rumus $D = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4(1)(-4)$

$= 1 + 16 = 17$

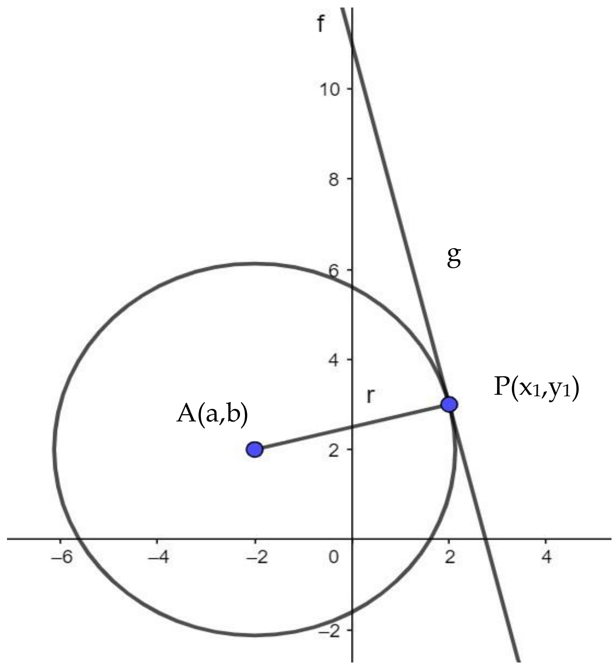
Karena $D = 17 > 0$ maka garis g memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ di dua titik.

4. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Pada pembahasan berikutnya Anda akan membahas konsep terkait persamaan garis singgung lingkaran. Menyinggung sendiri dapat dimaknai menyentuh atau menyenggol sedangkan garis singgung dapat dimaknai sebagai garis yang bersentuhan dengan garis, kurva pada suatu titik tertentu. Sehingga garis singgung lingkaran dapat di artikan sebagai garis yang memotong lingkaran tepat pada satu titik tertentu, dengan titik tersebut dapat dinyatakan sebagai titik singgung lingkaran.

a. **Persamaan garis singgung lingkaran $(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{r}^2$ melalui titik $\mathbf{P}(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$ pada lingkaran**

Pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dan melalui sebuah titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran tersebut, dapat ditarik atau dibuat tepat satu garis singgung. Ilustrasi terkait garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ melalui titik $P(x_1, y_1)$ dapat ditelaah pada gambar 3.6.



Gambar 3. 6 Ilustrasi Garis Singgung Lingkaran

Gambar 3.6 mengilustrasikan lingkaran dengan titik pusat (a, b) dan jari-jari r atau dalam bentuk persamaan lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dengan titik $P(x_1,y_1)$ pada lingkaran sebagai titik singgung dengan garis singgung lingkaran nya adalah g, sehingga dapat dituliskan.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$$
$$x_1^2-2ax_1+a^2+y_1^2-2by_1+b^2=r^2$$
$$x_1^2+y_1^2=2ax_1+2by_1-a^2-b^2+r^2 \ldots (1)$$

Pada gambar 3.6 juga dapat di lihat bahwa Garis singgung lingkaran tersebut adalah g tegak lurus dengan ruas garis AP, gradien garis AP dapat ditentukan dengan $(mAP)=\frac{y_1-b}{x_1-a}$, karena ruas garis AP tegak lurus dengan garis singgung lingkaran g maka dapat dituliskan bahwa,

$$\mathrm{m_{AP}} \times \mathrm{m_g} = -1$$
$$\left(\frac{\mathrm{y_1-b}}{\mathrm{x_1-a}}\right) \times \mathrm{m_g} = -1$$
$$\mathrm{m_{g_1}} = -\frac{(\mathrm{x_1-a})}{(\mathrm{y_1-b})}$$

Dengan memanfaatkan rumus persamaan garis, maka persamaan garis singgung lingkaran g yang melalui titik $\mathrm{P(x_1, y_1)}$ dapat ditentukan dengan mensubtitusi nilai $\mathrm{m_g} = -\frac{(\mathrm{x_1-a})}{(\mathrm{y_1-b})}$; ke persamaan garis dengan gradien tertentu.

$$\mathrm{y-y_1 = m(x-x_1)}$$
$$\mathrm{y-y_1 = m_g(x-x_1)}$$
$$\mathrm{y-y_1} = \left(-\frac{(\mathrm{x_1-a})}{(\mathrm{y_1-b})}\right)(\mathrm{x-x_1})$$
$$\mathrm{(y_1-b)(y-y_1) = -(x_1-a)(x-x_1)}$$

$y_1y - y_1^2 - by + by_1 = -x_1x + x_1^2 + ax - ax_1$
$x_1x + y_1y + ax_1 + by_1 - by - ax = x_1^2 + y_1^2 \ldots\ldots.(2)$
Dari p_1 dan p_2 diperoleh
$x_1^2 + y_1^2 = 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 + r^2 \ldots\ldots p_1$
$x_1x + y_1y + ax_1 - y_1 - by - ax = 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 + r^2$
$(x_1x - ax - ax_1 + a^2) + (y_1y - by_1 - by + b^2) = r^2$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran g yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan berpusat di titik $A(a, b)$ dan berjari-jari r adalah

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Jika lingkaran yang berpusat dititik (0,0) dengan jari-jari r juga melalui titik $P(x_1, y_1)$, berdasarkan rumus di atas dapat ditentukan persamaan garis singgung nya dengan rumus

$$x_1x + y_1y = r^2$$

Contoh Soal 3.5

Diketahui titik $A(2,2), titik\ B(6,2)$ dan lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 8$, tentukan persamaan garis yang melalui titik B dan tegak lurus dengan garis singgung lingkaran yang melalui titik A.

Pembahasan

Alternatif jawaban

Untuk dapat menyelesaikan permasalahan ini, perlu dilakukan beberapa hal yaitu memastikan letak

titik A, dengan cara mensubstitusikan nilai A ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 8$, maka
$2^2 + 2^2 = 8$,
$4 + 4 = 8$
$8 = 8$,

Maka dapat diketahui bahwa titik A berada pada lingkaran, Karena titika A pada lingkaran dapat ditentukan persamaan garis singgung nya dengan rumus $x_1x + y_1y = r^2$, dengan subtitusi $x_1 = 2$, $y_1 = 2$ dan $r^2 = 8$, menghasilkan $2x + 2y = 8$ atau $x + y = 4$ dapat di buat dalam bentuk $y = -x + 4$, Sehingga persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$ yang melalui titik A(2,2) adalah $y = -x + 4$.

Kemudian tentukan nilai gradien persamaan garis $y = -x + 4$, gradien atau $m_A = -1$

Langkah berikutnya adalah menentukan gradien garis yang tegak lurus dengan garis singgung lingkaran yang sudah diperoleh dengan menggunakan konsep hasil kali gradien garis yang saling tegak lurus adalah -1, $m_A \times m_B = -1$ atau $m_B = \frac{-1}{-1} = 1$

Langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan garis menggunakan rumus persamaan garis yang melalui titik dan gradien tertentu yaitu,
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Karena melalui titik B (6,2) maka $x_1 = 6$ dan $y_1 = 2$ dan $m = 1$, dapat dituliskan menjadi
$y - 2 = 1(x - 6)$
$y - 2 = x - 6$
$y = x - 6 + 2$

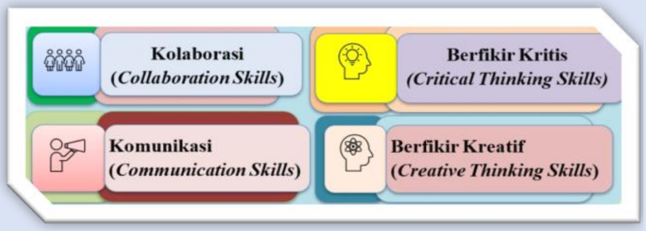
$y = x - 4$

Jadi persamaan garis yang melalui titik B (6,2) dan tegak lurus dengan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$, yang melalui titik A (2,2) adalah $y = x - 4$.

Anda dapat menelaah materi terkait garis singgung lingkaran pada video 9 berikut.

Video 9 Garis singgung lingkaran

Aktivitas Mahasiswa 4.1

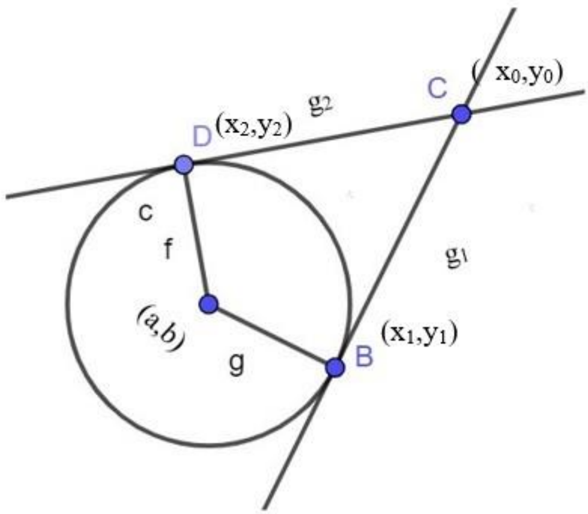


Buat kelompok dengan anggota 4 orang, kemudian diskusikan permasalahan berikut, kemudian presentasikan di depan kelas.

1. Persamaan garis yang menyinggung lingkaran $(x-2)^2+(y-1)^2=17$ yang melalui titik P adalah $4x+y=26$, tentukan persamaan garis yang yang melalui titik P dan titik $Q(8,3)$.
2. Terdapat empat titik yaitu A, B, C, dan D. Titik A merupakan titik pusat lingkaran, titik B dan C adalah titik pada lingkaran, sedangkan D merupakan titik potong garis singgung lingkaran yang ditarik pada melalui titik B dan C. Jika koordinat titik $A(-5,1), B(-1,-2)$, dan $C(-8,5)$, hitunglah koordinat titik D!

b. **Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ melalui titik $P(x_1,y_1)$ di luar lingkaran**

Pembahasan berikutnya adalah terkait persamaan garis singgung lingkaran yang ditarik melalui suatu titik tertentu di luar lingkaran. Melalui satu titik tertentu diluar lingkaran dapat dibuat dua garis singgung lingkaran, untuk menggambarkan dapat di lihat pada gambar 3.7.



Gambar 3. 7 Ilustrasi garis singgung melalui titik di luar lingkaran

Gambar 3.7 memperlihatkan lingkaran dengan titik pusat (a, b) dan dua buah garis singgung yaitu g_1 dan g_2 yang melalui titik C di luar lingkaran. Terdapat beberapa langkah yang dilakukan untuk dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ antara lain:

1) Dimisalkan garis singgung lingkaran 1 (g_1) dan menyinggung lingkaran di titik $B(x_1, y_1)$ dan garis singgung 2 (g_2) menyinggung lingkaran di titik $D(x_2, y_2)$ dan garis g_1 dan garis g_2 berpotongan dititik $C(x_0, y_0)$ yang berada di luar lingkaran.
2) Substitusi nilai titik $C(x_0, y_0)$ dengan pada formula persamaan garis singgung lingkaran $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ $\ldots\ldots(p_1)$, sehingga akan didapatkan persamaan garis $y=ax+c$
3) Substitusi persamaan garis $y=ax+c$ ke persamaan lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, kemudian didapatkan nilai titik singgung garis dengan lingkaran $B(x_1, y_1)$ dan $D(x_2, y_2)$
4) Tentukan persamaan garis singgung lingkaran dengan rumus persamaan garis melalui dua titik pada garis yang melalui titik $C(x_0, y_0)$ dan $B(x_1, y_1)$ serta titik $C(x_0, y_0)\ dan\ D(x_2, y_2)$ dengan rumus $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
5) Persamaan garis singgung lingkaran adalah persamaan garis yang melalui titik $C(x_0, y_0)$ dan $B(x_1, y_1)$ serta titik $C(x_0, y_0)\ dan\ D(x_2, y_2)$

Contoh Soal 3.6

Pada lingkaran $(x-1)^2+y^2=4$, Tentukan garis singgung lingkaran yang melalui titik $P\ (5, -2)$!

Pembahasan

Diketahui: Persamaan lingkaran $(x-1)^2 + y^2 = 4$

Melalui titik $P(5,-2)$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung lingkaran?

Alternatif jawaban

Langkah awal untuk menjawab permasalahan ini adalah memastikan letak titik P terhadap lingkaran dengan cara substitusi nilai P ke persamaan lingkaran dan diperoleh:

$P^2 = (5-1)^2 + (-2)^2$

$P^2 = 4^2 + 4$

$P^2 = 16 + 4$

$P^2 = 16 + 4$

$P^2 = 20$

Sehingga diperoleh $P^2 > r^2$ yang menunjukkan bahwa titik $P(5,-2)$ berada diluar linggkaran $(x-1)^2 + y^2 = 4$

Langkah berikutnya adalah tentukan persamaan garis kutub (polar) dengan Substitusi $P(5,-2)$ ke persamaan garis singgung lingkaran $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$,

Pada lingkaran $(x-1)^2 + y^2 = 4$, dapat diketahui nilai $a = -1, b = 0, r^2 = 4$, sehingga dapat dituliskan

$(5-1)(x-1) + (-2-0)(y-0) = 4$

$(4)(x-1) - 2y = 4$

$4x - 4 - 2y = 4$

$2y = 4x - 8$

$y = 2x - 4$

Langkah berikutnya adalah dengan melakukan substitusi persamaan garis kutub $y = 2x - 4$ ke persamaan lingkaran $(x-1)^2 + y^2 = 4$

$(x-1)^2 + y^2 = 4$

$(x-1)^2 + (2x-4)^2 = 4$

$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16 = 4$

$5x^2 - 18x + 13 = 0$

$(5x - 13)(x - 1) = 0$

$x = \frac{13}{5}$ atau $x = 1$

Untuk mendapatkan nilai y substitusi kan nilai $x = \frac{13}{5}$ atau $x = 1$ ke persaman $y = 2x - 4$, sehingga diperoleh

$x = \frac{13}{5}$ $y = 2(\frac{13}{5}) - 4$ $y = \frac{26}{5} - \frac{20}{5}$ $y = \frac{6}{5}$	$x = 1$ $y = 2(1) - 4$ $y = 2 - 4$ $y = -2$

garis singgung lingkaran yang melalui titik $P(5, -2)$ menyinggung lingkaran di tititk $\left(\frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$ dan titik $(1, -2)$. Dengan menggunakan rumus persamaan garis melalui dua titik persamaan garis singgung lingkaran dapat dijabarkan seperti berikut.

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $\frac{y-(-2)}{\frac{6}{5}-(-2)} = \frac{x-5}{\frac{13}{5}-5}$	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $\frac{y-(-2)}{-2-(-2)}$ $= \frac{x-5}{1-5}$

$-12y - 24 = 16x - 80$ $16x + 12y - 56 = 0$ $4x - 3y - 14 = 0$	$\dfrac{y-(-2)}{0} = \dfrac{x-5}{-4}$ $-4y - 8 = 0$ $-4y = 8$ $y = -2$

Jadi, garis singgung lingkaran $(x-1)^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik $P(5,-2)$ adalah $4x - 3y - 14 = 0$ dan $y = -2$

c. **Persamaan garis singgung lingkaran berpusat di titik $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ dengan gradien m**

Persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat dititik (a, b) dengan gradien m dapat ditentukan dengan formula berikut.

$$\mathrm{y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}}$$

Coba diskusikan dengan rekan duduk Anda bagaimana rumus tersebut dapat diperoleh dengan membaca dan mencari referensi atau video yang relevan.

Contoh Soal 3.7

Sebuah garis menyinggung lingkaran $x^2 + (y-1)^2 = 9$. Jika garis tersebut mempunyai gradien $\frac{5}{12}$. Tentukanlah persamaan gari tersebut!

Pembahasan

Diketahui lingkaran $x^2 + (y-1)^2 = 9$ dan sebuah garis bergradien $\frac{5}{12}$

Tentukan Jari-jari dan pusat

$x^2 + (y-1)^2 = 9 \rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
maka berlaku
Jari – jari: $r^2 = 9 \rightarrow r = 3$; Pusat: $(a,b) = (0,1)$; persamaan garis terebut adalah

$$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{(m^2+1)}$$

$$y - 1 = \frac{5}{12}(x-0) \pm 3\sqrt{\left(\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1\right)}$$

$$y = \frac{5}{12}x \pm 3\sqrt{\left(\frac{25}{144} + 1\right)}$$

$$y = \frac{5}{12}x \pm 3\sqrt{\left(\frac{169}{144}\right)}$$

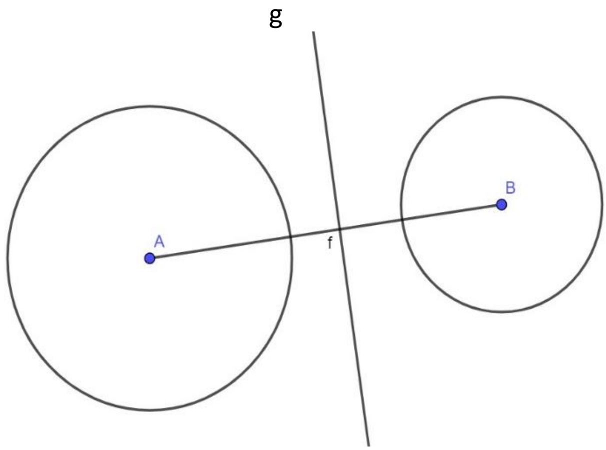
$$y = \frac{5}{12}x \pm \frac{39}{12}$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + (y-1)^2 = 9$ yang bergradien $\frac{5}{12}$ adalah $y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$ atau $y = \frac{5}{12}x - \frac{39}{12}$

5. Kuasa Lingkaran

a. Garis Kuasa

Garis kuasa adalah garis yang mempunyai kuasa yang sama terhadap dua lingkaran atau lebih (Suryani, 93:2007). Ilustrasi terkait garis kuasa dapt ditelaah pada gambar 3.8.



Gambar 3. 8 Ilustrasi Garis Kuasa Lingkaran

Garis kuasa memiliki sifat-sifat khusus antara lain (Yunita, 132:2017) :

1) Garis kuasanya selalu tegak lurus dengan garis yang melalui titik pusat lingkaran
2) Garis kuasanya merupakan garis singgung lingkaran di titik-titik singgung nya, jika dua lingkaran saling bersinggungan
3) garis kuasanya dua lingkaran yang saling berpotongan adalah tali busur persekutuan nya
4) Garis kuasa tiga buah lingkaran yaitu titik potong dari garis kuasa setiap dua buah lingkaran dan hanya mempunyai satu kuasa.

Garis kuasa dua lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + P_1x + Q_1y + R_1 = 0$ dan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 + P_2x + Q_2y + R_2 = 0$. Karena garis kuasa memiliki kuasa yang sama terhadap kedua lingkaran maka berlaku:

$L_1 = L_2$

$x^2 + y^2 + P_1x + Q_1y + R_1 = x^2 + y^2 + P_2x + Q_2y + R_2$

$(P_1 - P_2)x + (Q_1 - Q_2)y + (R_1 - R_2) = 0$

Jadi persamaan garis kuasa lingkaran adalah $(P_1 - P_2)x + (Q_1 - Q_2)y + (R_1 - R_2) = 0$

b. Titik Kuasa

Titik kuasa lingkaran adalah titik yang memiliki kuasa yang sama terhadap lingkaran dan terletak pada lingkaran.

Contoh Soal 3.7

Diketahui dua buah lingkaran masing-masing adalah L_1 dan L_2, L_1 adalah lingkaran dengan pusat dititik $A(2,4)$ dan jari-jari 7 sedangkan L_2 berpusat di titik $B(-16,2)$ dengan jari-jari 5, Tentukan:

a. Persamaan garis kuasa
b. Tentukan titik kuasa pada sumbu x dan kuasanya pada kedua lingkaran
c. Tentukan titik kuasa pada sumbu y dan kuasanya pada kedua lingkaran

Alternatif jawaban

Menjawab permasalahan ini, Anda perlu terlebih dahulu menentukan persamaan kedua lingkaran.

lingkaran dengan pusat dititik $A(2,4)$ dan jari-jari 7 memiliki persamaan $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y + 29 = 0$, sedangkan L_2 berpusat di titik $B(-16,2)$ dengan jari-jari 5, memiliki persamaan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 32x - 4y + 235 = 0$ (Anda dapat menguraikan sendiri cara menentukan persamaannya lingkaran sesuai pembahasan sebelumnya).

Selanjutnya dapat ditentukan terlebih dahulu garis kuasa lingkaran nya dengan cara menentukan

a. garis kuasa lingkaran nya ditentukan dengan $L_1 = L_2$

   $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 29$
   $= x^2 + y^2 + 32x - 4y + 235$

   $x^2 - x^2 + y^2 - y^2 - 4x - 32x - 8y + 4y + 29$
   $- 235 = 0$

   $-36x - 4y - 206 = 0$ dapat juga dituliskan $18x + 2y + 103 = 0$

   Jadi persamaan garis kuasa dari lingkaran dengan pusat dititik $A(2,4)$ dan jari-jari 7 dan lingkaran yang berpusat di titik $B(-16,2)$ dengan jari-jari 5 adalah $18x + 2y + 103 = 0$

b. Titik kuasa pada sumbu x dan kuasanya pada kedua lingkaran

   Titik kuasa dengan sumbu x dapat jawab dengan persamaan garis kuasa,

   $18x + 2y + 103 = 0$, titik kuasa dengan sumbu x adalah titik potong garis kuasa dengan sumbu x, karena memotong sumbu x maka nilai $y = 0$, sehingga persamaan dapat di tulis menjadi

   $18x + 2(0) + 103 = 0$

   $18x = -103$

   $x = -\frac{103}{18}$

   Jadi titik kuasa pada sumbu x adalah $(-\frac{103}{18}, 0)$.

   Selanjutnya nilai titik kuasa di substitusi pada salah satu persamaan lingkaran, dan akan digunakan nilai L_1

$(-\frac{103}{18})^2 + 0^2 - 4(-\frac{103}{18}) - 8(0) + 29 = 0$ (Untuk melatih kemampuan berhitung Anda silahkan dikerjakan).

Berikutnya pada bagian c) dapat Anda coba sendiri sesuai dengan contoh pada bagian b, dengan memperhatikan bahwa titik kuasa pada sumbu y, maka garis kuasa memotong sumbu y, sehingga $x = 0$

c. Titik kuasa pada sumbu y dan kuasanya pada kedua lingkaran (silahkan dikerjakan bersama rekan disebelah Anda!)

6. Kedudukan Dua Lingkaran

Apabila terdapat dua buah lingkaran dengan jarak antara kedua titik pusat lingkaran tersebut dimisalkan d, sedangkan r_1 dan r_2 merupakan jari–jari pada masing–masing lingkaran, maka kedua lingkaran akan memenuhi kemungkinan berikut:

a. Memiliki pusat lingkaran yang sama (se pusat) jika $d = 0$
b. Lingkaran satu terletak di dalam lingkaran lainnya $d < |r_1 - r_2|$
c. Kedua lingkaran akan saling lepas, jika memenuhi $d > r_1 + r_2$
d. Dua buah lingkaran akan saling bersinggungan di dalam lingkaran, jika nilai $d = |r_1 - r_2|$
e. Kedua lingkaran saling bersinggungan di luar lingkaran, ketika nilai $d = |r_1 + r_2|$
f. Saling berpotongan, sehingga $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
g. Lingkaran satu berada di dalam lingkaran lainnya, ketika nilai $d \leq r_1 - r_2$

Contoh soal 3.8

Titik potong lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17$ dan $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 29 = 0$ adalah

Alternatif Jawaban

Titik potong kedua lingkaran dapat ditentukan dengan melakukan eliminasi kedua persamaan lingkaran seperti di bawah.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$
$\underline{x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 = 0\ \ -}$
$-6y - 6 = 0$
$-6y = 6$
$y = -1$

Substitusi nilai $y = -1$ ke salah satu persamaan lingkaran

$x^2 + (-1)^2 + 4x - 4(-1) - 17 = 0$
$x^2 + 1 + 4x + 4 - 17 = 0$
$x^2 + 4x - 12 = 0$

Langkah selanjutnya adalah faktor kan persamaan kuadrat yang terbentuk, hal ini dapat dituliskan dengan.

$(x + 6)(x - 2) = 0$
$x = -6$ atau $x = 2$

Jadi titik potong lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17$ dan $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 29 = 0$ adalah $(-6, -1)$ dan $(2, -1)$

RANGKUMAN

1. Lingkaran di definisikan sebagai himpunan titik-titik pada bidang datar yang berjarak sama pada titik tertentu. jarak yang sama itu di sebut “jari-jari lingkaran “, dan titik tertentu itu disebut “pusat lingkaran”.

2. Persamaan lingkaran yang berpusat di (0,0) dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$ dengan bentuk umumnya $x^2 - r^2 = 0$ dan yang berpusat di (a, b) dengan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ atau dengan bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
3. Persamaan garis singgung lingkaran secara umum dapat di identifikasi sebagai berikut:
   a. Berpusat di (0,0) dan berjari-jari r, serta melalaui titik $(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ pada lingkaran dirumuskan dengan

   $$\boldsymbol{x_1 x + y_1 y = r^2}$$

   b. Berpusat di (a, b) dan berjari-jari r serta melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran dapat dirumuskan dengan

   $$\boldsymbol{(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2}$$

   c. Berpusat di (0,0) dan ber gradien m adalah

   $$\boldsymbol{y = mx \pm \sqrt{r^2(m^2 + 1)}}$$

   d. Berpusat di (a, b) dan bergradien m adalah

   $$\boldsymbol{y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{(m^2 + 1)}}$$

4. Kedudukan titik pada lingkaran terdiri dari tiga kemungkinan yaitu, di luar lingkaran, di dalam lingkaran dan pada lingkaran.
5. Kedudukan garis dengan suatu lingkaran dapat memenuhi tiga kemungkinan yaitu, garis menyinggung lingkaran, memotong lingkaran di dua titik, dan tidak menyinggung dan memotong lingkaran.

6. Garis kuasa lingkaran merupakan garis yang mempunyai kuasa yang sama terhadap dua lingkaran atau lebih
7. Titik kuasa lingkaran adalah titik yang memiliki kuasa yang sama terhadap lingkaran dan terletak pada lingkaran

LATIHAN SOAL 3

1. Buatlah koordinat kartesius kemudian plot lah empat titik yang berada di setiap kuadrat kemudian gambar lah lingkaran jika memiliki jari-jari 4.
2. Buatlah sebuah persamaan lingkaran dalam bentuk umum, kemudian tentukan:
   a. Titik pusat dan jari-jari
   b. Titik potong dengan sumbu x (jika memotong)
   c. Titik potong dengan sumbu y (jika memotong)
3. Tentukan persamaan lingkaran pada soal nomor 1 beserta bentuk umumnya.
4. Sebuah lingkaran L_1 dengan persamaan $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ bersinggungan dengan garis $y=4$ dititik Q, tentukan persamaan lingkaran L_2 dengan titik Q sebagai pusat lingkaran dan berjari-jari sama dengan L_1.
5. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(-3,4)$ dan berjari-jari r, dengan r adalah bulan lahir Anda!
6. Gambar lah koordinat kartesius dan lingkaran, kemudian plot lah dua titik A dan B yang berada pada lingkaran dan titik C di luar lingkaran, selanjutnya tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran melalui titik A, B dan C!
7. Tentukan titik A, B, C, D, E, F, yang memenuhi:

a. Titik A dan B berada dalam lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
b. Titik C dan D berada pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
c. Titik E dan F berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

8. Diketahui sebuah garis g melalui titik $A(1,3)$ dan titik $B(2,1)$. Tentukan posisi garis g terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.
9. Gradien garis yang menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (3,4) adalah
10. Pada lingkaran $L_1 \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ dan $L_2 \equiv (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, tentukanlah titik kuasa dan garis kuasanya!

BAB 4 PERSAMAAN PARABOLA

A. Kompetensi yang akan Dicapai

1. Mampu menyusun persamaan parabola beserta sketsa grafik nya
2. Dapat menentukan kedudukan titik dan garis pada suatu parabola
3. Dapat menentukan garis singgung parabola melaui titik tertentu dan gradien m

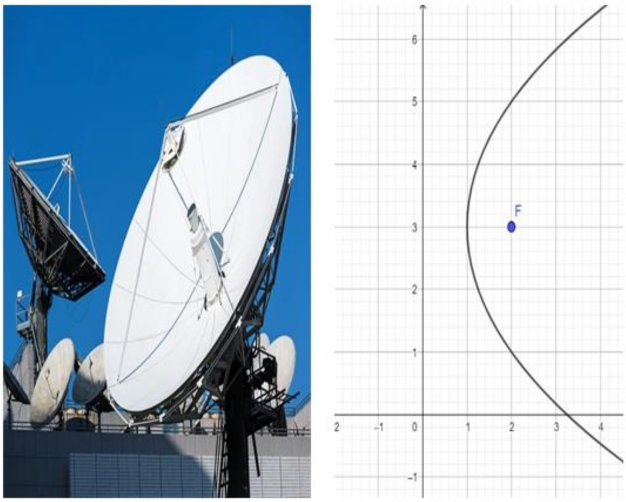
B. Capaian Pembelajaran

Capaian pembelajaran pada pokok bahasan ini adalah mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait konsep persamaan parabola.

C. Tujuan Pembelajaran

Dalam bab ini mahasiswa akan mempelajari persamaan parabola dengan aktivitas pembelajaran yang menunjang kolaborasi dan peningkatan kemampuan komunikasi serta mengakomodir keterampilan berfikir kritis dan kreatif, melalui berbagai kegiatan dan aktivitas belajar. Dengan mempelajari bab ini diharapkan Anda mampu mengusai konsep terkait persamaan parabola yaitu.

1. Menyusun persamaan Parabola.
2. Membuat sketsa grafik Parabola.
3. Menentukan garis singgung pada Parabola.



Gambar 4. 1 Ilustrasi Parabola

D. Uraian Materi

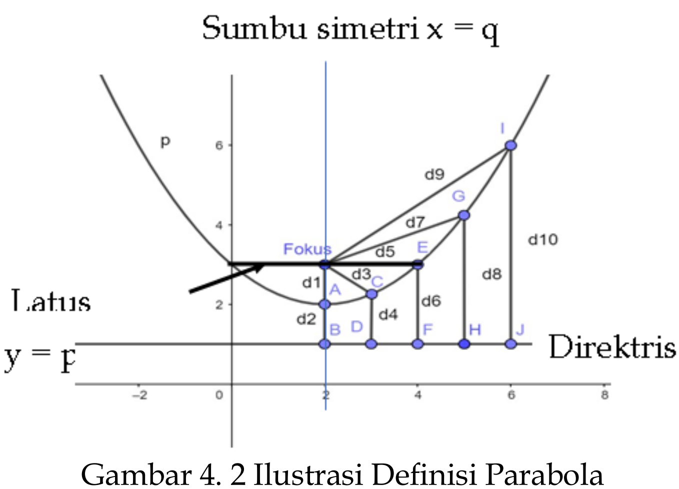
1. Definisi Parabola

Rekan-rekan mahasiswa yang selalu semangat belajar dan menuntut ilmu. Pada bab sebelumnya Anda sudah mempelajari konsep tentang persamaan lingkaran dan garis singgungnya. Sebelum melanjutkan pembahasan berikutnya, masih ingat kah Anda terkait definisi lingkaran. lingkaran dapat berarti sebagai kedudukan dari himpunan titik-titik dengan jarak setiap titiknya sama terhadap titik tertentu yang dinamakan pusat lingkaran nya.

Pada pembelajaran berikutnya, Anda akan mempelajari dan menemukan terkait konsep persamaan dan garis singgung parabola. Parabola dapat dinyatakan sebagai tempat kedudukan dari himpunan titik-titik dengan kriteria berupa memiliki jarak sama dengan suatu titik yang disebut dengan istilah titik fokus dan suatu garis tertentu yang dinamakan garis direktris (Rizki, Nanda Arista 2018: 34).

Parabola juga dapat dimaksudkan sebagai himpunan dari semua titik dengan koordinat (x, y) sehingga jarak antara titik fokus terhadap (x, y) sama dengan jarak garis direktris ke (x, y) (Susilo, 2019: 82).

Selaras dengan pendapat ahli di atas, parabola dapat didefinisikan sebagai himpunan atau tempat kedudukan dari titik-titik tertentu misalkan (x, y) dengan ciri tertentu berupa, berjarak sama dengan suatu titik yang dinamakan titik fokus parabola (f) dan suatu garis yang disebut dengan garis direktris (d). Ilustrasi terkait definisi parabola dapat dilihat pada gambar 4.2.



Gambar 4. 2 Ilustrasi Definisi Parabola

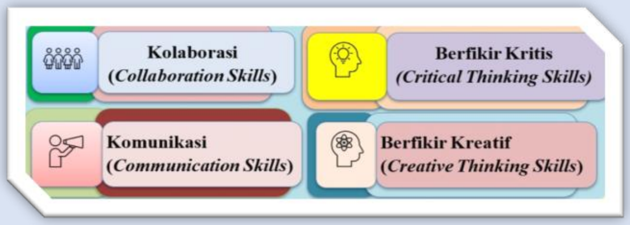
Pada gambar 4.2 dapat dilihat bahwa parabola p ber puncak di titik tertentu misalkan (p, q), dengan garis direktris berupa y = p. Berdasarkan gambar 4.1 dan uraian terkait dengan definisi parabola, dapat identifikasi beberapa unsur yang terdapat pada parabola yaitu:

a. Tempat lintasan titik (x, y) yang disebut lintasan yang merupakan penyusun persamaan parabola dapat dilihat pada gambar yaitu titik A, C, E, G dan I.
b. Titik fokus atau titik api parabola (f), merupakan titik tertentu pada parabola yang menentukan suatu parabola akan terbuka ke arah atas, bawah, kiri atau ke kanan.
c. Garis direktris, merupakan garis yang tegak lurus dengan sumbu simetri parabola, dimana jarak antara garis direktris dan puncak parabola sama dengan jarak fokus dengan puncak parabola.
d. Titik Puncak, merupakan titik maksimum atau minimum dari suatu parabola, dalam hal ini titik puncak akan di lambangkan dengan (p, q)
e. Sumbu simetri parabola, yaitu garis yang tegak lurus dengan garis direktris dan melalui titik puncak dan fokus parabola, yang membagi parabola dengan sama besar.
f. Latus rektum, merupakan garis yang tegak lurus dengan simetri parabola dan melalui titik fokus parabola.

Agar lebih memahami konsep terkait parabola dan kedudukan titik terhadap parabola, silahkan lakukan aktivitas mahasiswa 4.1! Dengan terlebih membentuk kelompok dengan jumlah masing-masing kelompok empat orang dengan ketentuan, dua orang dari kelompok asal dan dua orang dari kelompok kawan. Untuk penentuan siapa yang anggota kelompok yang akan tinggal ataupun pergi ke kelompok kawan, lakukan diskusi untuk penentuan aturannya.

Bacalah uraian materi dan telaah lah video pembelajaran yang disajikan bersama anggota kelompok Anda, agar dapat menyelesaikan aktivitas mahasiswa yang disediakan. Musyawarah kan terkait pemilihan ketua kelompok dan bagi lah porsi kerja setiap anggota kelompok.

Aktivitas Mahasiswa 4.1

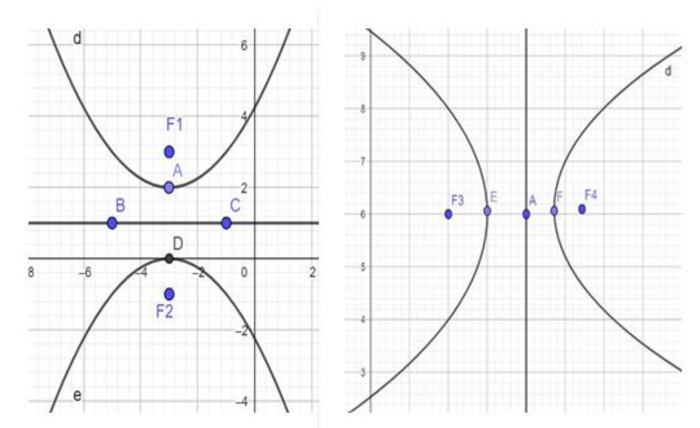


1. Anisa, Jitmau dan Putu, mendapat tugas kelompok untuk membuat persamaan, menentukan unsur-unsurnya dan sketsa suatu parabola. Bantulah mereka dalam menyelesaikan tugasnya jika parabola tersebut memiliki ketentuan sebagai berikut:
   a) Memiliki puncak $(0,0)$ dan titik fokus $(2,0)$
   b) Memiliki puncak $(-2,-2)$ dan titik fokus $(-4,-2)$
2. Tentukan setiap unsur parabola dan kedudukan titik $A(2,1)$, $B(3,2)$, $C(4,4)$, $D(0,4)$, dan $E(5,7)$ pada parabola $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$, kemudian sketsa kan grafik nya!

2. Persamaan Parabola Berpuncak di Titik $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Seperti halnya pada pembahasan persamaan lingkaran, pada pembahasan persamaan parabola dalam buku ajar ini hanya disajikan pembahasan parabola yang memiliki puncak dititik (p,q), untuk perluasan konsep dapat Anda tentukan sendiri atau bersama rekan kelompok Anda terkait parabola yang ber puncak dititik (0,0).

Parabola secara umum dapat diidentifikasi ke dalam empat jenis yaitu, parabola terbuka ke kanan atau ke kiri dan terbuka ke atas atau ke bawah, seperti ilustrasi pada gambar 4.3.



Gambar 4. 3 Ilustrasi arah terbukanya parabola

Ilustrasi posisi arah parabola yang disajikan dalam gambar 4.3 menyajikan parabola dengan titik fokus F1 dan F2 merupakan parabola yang terbuka ke atas dan ke bawah, sedangkan parabola yang terbuka ke kanan dan ke kiri dengan memiliki titik fokus F3 dan F4.

Perbedaan arah terbukanya parabola akan menentukan persamaan parabola beserta unsur-unsurnya. Secara lengkap terkait persamaan parabola beserta semua unsur-unsurnya yaitu titik fokus, persamaan garis direktris nya, titik puncak, sumbu simetri dan arah menghadap atau terbukanya parabola. Jika suatu parabola memiliki titik puncak (p,q) dan parameter (a), maka dapat disusun persamaan parabola yang dapat ditelaah seperti pada tabel 4.1.

Tabel 4. 1 Persamaan Parabola dengan Puncak (p,q) dan Parameter a

Persamaan	$(y-q)^2=4a(x-p)$	$(y-q)^2=-4a(x-p)$	$(x-p)^2=4a(y-q)$	$(x-p)^2=-4a(y-q)$
Titik Fokus	$\mathrm{F}(p,a+q)$	$\mathrm{F}(p,-a+q)$	$\mathrm{F}(p,a+q)$	$\mathrm{F}(p,-a+q)$
Garis Direktris	$x=p-a$	$x=p+a$	$y=q-a$	$y=q+a$
Titik Puncak	(p,q)	(p,q)	(p,q)	(p,q)
Sumbu Simetri	$y=q$	$y=q$	$\mathrm{x}=p$	$\mathrm{x}=p$

Arah Parabola	kanan	kiri	atas	Bawah

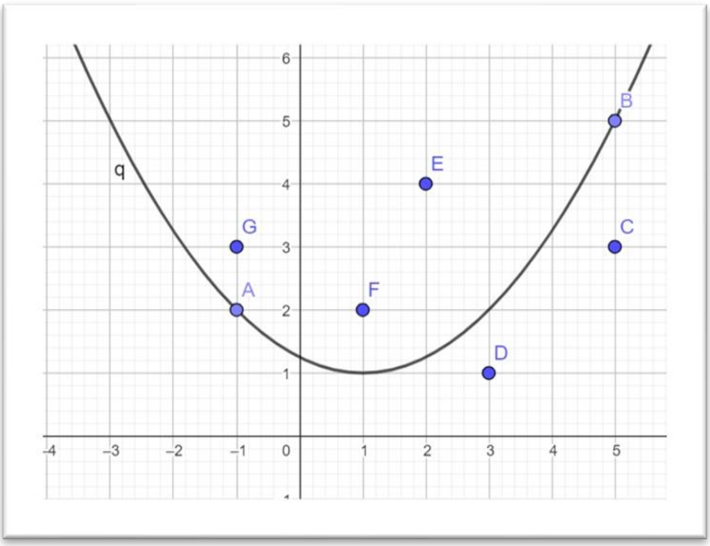
Tabel 4.1 menggambarkan berbagai Persamaan parabola dengan puncak (p, q) dan parameter a, untuk lebih memahamkan Anda, terkait dengan persamaan parabola, silahkan Anda telaah video 10.

Video 10 Persamaan Parabola

Setelah menelaah video 4.1 persamaan parabola, lanjutkan dengan menelaah konsep kedudukan titik terhadap parabola, kemudian Anda selesaikan aktivitas mahasiswa 4.1

3. Kedudukan Titik Terhadap Parabola

Kedudukan suatu titik terhadap suatu parabola memiliki tiga kemungkinan, anta lain: titik berada pada lintasan parabola, di dalam parabola dan titik tersebut berada di luar parabola. Hal ini selaras dengan pendapat Secara teori kedudukan titik terhadap parabola ada tiga jenis, yaitu titik berada di luar parabola, titik berada di dalam parabola dan titik berada pada lintasan parabola. (Zulfiqar & Buhaerah,2021:108). Ilustrasi terkait kedudukan titik dapat di telaah pada gambar 4.4.



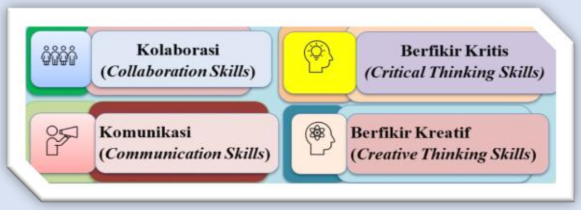
Gambar 4. 4 Ilustrasi Kedudukan Titik pada Parabola

Pada Gambar 4.3 dapat ditelaah bahwa terdapat parabola q dengan titik fokus F dan titik A dan B yang berada pada lintasan parabola, titik C dan D yang berada di luar parabola dan titik E dan G yang berada di dalam parabola.

Untuk dapat mengidentifikasi suatu titik secara aljabar dapat dilakukan dengan mensubstitusikan titik koordinat A (x_1, y_1) tersebut ke persamaan parabola misalkan p dan ditentukan posisinya sesuai kriteria berikut:

a. Jika hasil substitusi nilai $p < 0$, maka titik A (x_1, y_1) berada di dalam parabola
b. Jika hasil substitusi nilai $p = 0$, maka titik A (x_1, y_1) berada pada lintasan parabola
c. Jika hasil substitusi nilai $p > 0$, maka titik A (x_1, y_1) berada di luar parabola

Aktivitas Mahasiswa 4.1

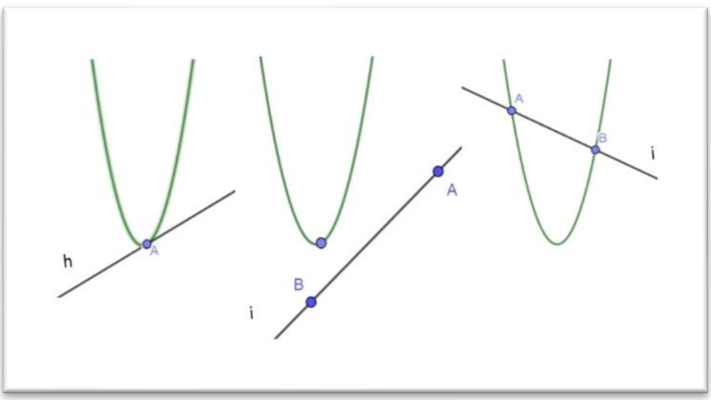


Diskusikan dengan rekan Anda secara berpasangan!

1. Tentukan persamaan parabola dengan unsur-unsur berikut
   a. Ber puncak di titik (0,0) dan memiliki titik fokus (0,4)
   b. Memiliki persamaan direktris $y = 0$, dan berfokus $(-2, -6)$
2. Tentukan unsur-unsur parabola berikut:
   a. $(x - 2)^2 = 4y - 8$
   b. $y^2 - 16x - 4y + 68 = 0$
3. Buatlah persamaan parabola, kemudian tentukan setiap unsur-unsurnya!

4. Kedudukan Garis Terhadap Parabola

Seperti halnya pada lingkaran, kedudukan garis terhadap suatu parabola akan memenuhi tiga kemungkinan yaitu: memotong di dua titik pada parabola, memotong hanya di satu titik atau menyinggung parabola, dan garis tidak menyinggung ataupun memotong parabola. Hal tersebut sesuai dengan pendapat (Zulfiqar & Buhaerah,2021:110) yang menyatakan bahwa kedudukan garis terhadap parabola dapat dibagi menjadi tiga jenis yaitu garis memotong parabola, garis bersinggungan dengan parabola, dan garis yang tidak berpotongan atau bersinggungan dengan parabola. Ilustrasi terkait ketiga jenis kedudukan garis terhadap parabola dapat ditelaah pada gambar 4.5.



Gambar 4. 5 Ilustrasi Kedudukan Garis pada Parabola

Pada gambar 4.5 dapat ditelaah bahwa terdapat tiga garis h, I dan j yang masing-masing, menyinggung parabola, tidak memotong dan menyinggung, serta memotong parabola di dua titik.

5. Persamaan Garis Singgung Parabola

Persamaan garis yang menyinggung parabola dapat ditentukan atau dihitung jika memenuhi dua kondisi yaitu: jika titik singgung nya pada parabola misalkan (x_1, y_1) diketahui atau jika gradien (m) garis singgung nya diketahui, silahkan Anda menelaah pada video 11.

Video 11 Garis Singgung Parabola

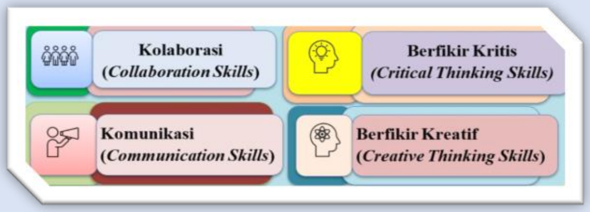
Tabel 4. 2 Persamaan Garis Singgung Parabola

No	**Persamaan**	**Garis singgung melalui titik (x1, y1)**	**Garis singgung dengan gradien (m)**
1	$y-q)^2 = 4a(x-p)$	$(y-y_1)(y-q) = 2a(x-x_1)$	$y = mx - mp + q + \frac{a}{m}$
2	$(y-q)^2 = -4a(x-p)$	$(y-y_1)(y-q) = -2a(x-x_1)$	$y = mx - mp + q - \frac{a}{m}$
3	$(x-p)^2 = 4a(y-q)$	$(x-x_1)(x-p) = 2a(y-y_1)$	$y = mx - mp + q - am^2$
4	$(y-q)^2 = -4a(x-p)$	$(x-x_1)(x-p) = -2a(y-y_1)$	$y = mx - mp + q + am^2$

Agar menambah pengetahuan dan wawasan Anda terkait garis singgung parabola, bersama-sama dalam kelompok mu, telaah lah video 4.2, kemudian catatlah konsep penting yang Anda temukan dan diskusikan konsep tersebut. Setelah itu, silahkan lakukan aktivitas mahasiswa 4.2.

Konsep Penting yang Ditemukan

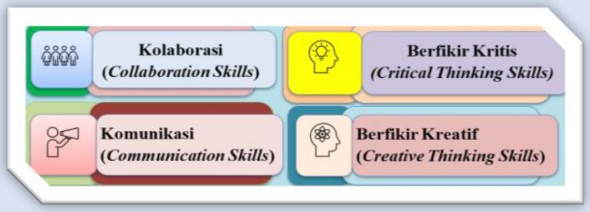
Aktivitas Mahasiswa 4.2



Diskusikan dengan rekan kelompok Anda, terkait permasalahan berikut!

1. Pada parabola $y^2 + 8x - 4y + 20 = 0$, tentukan persamaan garis singgung nya jika:
   a. Ditarik melalui titik $\mathrm{A}(-4, -2)$
   b. Ditarik melalui titik $\mathrm{A}(0,2)$
2. Pada parabola $x^2 - 4x + 8y + 20 = 0$, tentukan persamaan garis singgung nya jika:
   a. Gradien garis singgung nya $(\mathrm{m}) = -1$
   b. Gradien garis singgung nya $(\mathrm{m}) = 1$

Aktivitas Mahasiswa 4.2



3. Buatlah sebuah persamaan parabola, kemudian tentukan garis singgung nya jika memiliki gradien tertentu dan melalui titik tertentu

RANGKUMAN

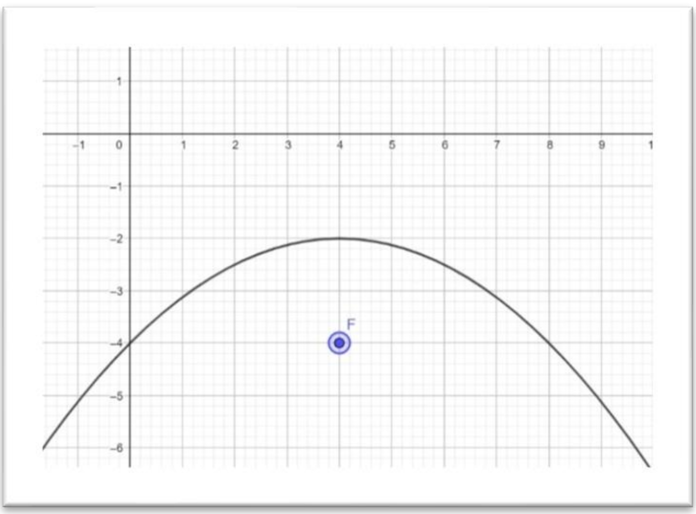
1. Parabola dapat didefinisikan sebagai himpunan atau tempat kedudukan dari titik-titik tertentu misalkan (x, y) dengan ciri tertentu berupa, berjarak sama dengan suatu titik yang dinamakan titik fokus parabola (f) dan suatu garis yang disebut dengan garis direktris (d).

2. Parabola secara umum dapat diidentifikasi ke dalam empat jenis yaitu, parabola terbuka ke kanan atau ke kiri dan terbuka ke atas atau ke bawah
3. Perbedaan arah terbukanya parabola akan menentukan persamaan parabola beserta unsur-unsurnya
4. Kedudukan suatu titik terhadap suatu parabola memiliki tiga kemungkinan, anta lain: titik berada pada lintasan parabola, di dalam parabola dan titik tersebut berada di luar parabola
5. Kedudukan garis terhadap suatu parabola akan memenuhi tiga kemungkinan yaitu: memotong di dua titik pada parabola, memotong hanya di satu titik atau menyinggung parabola, dan garis tidak menyinggung ataupun memotong parabola

LATIHAN SOAL 4

1. Jelaskan definisi parabola beserta sketsa nya dan unsur-unsurnya dengan bahasa yang mudah Anda dipahami!
2. Pada parabola $(x-3)^2 = 8y - 12$, tentukan setiap unsur parabola.
3. Susun lah persamaan parabola yang memiliki titik puncak dititik (4,3) dan titik fokus (4,2), kemudian tentukan unsur-unsur parabola lainnya!
4. Suatu parabola memiliki persamaan direktris adalah $x = 1$ dan berfokus di titik $(-3,2)$, susun lah persamaan parabola beserta unsur-unsurnya!
5. Suatu parabola memiliki titik puncak dititik P (-2,2) dan persamaan direktris $y = b$; dengan b adalah bulan lahir Anda. Tentukan unsur-unsur parabola beserta persamaannya!

6. Parabola P, memiliki persamaan $x^2 + 2x + 4y + 5 = 0$, identifikasi lah, setiap unsur-unsurnya, kemudian tentukan kedudukan titik $A(-4,-2), B(-3,-2), C(-2,-2), D(1,-2)$.
7. Pada parabola $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$, Tentukan persamaan garis singgung yang di tarik melalui titik $A(4,1)$
8. Pada parabola $y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$, Tentukan persamaan garis singgung yang ber gradien $m = 1$
9. Buatlah sebuah persamaan parabola yang menghadap ke kanan, kemudian tentukan yang menyinggung parabola tersebut dan memiliki gradien $m = -1$
10. Pada parabola seperti gambar di bawah, tentukan persamaan garis singgung nya jika ber gradien $m = 2$



Gambar 4. 6 Ilustrasi Latihan Soal 4

BAB 5 PERSAMAAN ELIPS

A. Kompetensi yang akan Dicapai

1. Mampu menyusun persamaan elips beserta sketsa grafik nya
2. Dapat menentukan garis singgung elips
3. Dapat mengidentifikasi sumbu sekawan elips

B. Capaian Pembelajaran

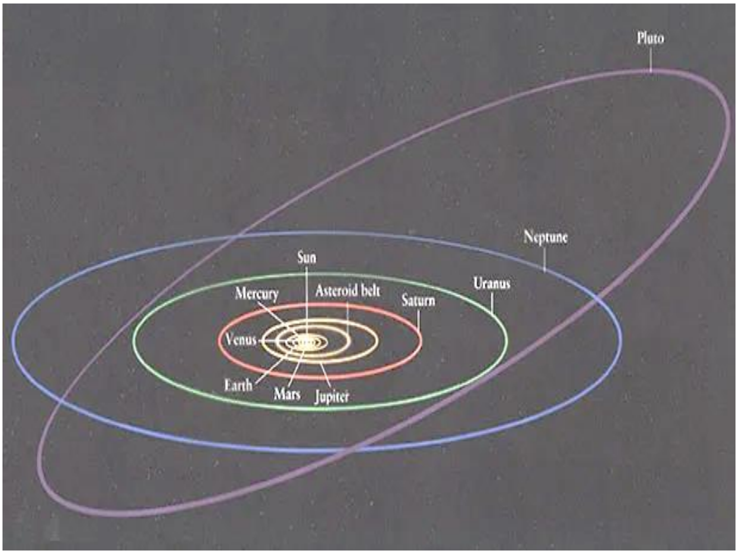
Capaian pembelajaran pada pokok bahasan ini adalah mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait persamaan elips.

C. Tujuan Pembelajaran

Melalui berbagai aktivitas dalam pembelajaran, mahasiswa akan menemukan dan mempelajari persamaan elips dengan aktivitas pembelajaran yang menunjang kolaborasi dan peningkatan kemampuan komunikasi serta mengakomodir keterampilan berfikir kritis dan kreatif, Dengan mempelajari bab ini diharapkan Anda mampu mengusai konsep terkait persamaan elips antara lain:

1. Menyusun persamaan elips
2. Menggambar atau membuat sketsa elips
3. Menentukan garis singgung pada elips

4. Mengidentifikasi dan menjelaskan sumbu sekawan elips.



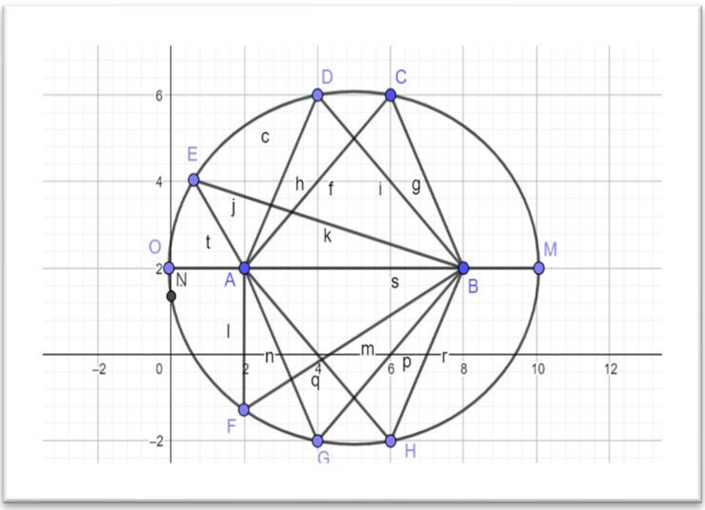
Gambar 5. 1 Ilustrasi Elips dalam Orbit Planet
Sumber.https://langitselatan.com/2013/02/19/mengapa-orbit-planet-berbentuk-elips/

D. Uraian Materi

1. Definisi Elips

Konsep elips dapat dimaknai sebagai kumpulan titik-titik berupa lengkungan yang merupakan hasil dari perpotongan dari kerucut lingkar dan suatu bidang datar dengan jumlah jaraknya dengan kedua titiknya (titik fokus elips) adalah konstan (Kerami, 1994), elips dihasilkan oleh bidang irisan yang memotong kerucut namun tidak sejajar terhadap garis pembentuknya ataupun tegak lurus dengan sumbu simetri kerucut, atau dapat didefinisikan sebagai himpunan dari semua titik dengan ketentuan bahwa jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu bernilai tetap atau sama (Sunardi, 2014).

Sesuai dengan pendapat definisi elips, maka disimpulkan bahwa elips dapat dimaknai dengan tempat kedudukan atau lintasan yang terbentuk dari titik-titik yang jumlah jarak atau panjang antara titik-titik tersebut dengan kedua fokus elips selalu tetap atau sama. Konsep elips dapat diidentifikasi sesuai gambar 5.2.

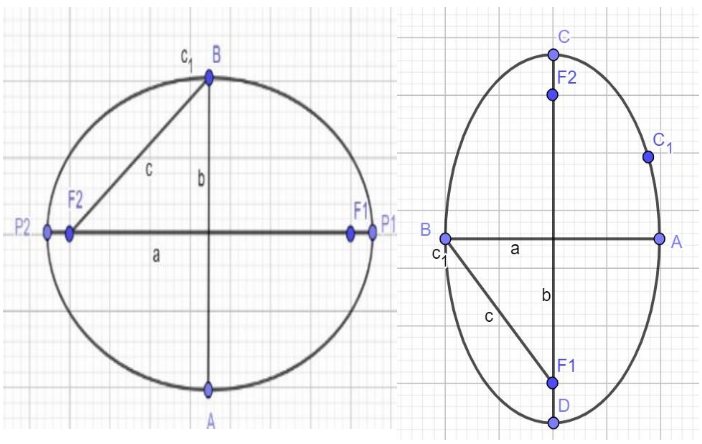


Gambar 5. 2 Ilustrasi Konsep Elips

Selaras dengan gambar 5.2 dapat di identifikasi bahwa, jumlah jarak titik AC dengan BC sama dengan jumlah jarak AD dan BD, juga sama dengan jumlah jarak AE dan BE, serta sama dengan jumlah jarak titik lainnya yang melalui titik fokus elips.

Secara umum elips dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu elips horizontal jika sumbu mayor elips sejajar dengan sumbu x dan elips vertikal apabila sumbu mayor elips sejajar sumbu y.

Persamaan elips secara umum dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$ dengan ketentuan $a > b > 0,$ jika $a > b$ maka merupakan elips horizontal dan $b > a,$ menyebabkan elips akan memiliki mayor vertikal dengan sumbu y atau disebut elips vertikal. Ilustrasi terkait elips horizontal dan vertikal dapat ditelaah pada gambar 5.3.



Gambar 5. 3 Ilustrasi Elips Horizontal dan vertikal

2. Persamaan Elips dan Garis Singgungnya

Pembahasan berikutnya, Anda dapat menelaah video 12. terkait persamaan elips, dan garis singgung elips pada video 13, kemudian selesaikan aktivitas mahasiswa 5.1 secara kelompok dengan cara berdiskusi.

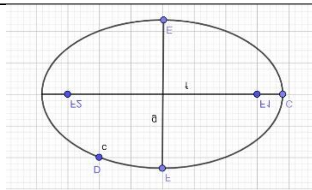
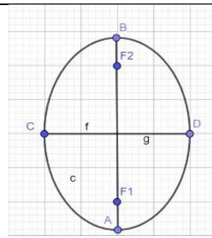
Video 12 Persamaan Elips

Selanjutnya, Anda dapat melakukan telaah pada video 13 tentang garis singgung elips, baik secara mandiri atau berkelompok.

Video 13 Persamaan Garis Singgung Elips

Setelah menelaah video 5.1 dan 5.2, apakah Anda sudah memahami konsep persamaan elips dan garis singgung nya? Anda dapat juga melakukan analisis pemecahan masalah pada contoh 5.1 agar dapat menambah pemahaman konsep Anda terkait persamaan elips dan garis singgung elips! Anda dapat menggunakan tabel 5.1 untuk menelaah contoh tersebut.

Tabel 5. 1 Unsur-unsur elips dengan koordinat puncak (p,q)

Unsur Elips	**Koordinat Puncak $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$**	
Persamaan	$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$	
Sketsa		
Jenis elips	Horizontal	Vertikal
Ciri Khas	$a > b$ dan $c^2 = a^2 - b^2$	$a < b$ dan $c^2 = b^2 - a^2$
Puncak	$(\pm a + p, q)$	$p, \pm b + q$
Fokus	$F(p \pm c, q)$	$F(p, q \pm c)$
Panjang Sumbu Mayor	2a	2b
Panjang Sumbu Minor	$2b$	$2a$

Unsur Elips	**Koordinat Puncak $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$**	
Eksentris	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Direktris	$x = \pm\frac{a^2}{c} + p$	$y = \pm\frac{b^2}{c} + q$
Sumbu Utama	$y = q$	$x = p$
Sumbu Sekawan	$x = p$	$y = p$
Latus rektum	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Persamaan Garis Singgung		
Melalui titik (x_1, y_1) pada elips	$\frac{(x_1 - p)(x - p)}{a^2} + \frac{(y_1 - q)(y - q)}{b^2} = 1$	$\frac{(x_1 - p)(x - p)}{b^2} + \frac{(y_1 - q)(y - q)}{a^2} = 1$
Ber gradien m	$y - q = m(x - a) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$	$y - q = m(x - a) \pm \sqrt{b^2m^2 + a^2}$

Contoh Soal 5.1

Pada elips dengan Persamaan $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, tentukan koordinat pusat, titik puncak, titik fokus, panjang sumbu mayor, panjang sumbu minor, sumbu utama dan sumbu sekawan elips!

Penyelesaian

Alternatif jawaban

Untuk dapat menentukan unsur-unsur, maka perlu diperhatikan elips tersebut horizontal atau vertikal, karena persamaan elips $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; karena 16<25, maka $a<b$, sehingga diketahui bahwa elips merupakan elips vertikal dan berlaku $c^2=b^2-a^2$ untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat digunakan persamaan $\frac{(x-p)^2}{b^2}+\frac{(y-q)^2}{a^2}=1$, dengan unsur-unsur yang dapat di lihat pada tabel 5.1.

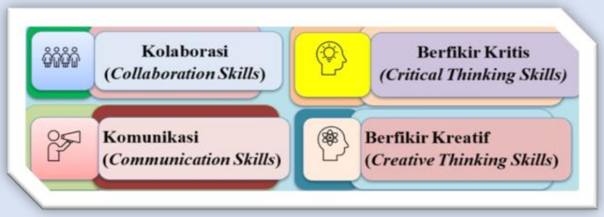
$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, sesuai dengan rumus $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$, sehingga dapat ditentukan:

$a^2=16$ $a=4$	$b^2=25$ $b=5$	p = 2 q = 0

Karena berlaku $c^2=b^2-a^2$ maka; $c^2=5^2-4^2$, $c=3$

Selanjutnya selesaikanlah Aktivitas Mahasiswa 5.1

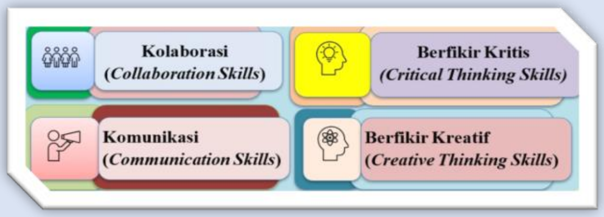
Aktivitas Mahasiswa 5.1



Diskusikan dengan Anggota kelompok Anda, terkait permasalahan berikut! kemudian presentasi di depan kelas!

1. Tuliskan unsur-unsur elips dan beri penjelasan!
2. Pada elips dengan persamaan $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, tentukan setiap unsur-unsurnya beserta sketsa grafik nya!
3. Tentukan unsur-unsur elips beserta grafik nya jika persamaannya adalah $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$!

Aktivitas Mahasiswa 5.1



4. Buatlah sebuah persamaan elips, kemudian tentukan unsur-unsur elips tersebut beserta gambar grafik nya!
5. Tentukan salah satu titik pada elips sesuai soal nomor 2, kemudian tentukan persamaan garis singgung melalui titik tersebut!
6. Tentukan garis singgung pada soal nomor tiga, jika gradien garis singgung nya sama dengan 2 dan -1

RANGKUMAN

1. Elips dapat dimaknai dengan tempat kedudukan atau lintasan yang terbentuk dari titik-titik yang jumlah jarak atau panjang antara titik-titik tersebut dengan kedua fokus elips selalu tetap atau sama.
2. Secara umum elips dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu elips horizontal jika sumbu mayor elips sejajar dengan sumbu x dan elips vertikal apabila sumbu mayor elips sejajar sumbu y
3. Suatu elips dengan persamaan $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$, merupakan elips horizontal jika $a>b$ dan $c^2=a^2-b^2$, serta vertikal jika $a<b$ dan $c^2=b^2-a^2$
4. Unsur-unsur elips terdiri dari: Puncak, Fokus, Sumbu Mayor, Sumbu Minor, Eksentris, Direktris, Sumbu Utama, Sumbu Sekawan dan Latus rektum
5. Persamaan garis singgung elips horizontal yang melalui titik (x_1, y_1) dapat ditentukan dengan persamaan.

$$\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2}+\frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2}=1$$

6. Persamaan garis singgung elips vertikal yang melalui titik (x_1, y_1) dapat ditentukan dengan persamaan.

$$\frac{(x_1-p)(x-p)}{b^2}+\frac{(y_1-q)(y-q)}{a^2}=1$$

7. Persamaan garis singgung elips horizontal yang Ber gradien m dirumuskan dengan persamaan

$$y - q = m(x - a) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

8. Persamaan garis singgung elips vertikal yang Ber gradien m dirumuskan dengan persamaan

$$y - q = m(x - a) \pm \sqrt{b^2m^2 + a^2}$$

LATIHAN SOAL 5

1. Tentukan titik puncak dan fokus elips dengan persamaan $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1!$
2. Hitunglah titik fokus elips dan panjang sumbu mayor dan minor elips dengan persamaan $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1!$
3. Pada elips dengan persamaan $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1!$ Tentukan sketsa grafik nya!
4. Suatu elips dengan persamaan $x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$, tentukan garis singgung yang ditarik melalui titik $P(-3,0)$ dan $Q(-3,4)$
5. Buatlah persamaan elips yang memiliki titik fokus pada titik $A(3,4)$ dan $B(3,-1)$ dengan salah satu puncaknya berada di titik $C(3,-2)$. Kemudian, tentukan persamaan garis singgung nya jika ber gradien $m = -2$

BAB 6 HIPERBOLA

A. Kompetensi yang akan Dicapai

1. Mampu menyusun persamaan hiperbola beserta sketsa grafik nya
2. Dapat mengidentifikasi unsur-unsur hiperbola
3. Mampu mengidentifikasi persamaan asimtot dan direktris suatu hiperbola

B. Capaian Pembelajaran

Capaian pembelajaran pada pokok bahasan ini adalah mahasiswa memahami dan mampu melakukan analisis pemecahan masalah terkait persamaan hiperbola.

C. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran dalam pembahasan materi hiperbola adalah, mahasiswa setelah mempelajari, pokok bahasan ini diharapkan mampu mengusai konsep terkait persamaan hiperbola antara lain :

1. Menyusun persamaan hiperbola
2. Menentukan unsur-unsur hiperbola
3. Menggambar atau membuat sketsa hiperbola
4. Mengidentifikasi persamaan asimtot dan direktris suatu hiperbola

Gambar 6. 1 Sutet Berbentuk Hiperbola
(Sumber. Yunita, 2017)

D. Uraian Materi

1. Definisi dan Persamaan Hiperbola

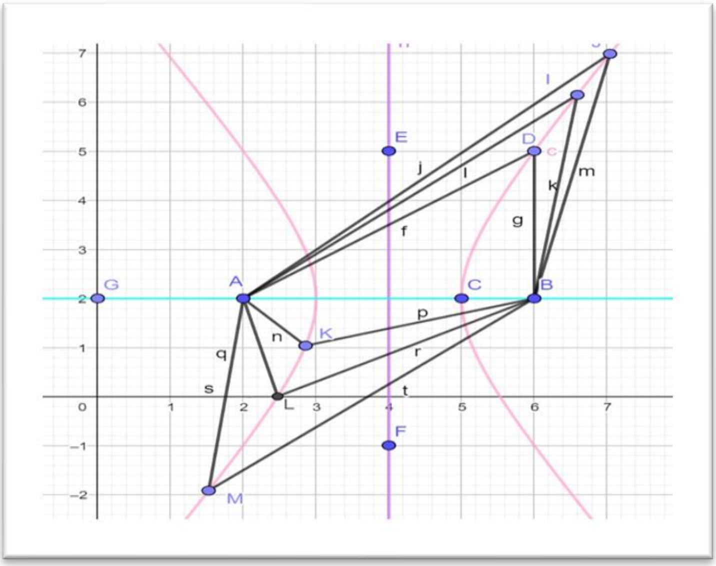
Rekan-rekan mahasiswa yang budiman, semoga senantiasa diberikan motivasi dan gairah untuk selalu menuntut ilmu dan mengembangkan kemampuan yang diberikan oleh Tuhan Yang Maha Esa.

Pada bab sebelumnya Anda sudah mempelajari berbagai konsep terkait sistem koordinat kartesius, garis lurus, persamaan lingkaran, parabola, dan elips. Pada pembahasan berikutnya, Anda akan menelaah berbagai konsep terkait hiperbola. Hiperbola juga merupakan bangun geometri bidang yang terbentuk dari irisan kerucut.

Hiperbola didefinisikan sebagai kurva yang terbentuk dari kedudukan titik-titik dengan suatu aturan bahwa selisih titik tersebut dengan kedua titik tertentu yang terletak di dalam hiperbola adalah tetap atau selalu sama dan bernilai 2a. Titik tertentu tersebut dinamakan titik fokus hiperbola dengan a adalah jarak puncak hiperbola dengan pusat hiperbola, ilustrasi terkait definisi hiperbola dapat dilihat pada gambar 6.2.

Jika dipandang sebagai sebuah parabola, hiperbola dapat didefinisikan sebagai tempat kedudukan dari semua titik yang selisih antara titik fokus dan garis direktris nya adalah konstan (Busrah, 2001).

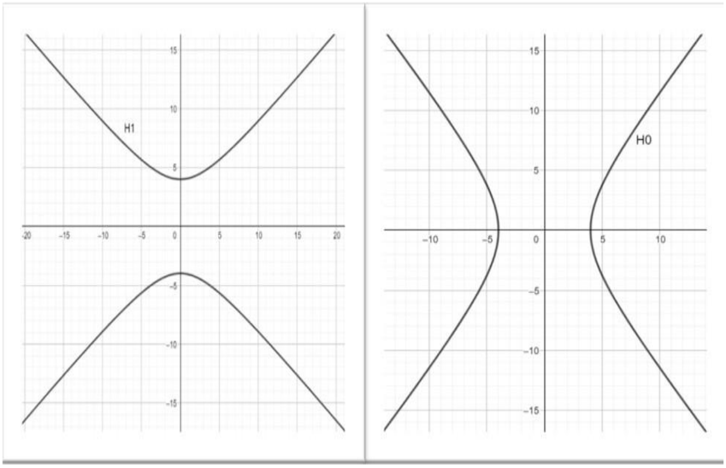
Hiperbola juga dapat dinyatakan sebagai dua lengkungan terpisah hasil dari perpotongan permukaan kerucut dengan suatu bidang datar, dan berupa titik-titik dengan ketentuan selisih jarak terhadap dua titik tetap (titik fokus) adalah konstan atau tetap (Kerami, 1994). Jika dipandang dari nilai eksentrisnya (e), hiperbola merupakan irisan kerucut dengan nilai $e > 1$. Perhatikan gambar 6.2 terkait Ilustrasi konsep hiperbola.



Gambar 6. 2 Ilustrasi Konsep Hiperbola

Gambar 6.2 menunjukkan hiperbola dengan titik-titik penyusunnya. Sesuai dengan definisi hiperbola maka $|BM| - |AM| = 2a$ begitu juga $|BL| - |AL| = 2a$ hal tersebut juga berlaku pada $|AD| - |BD| = 2a$ dan $|AJ| - |BJ| = 2a$.

Pada pembahasan hiperbola di buku ini juga hanya di sajikan hiperbola yang memiliki titik pusat (p, q), Anda diharapkan dapat menemukan formula untuk hiperbola yang berpusat pada titik O (0,0). Hiperbola sendiri dapat dibedakan menjadi dua yaitu, hiperbola horizontal dan hiperbola vertikal, ilustrasi terkait kedua jenis hiperbola dapat dilihat pada gambar 6.3.



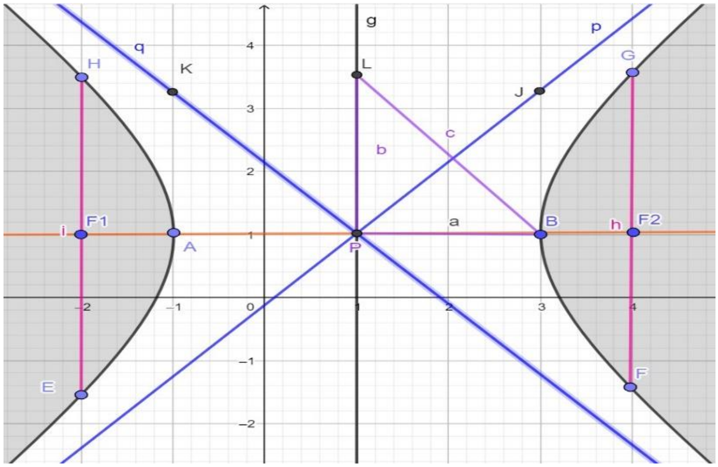
Gambar 6. 3 Ilustrasi Hiperbola Horizontal dan Vertikal

Hiperbola horizontal dapat di identifikasi dengan ciri-ciri yaitu memiliki sumbu utama berada pada posisi yang sejajar sumbu x, sedangkan hiperbola vertikal sumbu utamanya (sumbu mayor) sejajar dengan sumbu y. Hiperbola horizontal yang memiliki titik pusat (p, q) dapat ditentukan dengan persamaan,

$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ dengan $c^2 = a^2 + b^2$; jika disusun dalam bentuk umum menjadi,

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Secara geometri unsur-unsur hiperbola dapat ditelaah pada gambar 6.4.



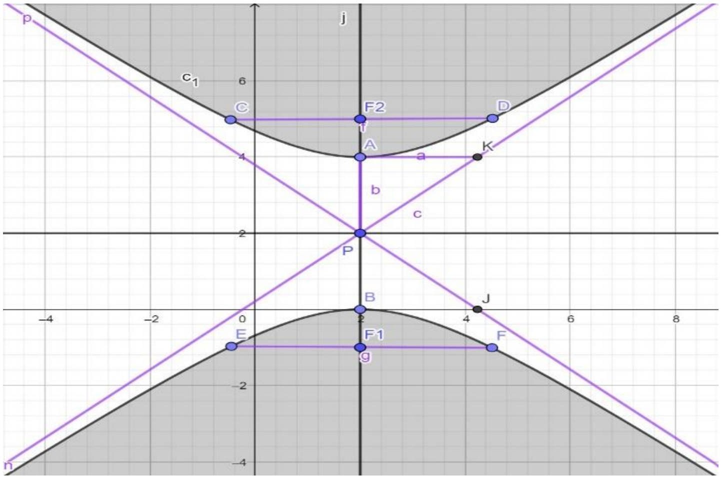
Gambar 6. 4 Ilustrasi Unsur-Unsur Hiperbola Horizontal

a. Titik pusat $P(p, q)$
b. Titik Puncak A $(p-a, q)$, B $(p+a, q)$
c. Titik Fokus $F1(p-c, q)$, $F2(p+c, q)$
d. Sumbu utama $y = q$
e. Sumbu sekawan $x = p$
f. Panjang sumbu nyata = 2a
g. Panjang sumbu imajiner = 2b
h. Panjang latus rektum $= \left|\frac{2b^2}{a}\right|$
i. Persamaan Asimtot $y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p)$
j. Persamaan Direktris $x = p \pm \frac{a^2}{c}$

Sedangkan hiperbola vertikal yang berpusat dititik (p, q) juga dapat ditentukan dengan persamaan, $\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ dengan $c^2 = a^2 + b^2$; jika disusun dalam bentuk umum menjadi,

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Dengan unsur-unsur hiperbola yang dapat ditentukan dengan rumus:



Gambar 6. 5 Ilustrasi Unsur-Unsur Hiperbola Vertikal

a. Titik pusat $\mathrm{P(p, q)}$
b. Titik Puncak $A(\mathrm{p, q + a})$, $B(\mathrm{p, q - a})$
c. Titik Fokus $F1\ (\mathrm{p, q - c})$, $F2\ (\mathrm{p, q + c})$
d. Sumbu Utama $\mathrm{x = p}$
e. Sumbu sekawan $\mathrm{y = q}$
f. Panjang sumbu nyata = 2a
g. Panjang sumbu imajiner = 2b
h. Panjang latus rektum = $\left|\frac{2\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}\right|$
i. Persamaan Asimtot $\mathrm{y - q} = \pm\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}(\mathrm{x - p})$
j. Persamaan Direktris $\mathrm{x = q} \pm \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{c}}$

Untuk menambah keterampilan berfikir kritis dan berfikir kreatif, silahkan Anda diskusikan kemudian turunkan atau buktikan dua rumus persamaan hiperbola di atas beserta persamaan bentuk umumnya.

Menurunkan Rumus Hiperbola

Anda dapat menelaah video 14 untuk membantu dalam menurunkan rumus hiperbola dan Video 15 untuk menambah pemahaman konsep terkait persamaan hiperbola. Diskusikan dengan rekan kelompok Anda, dengan menuliskan hal-hal penting yang ditemukan dengan bahasa Anda sendiri.

Video 14 Menurunkan Rumus Persamaan Hiperbola

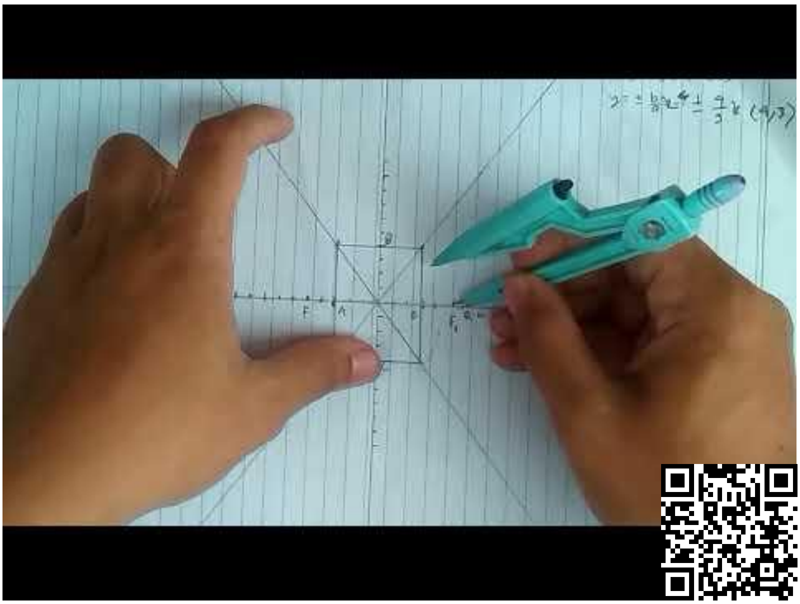
Video 15 Konsep Persamaan Hiperbola

Setelah menelaah video 6.1 dan 6.2, coba Anda tuliskan konsep penting terkait hiperbola yang ditemukan pada video tersebut, dengan menggunakan bahasa Anda sendiri yang lebih sederhana.

Menurunkan Rumus Hiperbola

2. **Menggambar Sketsa Hiperbola**

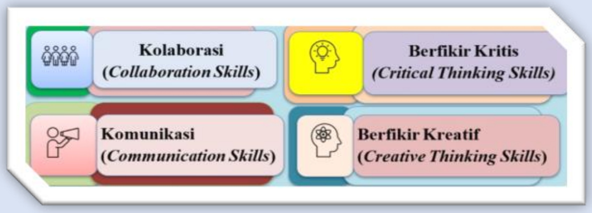
Untuk dapat menggambarkan sketsa hiperbola, perlu ditentukan terlebih dahulu unsur-unsur yang terdapat pada hiperbola, kemudian dapat dilanjutkan dengan membuat sketsa nya pada koordinat kartesius. Anda dapat menelaah video 16 terkait menggambar hiperbola secara manual.



Video 16 Menggambar Hiperbola

Agar dapat meningkatkan pemahaman konsep Anda terkait hiperbola, silahkan diskusikan aktivitas mahasiswa 6.1 bersama rekan kelompok Anda, kemudian presentasikan di depan kelas dengan membagi tugas kepada semua anggota kelompok.

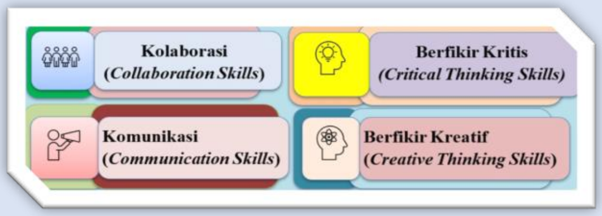
Aktivitas Mahasiswa 6.1



Diskusikan dengan Anggota kelompok Anda dan presentasikan hasilnya terkait hal-hal berikut:

1. Buatlah sketsa hiperbola yang berpusat dititik (0,0) dan (p, q) kemudian tunjukkan setiap unsur-unsur hiperbola di bawah beserta definisinya dalam bahasa Anda sendiri:
   a. Lintasan hiperbola
   b. Titik puncak dan Titik pusat Hiperbola
   c. Titik fokus hiperbola
   d. Sumbu utama, sumbu sekawan, sumbu nyata dan sumbu imajiner
   e. Asimtot Hiperbola
   f. Latus rektum
   g. Garis Direktris Hiperbola

Aktivitas Mahasiswa 6.1



2. Susun lah persamaan hiperbola beserta sketsa nya dengan terlebih dahulu menentukan setiap nilai unsur-unsurnya yang diketahui, kemudian tentukanlah unsur-unsur lainnya
   a. Hiperbola jika diketahui titik puncak A (…, …) dan B (…, …)
   b. Hiperbola dengan titik pusat C (…, …)
   c. Hiperbola dengan titik fokus F1 (…, …) dan F2 (…, …)
3. Dari ketiga hiperbola pada nomer 2, tentukan kedudukan titik $P(3,2), Q(-2,4)\ R(7,-3)$
4. Tentukan setiap unsur hiperbola dengan persamaan $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$

RANGKUMAN

1. Hiperbola didefinisikan sebagai kurva yang terbentuk dari kedudukan titik-titik dengan suatu aturan bahwa selisih titik tersebut dengan kedua titik tertentu yang terletak di dalam hiperbola adalah tetap atau selalu sama dan bernilai 2a. Titik tertentu tersebut dinamakan titik fokus hiperbola dengan a adalah jarak puncak hiperbola dengan pusat hiperbola
2. Hiperbola dapat dibedakan menjadi dua yaitu, hiperbola horizontal dan hiperbola vertikal
3. Hiperbola horizontal merupakan hiperbola yang memiliki sumbu utama berada pada posisi sejajar sumbu x
4. hiperbola vertikal sumbu utamanya (sumbu mayor) sejajar dengan sumbu y.
5. Hiperbola horizontal yang memiliki titik pusat (p,q) dapat ditentukan dengan persamaan,

   $$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$$ Dengan,

   $$c^2 = a^2 + b^2;$$

6. hiperbola vertikal yang berpusat dititik (p, q) juga dapat ditentukan dengan persamaan,

   $$\frac{(\mathrm{y}-\mathrm{q})^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{p})^2}{\mathrm{b}^2} = 1,$$

   Dengan,

   $$c^2 = a^2 + b^2;$$

7. Hiperbola memiliki unsur-unsur antara lain.
   a. Lintasan hiperbola,
   b. Titik puncak,
   c. Titik pusat,
   d. Titik fokus hiperbola,

e. Sumbu utama, sumbu sekawan, sumbu nyata, sumbu imajiner,
f. Asimtot Hiperbola,
g. Latus rektum,
h. Direktris.

LATIHAN SOAL 6

1. Pada hiperbola dengan persamaan $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$, tentukan titik puncak, titik pusat dan titik fokusnya.
2. Ditentukan hiperbola dengan persamaan $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, panjang sumbu mayor dan latus rektum nya adalah…
3. Diketahui hiperbola $25y^2 - 9x^2 + 225 = 0$
4. Susun lah persamaan hiperbola jika diketahui titik Fokusnya adalah F_1 $(-2,1)$ dan F_2 $(2,1)$ dan dengan titik pusatnya berada di titik P (0,1).
5. Pada persamaan hiperbola jika diketahui titik Fokusnya adalah F_1 $(-2,1)$ dan F_2 $(2,1)$ dan dengan titik pusatnya berada di titik P (0,1).
6. Gambarkan hiperbola dengan persamaan $x^2 - 3y^2 + 225 + 6x + 12 = 0$, kemudian tentukan persamaan asimtotnya.

DAFTAR PUSTAKA

Aisyah, Rizki Putra, & Ambarwati. (2021). Ringkasan Materi, Soal, dan Pembahasan Gradien dan Persamaan Garis Lurus Berbasis HOTS. Jakarta: Arjasa Pratama.

Aksin,Nur & Nugroho. (2017). Matematika. Klaten: PT Intan Pariwara

Alfi, Y., & Hamdunah, H. (2017, January). Modul Geometri Analitik. In Seminar Nasional Pendidikan Matematika (SNPM) UNINUS 2017-. Erka CV. Rumahkayu Pustaka Utama. Padang: Erka

Arnyana, I. B. P. (2019). Pembelajaran untuk meningkatkan kompetensi 4c (communication, collaboration, critical thinking dancreative thinking) untukmenyongsong era abad 21. *Prosiding: Konferensi Nasional Matematika*

BAN. S/M. (2020). *Instrumen akreditasi satuan pendidikan (IASP 2020) butir inti*. Retrieved from https://bansm.kemdikbud.go.id/unduh/get/93

Busrah, Z. (2021). Geometri Analitik Bidang: Integrasi Teori, Komputasi Geogebra, dan Budaya Lokal. Parepare : IAIN PAREPARE NUSANTARA PRES

Brown, B. (2015). Twenty first century skills: A bermuda college perspective. *Voices in Education Student Success: A National Focus*, *1*, 58-68.

Djoko Adi Susilo, D. A. S., & Sri Hariyani, S. H. (2019). Geometri Analitika (Datar dan Ruang). Malang: Kanjuruhan press

Ennis, R.H. (1995). *Critical Thinking*. New York: Prentice Hall

Fonna,Mutia & Mursalin. (2018). Pengantar Geometri Analitik Bidang Berbantuan Wingeom Software. Aceh Utara: Unimal Press

https://fisikaupiedu.files.wordpress.com/2017/04/komedi-putar-a.jpg

https://id.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

https://kumparan.com/kumparansains/misteri-kokohnya-menara-pisa-yang-miring-akhirnya-terungkap

https://www.youtube.com/watch?v=7wWBXdJN_Bw

https://www.youtube.com/watch?v=BzqfsZA0Lck

https://www.youtube.com/watch?v=MZZstX7xSog

https://www.youtube.com/watch?v=qgyQ5O0X4W8&t=3043s

https://www.youtube.com/watch?v=VDM3494W8JU&ab_channel=Edutrav

https://youtu.be/26PVx5ZNGl4

https://youtu.be/7TWjQrK54Ls

https://youtu.be/HCK4Ibswk3E

https://youtu.be/I7BK0ru6dko

https://youtu.be/JzKvb06jCEE

https://youtu.be/pj1_IGXn_Es

https://youtu.be/RlBAhv-LxyI

https://youtu.be/t7bXhkbRGu4

https://youtu.be/TtkJNL6zIlo

https://youtu.be/vRUfxOqbFbc

https://youtu.be/ZgIeHcoLw50

Kerami, Djati dkk. (1994). Kamus Matematika Geometri I. Jakarta: Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa.

Marzano, R. J. (1988). *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction*. The Association for Supervision and Curriculum Development, 125 N. West St., Alexandria, VA 22314-2798

Noruchman, Budi. (2007). Teori Ringkas Latihan Soal dan Pembahasan Matematika SMA. Yogyakarta: Intersolusi Pressindo.

PasAndaran, Rio Fabrika & Ma'rufi. (2018). Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Makassar: Global RCI.

Rizki, NAnda Arista. (2018). Geometri Analitik Samarinda : Creative Commons Attribution NonCommercial-ShareAlike 4.0 Internatonal

Sumber.https://langitselatan.com/2013/02/19/mengapa-orbit-planet-berbentuk-elips/. Di akses pada 24,12,2022 Pukul 16.07

Suryani, Mulia. (2017). Buku ajar Ajar Geometri Analitik. Yogyakarta: Deepublish Publisher

Susilo, Djoko Adi & Sri Hariyani. (2019). GEOMETRI ANALITIKA (DATAR DAN RUANG). Malang: Kanjuruhan Press.

www.gramedia.com/literasi/jenis-jenis-sudut/

Yunita, Alfi & Hamdunah. (2017). Modul Geometri Analitik. Padang: Penerbit Erka.

Zubaidah, S. (2016, December). Keterampilan abad ke-21: Keterampilan yang diajarkan melalui pembelajaran. In *Seminar Nasional Pendidikan* (Vol. 2, No. 2, pp. 1-17).

Zubaidah, S. (2018, October). Mengenal 4C: Learning and innovation skills untuk menghadapi era revolusi industri 4.0. In *2nd Science Education National Conference* (Vol. 13, pp. 1-18).

TENTANG PENULIS

PENULIS 1

Arie Anang Setyo, S.Pd., M.Pd., lahir di Majener, 25 Januari 1986. Penulis beralamat di Jl. Merpati, RT. 05, Rw.03, Kel. Malaingkedi. Kec. Malaisimsa Kota Sorong Papua Barat. Pekerjaan penulis yaitu sebagai Dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Muhammadiyah Sorong. Riwayat pendidikan penulis yaitu S-1, Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Sorong, S-2 Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Makassar, dan Proses Penyelesaian S-3, Pendidikan, Universitas Negeri Gorontalo. Email: arieanangsetyo.ums@gmail.com., Google Scolar: Scohttps://scholar.google.com/citations?user=8h2N_KIAAAAJ&hl=id

Buku yang sudah diterbitkan antara lain: 1. Strategi Pembelajaran Problem Based Learning, 2. Transformasi geometri: teori, aplikasi & pemanfaatan teknologi

PENULIS 2

Prof. Dr. H. Sarson W. Dj. Pomalato, M.Pd., lahir di Gorontalo pada tanggal 08 Agustus 1960. Gelar Sarjana Pendidikan Matematika diraih pada tahun 1984 di FKIP Universitas Samratulangi Manado. Gelar Magister Pendidikan IPA diperoleh dari IKIP Bandung pada Tahun 1996. Gelar Doktor dalam bidang Pendidikan Matematika diperoleh dari Univeristas Pendidikan Indonesia pada tahun 2004. Saat ini merupakan dosen tetap yang berpangkat Guru Besar di FMIPA Universitas Negeri Gorontalo dan mengampuh beberapa mata kuliah diantaranya Aljabar Linier, Geometri, Matematika Diskrit, Proses Belajar Mengajar Matematika, Metodologi Penelitian, Statistika, Struktur Aljabar, Filsafat Ilmu, Kalkulus, dan Komunikasi Organisasi. Aktif menulis artikel seperti tulisannya yang berjudul "The Implementation of Krikpatrick's Evaluation Model in The Learning of Initial Value and Boundary Condition Problem" pada Jurnal Macrothink Institute di Las Vegas dan tulisan "Student Error Analysis in Solving Mathematical Problems" pada Universal Journal of Educational Research. Pernah menjadi narasumber, pemakalah, sekaligus pemateri dalam seminar baik nasional maupun internasional, serta pada tahun 2012 berhasil mendapatkan penghargaan Satya Lencana Karya Satya XX Tahun.

PENULIS 3

Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd. Lahir di Gorontalo, 30 Mei 1960. Lulusan S1 bidang Pendidikan Matematika FKIP Universitas Samratulangi pada tahun 1984. Lususan S2 bidang Pendidikan IPA Universitas Pendidikan Indonesia pada tahun 1997. Gelar Doktor diperoleh pada tahun 2009 dalam bidang Pendidikan Matematika. Saat ini merupakan Guru Besar pada Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo dan mengampuh beberapa mata kuliah diantaranya Analisis Real, Teori Belajar Matematika, Statistika Dasar, Penelitian Pengajaran Matematika, Teori Bilangan, Aljabar Linier, Sejarah dan Filsafat, dan Psikologi Pembelajaran. Aktif menulis artikel dalam beberapa Jurnal Ilmiah baik nasional maupun internasional seperti tulisannya yang berjudul "The Impact of Problem-Solving Methods, Learning Styles, And Initial Mathematical Abilities on Mathematical Problem-Solving Abilities of Tenth-Grade Students in SMA Negeri 1 Waisala Maluku" pada AJHSSR. Aktif dalam berbagai organisasi dan juga pernah menjadi narasumber, pemakalah, sekaligus pemateri dalam berbagai seminar baik nasional maupun internasional, serta pada tahun 2017 berhasil mendapatkan penghargaan Satya Lencana Karya Satya XX Tahun.

PENULIS 4

Dr. Tedy Machmud, M.Pd, lahir di Gorontalo, 25 Agustus 1969. Pekerjaan penulis yaitu sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo. Alamat penulis berada di Jln. Bali 2 Kel. Paguyaman Kec. Kota Tengah Kota Gorontalo. Email: tedy_m@ung.ac.id