

PENGARUH PEMANENAN TERHADAP MODEL VERHULST DENGAN EFEK ALLEE

EMLI RAHMI¹, HASAN S. PANIGORO²

¹Universitas Negeri Gorontalo, emlirahmi@ung.ac.id

²Universitas Negeri Gorontalo, hspanigoro@ung.ac.id

Abstrak

Makalah ini mempelajari tentang model pertumbuhan logistik yang dikenal dengan model *verhulst*. Diasumsikan bahwa populasi pada model ini mengalami efek *allee* dalam hal ini efek *allee* kuat. Selain itu, diasumsikan bahwa terjadi pemanenan secara proposional terhadap populasi. Analisis yang dilakukan adalah analisis kualitatif yang mempelajari dinamik dari model. Analisis pendahuluan adalah mengidentifikasi titik ekuilibrium dari model dan mengidentifikasi eksistensinya. Hasil identifikasi titik ekuilibrium menunjukkan bahwa besarnya pemanenan yang dilakukan mempengaruhi jumlah titik ekuilibrium yang terbentuk. Model ini memiliki minimal satu titik ekuilibrium dan maksimal 3 ekuilibrium ketika parameter pemanenan divariasikan. Selanjutnya dipelajari kestabilan masing-masing titik ekuilibrium. Analisis lebih lanjut memperlihatkan terjadinya bifurkasi *saddle-node* pada titik ekuilibrium tak trivial dengan pemicu terjadinya bifurkasi adalah variasi parameter dari pemanenan, dimana titik ekuilibrium tak trivial yang pada awalnya berjumlah dua titik dengan salah satu titik stabil dan titik lainnya tidak stabil tipe *saddle*, kemudian melebur menjadi satu titik ekuilibrium stabil, dan akhirnya menghilang.

Kata kunci: Bifurkasi, Efek Allee, Ekuilibrium, Pemanenan, Saddle-Node

1. PENDAHULUAN

Masalah populasi adalah masalah yang sangat menarik yang menjadi objek kajian matematis. Hal ini karena masalah populasi merupakan masalah yang dapat memberikan dampak langsung ke aspek kehidupan lainnya. Dalam pemodelan persamaan diferensial, telah dilakukan banyak hal untuk mempelajari masalah populasi. Beberapa diantaranya mempelajari model pertumbuhan satu spesies seperti model eksponensial (*malthus*) dan model logistik (*verhulst*) [15], [16], [17], [18], model interaksi antar spesies seperti model *predator-prey* [6], model persaingan antara spesies, dan model-model lainnya. Setiap model dan modifikasinya dirumuskan dengan harapan dapat mendekati masalah populasi yang sebenarnya.

Salah satu pemodelan tentang pertumbuhan populasi tunggal yang paling sederhana adalah model *verhulst* [15], [16], [17], [18]. Model ini mengasumsikan bahwa populasi tumbuh secara logistik, yang berarti daya dukung yang menopang pertumbuhan populasi memiliki batas, sehingga pada suatu waktu jumlah populasi akan mencapai kondisi setimbang. Model ini didefinisikan sebagai berikut:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1)$$

dimana $x(t) > 0$ sepanjang $t \geq 0$, dengan r, K bilangan real positif. Variabel x menyatakan besaran populasi, r merupakan pertumbuhan intrinsik populasi, dan K adalah daya dukungnya.

Hal yang menarik ketika membahas pertumbuhan populasi adalah masalah perkembangbiakan spesies. Pada beberapa kasus, ketika terjadi penurunan kepadatan populasi, spesies didalamnya juga mengalami penurunan interaksi. Perilaku ini berdampak terhadap terhambatnya proses perkembangbiakan yang mempengaruhi laju pertumbuhan intrinsiknya. Salah satu ilmuwan yang mempelajari hal tersebut adalah *Warder Cyle Allee* dengan temuannya yang dinamakan dengan efek *allee*. Efek *allee* mengurangi laju pertumbuhan populasi ketika kepadatan populasi rendah. Salah satu penerapan efek *allee* adalah dengan mengasumsikan populasi pada model *verhulst* memiliki efek *allee* pada pertumbuhan populasinya. Dalam *Conway & Smoller* [6], *Bazykin* [2] dan *Yang & Zhong* [20], efek *allee* untuk satu spesies dimodelkan sebagai berikut:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) \quad (2)$$

dimana m menunjukkan ambang batas tingkat populasi. Jika $m > 0$ maka (2) menyatakan model populasi dengan efek *allee* lemah.

Dalam makalah ini, diasumsikan populasi tersebut mengalami perlakuan berupa pemanenan. Pemanenan yang dilakukan yaitu pemanenan yang proporsional terhadap jumlah populasi. Asumsi tersebut dalam model dituliskan menjadi:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - hx \quad (3)$$

dengan h menunjukkan besaran pemanenan yang diberikan terhadap populasi. Model (3) adalah model yang akan dikaji dalam makalah ini.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat variabel bebas dan variabel terikat serta turunannya. Persamaan diferensial merupakan kebutuhan fundamental dalam matematika teknik karena banyak hukum-hukum fisika dan beberapa hubungan didalamnya dinyatakan dalam persamaan diferensial (*Kreyszig* [7]). Model pertumbuhan populasi dengan efek *allee* dan pemanenan proporsional yang dibahas dalam makalah ini adalah model dalam persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat fungsi yang tidak diketahui (variabel terikat) yang merupakan fungsi dari variabel bebas tunggal dan juga memuat turunannya.

2.2 Sistem Dinamik

Pandang suatu persamaan diferensial biasa:

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

dengan $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi C^r . Solusi dari sistem (4) adalah suatu kurva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $\frac{d\gamma}{dt} = F(\gamma(t))$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Ruang variabel bebas pada sistem

dinamik biasanya dinyatakan sebagai waktu, sedangkan ruang variabel terikat di \mathbb{R}^n pada sistem (4) sering disebut dengan ruang fase. Kurva γ diatas disebut dengan orbit, sedangkan kumpulan dari orbit-orbit pada ruang fase disebut dengan potret fase.

2.3 Titik Ekuilibrium

Sistem yang berbentuk seperti pada persamaan (4) disebut sistem *autonomous* atau sistem yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu. Apabila sistem bergantung secara eksplisit terhadap waktu, maka sistem itu disebut dengan sistem *nonautonomous*. Salah satu solusi dari sistem (4) adalah titik ekuilibrium. \bar{x} dikatakan titik ekuilibrium dari sistem (4) jika:

$$f(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ untuk setiap } t \in \mathbb{R}.$$

Jika suatu sistem memiliki tak berhingga banyak solusi ekuilibrium dan solusi-solusi ekuilibrium tersebut membentuk kurva di ruang fasenya, maka kurva ini disebut dengan manifold ekuilibrium.

Kestabilan dari sistem (4) disekitar titik ekuilibrium dapat dipelajari dengan melakukan pelinearan di sekitar titik ekuilibrium tersebut. Pelinearan yang dilakukan yaitu dengan melakukan ekspansi *Taylor* pada $f(x)$ disekitar $\bar{x}(t)$ yang akan mendapatkan:

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2) \quad (5)$$

Teorema 1. Misalkan matriks $Df(\bar{x}(t))$ pada (5) semua nilai eigennya bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $x = \bar{x}$ stabil asimtotik.

Bukti 1. Lihat *Wiggins* [19] halaman 8.

3. HASIL

Perhatikan model logistik dengan efek *allee* dan pemanenan proposional berikut:

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - hx, \quad (6)$$

dengan $x(t) \geq 0$ dan r, m, h, K bilangan real positif. Variabel x menyatakan besaran populasi, r merupakan pertumbuhan intrinsik populasi dan K adalah daya dukung lingkungannya. m menunjukkan ambang batas tingkat populasi. Jika $m > 0$, model (6) menyatakan efek *allee* kuat (*Strong Allee Effect*), sedangkan $m < 0$ menyatakan efek *allee* lemah (*Weak Allee Effect*).

3.1 Identifikasi Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium didapatkan dengan mencari solusi dari persamaan:

$$r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - hx = 0, \quad (7)$$

yang akan memberikan solusi:

$$\bar{x}_1 = 0,$$

dan:

$$\bar{x}_{2,3} = \frac{m + K \pm \sqrt{D(h)}}{2},$$

dengan $D(h) = (m - K)^2 - 4 \frac{hK}{r}$.

3.2 Eksistensi Titik Ekuilibrium

Berdasarkan kondisi biologis (bahwa tidak ada populasi yang negatif), maka titik ekuilibrium harus berada di $\mathbb{R}_+ := \{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. Dengan demikian, karena $\bar{x}_1 = 0$ maka $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$, sehingga \bar{x}_1 adalah titik ekuilibrium. Untuk selanjutnya, eksistensi dari titik ekuilibrium tak trivial ditunjukkan oleh teorema berikut:

Teorema 2. Didefinisikan $h_x = \frac{r}{4K}(m - K)^2$ dengan asumsi bahwa model memiliki efek allee kuat ($m > 0$).

a. Jika $0 < h < h_x$, maka ada tiga titik ekuilibrium di \mathbb{R}_+ yaitu:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \frac{m+K+\sqrt{D(h)}}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{m+K-\sqrt{D(h)}}{2}$$

b. Jika $h = h_x$, maka ada dua titik ekuilibrium \mathbb{R}_+ yaitu:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \frac{m+K}{2},$$

c. Jika $h > h_x$, maka ada satu titik ekuilibrium \mathbb{R}_+ yaitu $\bar{x}_1 = 0$.

Bukti 2. Untuk titik ekuilibrium trivial $\bar{x}_1 = 0$, selalu ada untuk semua kondisi dari h . Untuk selanjutnya akan ditunjukkan eksistensi titik ekuilibrium tak trivial.

- a. Untuk $0 < h < h_x$ maka akan ditunjukkan bahwa $\bar{x}_2 = \frac{m+K+\sqrt{D(h)}}{2}$, dan $\bar{x}_3 = \frac{m+K-\sqrt{D(h)}}{2}$ ada. Dengan proses aljabar sederhana dapat ditunjukkan bahwa $h < h_x$ mengakibatkan $D(h) > 0$ sehingga $\bar{x}_{2,3} \in \mathbb{R}$. Karena $m + K > 0$ dan $D(h) > 0$ maka $\bar{x}_2 = \frac{m+K+\sqrt{D(h)}}{2} > 0$, sehingga $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}_+$. Dengan cara sederhana pula dapat ditunjukkan bahwa $m + K > \sqrt{D(h)}$ yang mengakibatkan $\bar{x}_3 = \frac{m+K-\sqrt{D(h)}}{2} > 0$, sehingga $\bar{x}_3 \in \mathbb{R}_+$ merupakan titik ekuilibrium.
- b. Untuk $h = h_x$ mengakibatkan $D(h) = 0$ sehingga $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \frac{m+K}{2} > 0$. Hal ini mengakibatkan $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}_+$ merupakan titik ekuilibrium.
- c. Untuk $h > h_x$ mengakibatkan $D(h) < 0$ sehingga $\bar{x}_2, \bar{x}_3 \notin \mathbb{R}_+$, yang berarti \bar{x}_2 dan \bar{x}_3 bukan merupakan titik ekuilibrium.

3.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium.

Misalkan $\dot{x} = f(x)$ dengan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil jika $D(f\bar{x}) < 0$ yang berarti solusi disekitar titik ekuilibrium tersebut akan bergerak mendekatinya. Berdasarkan persamaan (5) maka:

$$D(f(\bar{x})) = -\frac{3r\bar{x}^2}{K} + 2r\left(\frac{m}{K} + 1\right)\bar{x} - (mr + h) \quad (8)$$

- a. Kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = 0$

Untuk $\bar{x}_1 = 0$ mengakibatkan $D(f(\bar{x}_1)) = -(mr + h) < 0$ sehingga \bar{x}_1 adalah titik ekuilibrium stabil. Perhatikan pada gambar (1), (2), dan (3). Untuk semua nilai parameter, semua solusi yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium trivial, akan bergerak mendekati titik ekuilibrium ini. Hal ini mengindikasikan bahwa populasi akan mengalami kepunahan.

- b. Kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = \frac{m+K+\sqrt{D(h)}}{2}$

Untuk $\bar{x}_2 = \frac{m+K+\sqrt{D(h)}}{2}$ mengakibatkan $D(f(\bar{x}_2)) = -\frac{r}{2K}(\sqrt{D(h)}(m+K) + D(h)) < 0$ sehingga \bar{x}_2 adalah titik ekuilibrium stabil (gambar (1)).

- c. Kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}_3 = \frac{m+K-\sqrt{D(h)}}{2}$

Untuk $\bar{x}_3 = \frac{m+K-\sqrt{D(h)}}{2}$ mengakibatkan $D(f(\bar{x}_3)) = \frac{rD(h)}{2K}\left(\frac{m+K}{\sqrt{D(h)}} - 1\right)$. Karena $\frac{rD(h)}{2K} > 0$, maka kestabilan \bar{x}_3 bergantung pada nilai dari $\frac{m+K}{\sqrt{D(h)}} - 1$. Karena $m + \frac{h}{r} > 0$ mengakibatkan $\frac{m+K}{\sqrt{D(h)}} > 1$ yang berarti $D(f(\bar{x}_3)) > 0$ sehingga \bar{x}_3 merupakan titik ekuilibrium tidak stabil (gambar (1)).

- d. Kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}_4 = \frac{m+K}{2}$

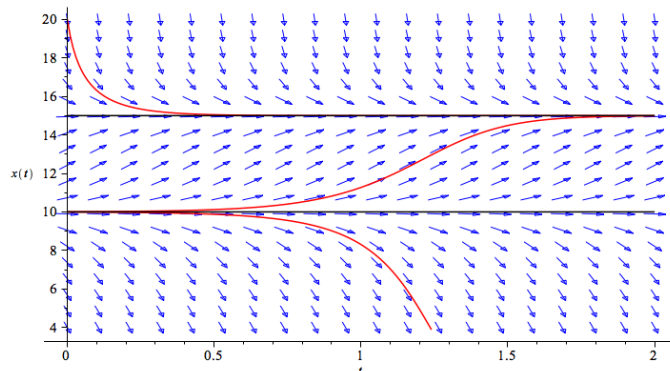
Untuk $\bar{x}_4 = \frac{m+K}{2}$ mengakibatkan $D(f(\bar{x}_4)) = 0$ sehingga untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium tidak dapat ditentukan oleh suku-suku linearnya. Oleh karena itu dilakukan transformasi $x \rightarrow x + \bar{x}_4$, dengan $h = h_x$ yang memberikan persamaan:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{m}{K}\right)x^2 - \frac{r}{K}x^3.$$

Kestabilan titik ekuilibrium dapat dilakukan dengan melihat tanda koefisien dari x^2 . Karena $-\frac{r}{2}\left(1 + \frac{m}{K}\right) < 0$, maka \bar{x}_4 merupakan titik ekuilibrium stabil (gambar (2)).

3.4 Analisis Numerik

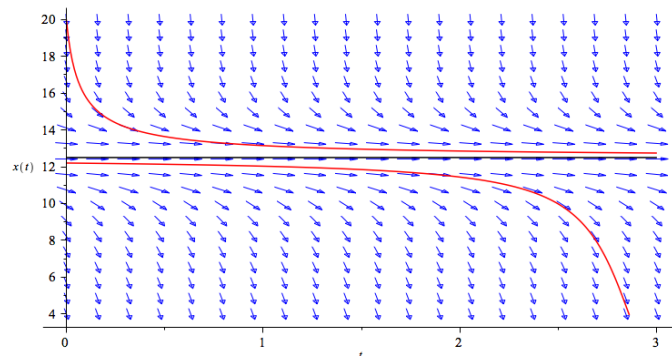
Perhatikan gambar (1) berikut:



Gambar 1. Potret fase pada saat $0 < h < h_x$

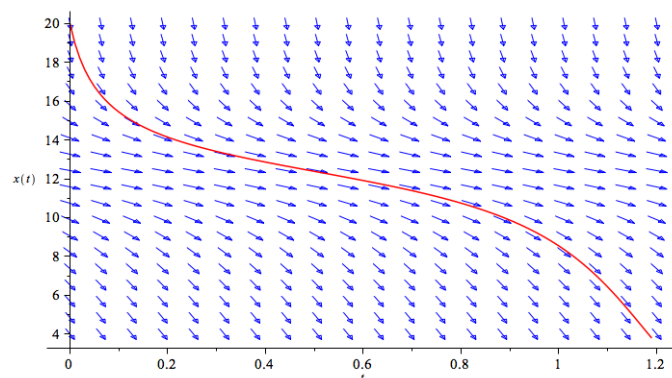
Pada saat $0 < h < h_x$, titik ekuilibrium \bar{x}_1 merupakan titik ekuilibrium stabil, dimana solusi diantara titik ekuilibrium \bar{x}_1 dan \bar{x}_2 bergerak mendekati titik ekuilibrium \bar{x}_1 . Hal ini mengindikasikan bahwa kondisi ini mengakibatkan populasi akan mengalami kepunahan. Untuk solusi diantara titik ekuilibrium \bar{x}_2 dan \bar{x}_3 , solusi bergerak mendekati

titik ekuilibrium \bar{x}_3 sehingga jumlah populasi akan bertambah. Hal ini diakibatkan oleh dinamik dari titik ekuilibrium \bar{x}_2 yang merupakan titik ekuilibrium tidak stabil. Perhatikan bahwa titik ekuilibrium \bar{x}_3 adalah titik ekuilibrium stabil, dimana jumlah populasi diantara \bar{x}_2 dan \bar{x}_3 akan bergerak mendekati titik ekuilibrium \bar{x}_3 .



Gambar 2. Potret fase pada saat $h = h_x$

Pada saat $h = h_x$, terdapat dua titik ekuilibrium dengan ekuilibrium tak trivial \bar{x}_4 adalah titik ekuilibrium stabil berdasarkan analisis sebelumnya. Namun dapat dilihat dari hasil simulasi bahwa kestabilan yang dimaksud adalah kondisi dimana solusi pada saat $x > \bar{x}_4$ akan bergerak mendekati titik ekuilibrium \bar{x}_4 , namun solusi pada saat $x < \bar{x}_4$ akan bergerak menjauhi titik ekuilibrium \bar{x}_4 dan mendekati titik ekuilibrium \bar{x}_1 .

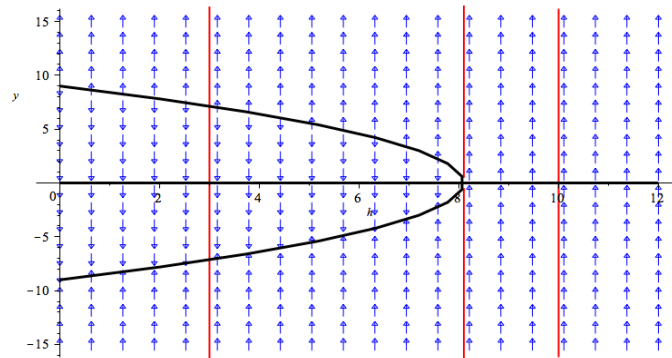


Gambar 3. Potret fase pada saat $h > h_x$

Dinamik pada gambar (2) terjadi ketika $h > h_x$, yang memperlihatkan pemanenan yang berlebihan, dimana besarnya pemanenan mengakibatkan jumlah populasi lambat laun akan habis. Model dengan kondisi ini hanya memiliki satu titik ekuilibrium stabil yang mengakibatkan seluruh solusi bergerak mendekati titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = 0$.

3.5 Bifurkasi *Saddle-Node*

Salah satu dinamik yang cukup menarik dalam model ini adalah terjadinya fenomena bifurkasi, dalam hal ini bifurkasi satu parameter dari suatu titik ekuilibrium. Bifurkasi yang terjadi adalah bifurkasi *saddle-node*. Bifurkasi ini muncul akibat divariasikannya parameter berupa pemanenan di model (6). Titik ekuilibrium yang awalnya berjumlah 2 buah, melebur menjadi 1 titik, dan akhirnya titik tersebut lenyap. Hal ini terjadi apabila besaran pemanenan mengalami perubahan ketika divariasikan. Bifurkasi *Saddle-Node* model (5) dapat dilihat pada gambar (4).



Gambar 4. Bifurkasi *Saddle-Node*

Bifurkasi ini dapat dibuktikan secara analitik yaitu dengan melakukan transformasi $x = y + \frac{m+K}{2}$ dan mengabaikan untuk titik ekuilibrium trivialnya. Hasil transformasinya berbentuk:

$$\dot{y} = \frac{hK}{r} - \frac{(m-K)^2}{4} + y^2. \quad (9)$$

Persamaan (9) merupakan bentuk umum dari bifurkasi *saddle-node* dengan $h = \frac{r}{4K}(m - K)^2$ adalah titik bifurkasinya.

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Analisis terhadap model ini memperlihatkan bahwa besaran pemanenan harus disesuaikan dengan laju pertumbuhan intrinsik dan besarnya efek *allee* yang dimiliki oleh populasi. Ada kondisi-kondisi yang harus dipenuhi agar populasi akan mendekati kesetimbangan yang tak trivial. Secara matematis, kondisi ini terpenuhi pada saat pada saat $h \geq \frac{r}{4K}(m - K)^2$ dimana h adalah besarnya pemanenan, r adalah laju pertumbuhan intrinsik, m adalah besarnya efek *allee*, dan K adalah daya dukung lingkungan sehingga populasi mampu berkembang dan tumbuh.

4.2 Saran

Model yang dibahas dalam makalah ini adalah model yang sangat sederhana, karena hanya membahas pertumbuhan satu jenis populasi. Namun hal ini adalah salah satu batu pijakan dalam mengeksplorasi lebih lanjut tentang masalah-masalah populasi pada khususnya, dan masalah ekologi yang lebih luas. Oleh karena itu, dapat dilakukan penelitian lanjutan untuk model yang lebih kompleks yang melibatkan lebih dari satu jenis spesies dan memberikan asumsi-asumsi yang lebih baik, guna mendapatkan model yang lebih akurat dan presisi dengan kondisi yang sebenarnya di alam.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Negeri Gorontalo yang telah memberikan dukungan moril dan materil sehingga makalah ini dapat diselesaikan, dipresentasikan dan dipublikasikan dalam seminar nasional MIPANET tahun 2017 di Universitas Sam Ratulangi Manado.

Daftar Pustaka

- [1] Alvendar, J. & Baqi, A.I., *Model Pemanenan Logistik dengan Daya Dukung Bergantung Waktu*, Jurnal Matematika UNAND, Vol.1, No.2, hal.60-65, 2012.
- [2] Bazykin, AD., *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [3] Boulanouar, M., *Asynchronous Exponential Growth of a Bacterial Population*, Electronic Journal of differential Equations, Vol 2014, No.06, pp.1-12, 2014.
- [4] Boyce, W. E. & DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9th Edition*, Wiley, Singapore, 2010.
- [5] Cai, D., *Multiple Equilibria and Bifurcations in an Economic Growth Model with Endogenous Carrying Capacity*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol.20, No.11. pp.3461-3472, 2010.
- [6] Conway, ED, Smoller, JA., *Global Analysis of a System of Predator–Prey Equations*, SIAM J Appl Math, 1986.
- [7] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition*, Wiley, Singapore, 2006.
- [8] Kuznetsov, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [9] Lumi, N., Ainsaar, A. and Mankin, R., *Noise-Induced Transitions in a Population Growth Model Based on Size-Dependent Carrying Capacity*, Journal of Mathematical Problems in Engineering, Volume 2014, Article ID 120624. pp.1-8, 2014.
- [10] Lynch, S., *Dynamical Systems with Applications using Maple, 2nd Edition*, Springer, New York, 2010.
- [11] Panigoro, H.S., *Sistem Dinamik Untuk Pemula "Sebuah Pengantar Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Satu Parameter Suatu Titik Ekuilibrium"*, Ideas Publishing, Gorontalo.
- [12] Panigoro, H.S., *Variasi Pemanenan terhadap Model Dinamik Pertumbuhan Populasi*, Jurnal Euler: pp.59-66, 2013.
- [13] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [14] Purnomo, K. D, *Model Pertumbuhan Populasi dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik*, Majalah Matematika dan Statistika, Vol.1, No.1, pp.21–29, 2000.
- [15] Verhulst, Pierre-François, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Correspondance mathématique et physique 10: 113–121, Retrieved 2013-02-18, 1838.
- [16] Verhulst, Pierre-François, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques : ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral*, Bruxelles: Hayez, Retrieved 2013-02-18., 1841.
- [17] Verhulst, Pierre-François, *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population [Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase]*, Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles 18: 1–42, Retrieved 2013-02-18, 1845.
- [18] Verhulst, Pierre-François, *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique 20: 1–32, Retrieved 2013-02-18, 1847.
- [19] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos, 2nd Edition*, Springer, New York, 2003.
- [20] Yang, L, Zhong, S., *Dynamics of a diffusive predator–prey model with modified Leslie–Gower schemes and additive Allee effect*, Comp. Appl. Math, 34:671–690, 2015.