

MODIFIKASI SISTEM *PREDATOR-PREY*: DINAMIKA MODEL *LESLIE-GOWER* DENGAN DAYA DUKUNG YANG TUMBUH LOGISTIK

HASAN S. PANIGORO¹, EMLI RAHMI²

¹Universitas Negeri Gorontalo, hspanigoro@ung.ac.id

²Emlirahmi@ung.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dipelajari dinamik dari Sistem *Predator-Prey* Model *Leslie-Gower* dengan mengasumsikan bahwa daya dukung dari *prey* berubah terhadap waktu. Perubahan daya dukung dari *prey* yang dimaksud yaitu daya dukung dari populasi tidak konstan, namun bergantung terhadap waktu dengan daya dukung tumbuh secara logistik. Analisis Awal dimulai dengan melakukan simplifikasi sistem dengan cara penskalaan variabel dan parameter untuk mendapatkan bentuk normalnya. Selanjutnya dilakukan analisis terhadap dinamik dari sistem disekitar titik ekuilibrium tersebut. Hasil akhir menunjukkan bahwa pada sistem ini, kondisi kedua populasi selalu mencapai titik kesetimbangan yang berarti tidak ada spesies yang akan punah sepanjang berjalannya waktu.

Kata kunci: *Dinamik, Ekuilibrium, Leslie-Gower, Predator-Prey*

1. PENDAHULUAN

Model *predator-prey* adalah objek kajian yang sangat menarik untuk dipelajari dalam bidang matematika ekologi karena menyangkut eksistensi dari satu atau lebih spesies, yang dalam habitatnya mengalami kondisi seperti ini. Model ini sangat populer yang dibuktikan dengan banyaknya penelitian yang mempelajari model ini. Batasan dari model ini sangatlah luas sehingga banyak peneliti melakukan modifikasi dan mengembangkan model *predator-prey* dengan harapan model tersebut bersesuaian dengan kondisi mangsa-pemangsa yang ada di alam.

Di makalah ini, model *predator-prey* yang dipelajari adalah model yang melibatkan satu *predator* dan satu *prey*. Asumsi ini adalah asumsi yang paling sederhana, namun tetap menjadi kajian yang menarik dalam matematika, karena model dengan asumsi ini masih relevan dengan kondisi yang ada dalam habitat dua spesies yang berinteraksi dengan hubungan mangsa-pemangsa.

Secara matematis, model *predator-prey* yang dipelajari pada makalah ini dikenal dengan *semi-ratio-dependent* dengan fungsi respon. Model ini merupakan sistem persamaan diferensial di \mathbb{R}^2 yang menunjukkan bahwa spesies yang menjadi *prey* dan *predator* tumbuh secara logistik dengan daya dukung *prey* adalah konstan, dan daya dukung *predator* bergantung terhadap jumlah populasi *prey*. Model ini didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - p(x)y \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{ny}{x}\right)\end{aligned}, \quad (1)$$

dimana $x(t) > 0, y(t) \geq 0$ sepanjang $t \geq 0$, dan r, s, K, n bilangan real positif. Variabel x menyatakan populasi dari *prey* dan variabel y menyatakan populasi dari *predator*. Pada sistem (1) diasumsikan besaran *prey* tumbuh secara logistik dengan daya tampung K dan pertumbuhan intrinsik r dengan adanya y sebagai *predator*. *Predator* memangsa *prey* dengan fungsi respon $p(x)$ yang juga tumbuh secara logistik dengan pertumbuhan intrinsik s dan daya tampung bergantung secara proposional terhadap jumlah *prey*. Parameter n adalah angka yang menyatakan besaran *prey* yang dibutuhkan untuk mendukung eksistensi bagi satu *predator* (Hsu [2] dan Huang [3]).

Dalam makalah ini, fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon *Holling* Tipe-1 yang dituliskan:

$$p(x) = mx. \quad (2)$$

Sistem (1) dengan fungsi respon (2) dikenal dengan sistem *predator-prey* model *Leslie-Gower* (Leslie & Gower [5]) yang dituliskan:

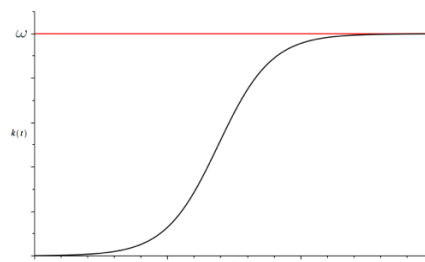
$$\begin{aligned}\dot{x} &= r_1x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - mxy \\ \dot{y} &= r_2y \left(1 - \frac{ny}{x}\right)\end{aligned}, \quad (3)$$

dengan m adalah nilai maksimum dimana tingkat penurunan per kapita dari mangsa dapat tercapai. Dalam Hsu & Huang [2] ditunjukkan bahwa sistem (3) memiliki titik ekuilibrium tunggal dengan dinamikanya bersifat stabil asimtotik secara global.

Beberapa modifikasi yang dilakukan misalkan dengan mengasumsikan bahwa terjadi pemanenan terhadap populasi seperti pada Huang [3], Zhu [15] dan Panigoro [7]. Selain itu beberapa penelitian mengasumsikan adanya waktu tunda seperti pada Zhang [14], dan ada juga yang mengasumsikan bahwa populasi pada model memiliki pertumbuhan intrinsik yang dipengaruhi oleh efek *allee* seperti pada Yang [13].

Dari asumsi-asumsi yang ada, peneliti tertarik dengan asumsi pada Purnomo [9] dimana suatu populasi tunggal tumbuh secara logistik dengan daya dukung bukan lagi sebuah parameter yang memiliki nilai konstan, namun menjadi sebuah variabel yang besarnya juga dipengaruhi oleh waktu. Purnomo [9] mengasumsikan bahwa daya dukung dari populasi juga tumbuh secara logistik.

Dari asumsi tersebut, peneliti tertarik untuk mengasumsikan hal yang sama terhadap *prey* pada model (3), dimana daya dukung *prey* tumbuh secara logistik, sedangkan daya dukung *predator* bergantung pada populasi *prey*. Daya dukung dari *prey* yang tumbuh secara logistik dapat dilihat pada gambar (1) berikut:



Gambar 1. Daya dukung *prey* yang tumbuh logistik dengan ω merupakan daya dukung maksimum *prey*

Daya dukung ini dapat dituliskan dalam persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\dot{k} = r_3 \left(1 - \frac{k}{\omega}\right), \quad (4)$$

dengan ω adalah maksimum daya dukung yang dapat dicapai oleh *prey*.

Berdasarkan asumsi tersebut maka sistem (3) menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - mxy \\ \dot{y} &= r_2 y \left(1 - \frac{ny}{x}\right) \\ \dot{k} &= r_3 \left(1 - \frac{k}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Sistem (5) merupakan kajian utama dalam makalah ini.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Pandang suatu persamaan diferensial biasa:

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

dengan $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi C^r . Solusi dari sistem (6) adalah suatu kurva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $\frac{d\gamma}{dt} = F(\gamma(t))$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Ruang variabel bebas pada sistem dinamik biasanya dinyatakan sebagai waktu, sedangkan ruang variabel terikat di \mathbb{R}^n pada sistem (6) sering disebut dengan ruang fase. Kurva γ diatas disebut dengan orbit, sedangkan kumpulan dari orbit-orbit pada ruang fase disebut dengan potret fase.

Sistem yang berbentuk seperti pada persamaan (6) disebut sistem *autonomous* atau sistem yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu. Apabila sistem bergantung secara eksplisit terhadap waktu, maka sistem itu disebut dengan sistem *nonautonomous*. Salah satu solusi dari sistem (6) adalah titik ekuilibrium. \bar{x} dikatakan titik ekuilibrium dari sistem (6) jika:

$$f(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ untuk setiap } t \in \mathbb{R}.$$

Jika suatu sistem memiliki tak berhingga banyak solusi ekuilibrium dan solusi-solusi ekuilibrium tersebut membentuk kurva di ruang fasena, maka kurva ini disebut dengan manifold ekuilibrium.

Definisi 1. (Wiggins [12]). Titik ekuilibrium $\bar{x}(t)$ dikatakan *stabil liapunov* jika untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sehingga untuk setiap solusi $y(t)$ dari (6) yang memenuhi $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$ berakibat $|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon$ untuk $t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}$.

Definisi 2. (Wiggins [12]). Titik ekuilibrium $\bar{x}(t)$ dikatakan *stabil asimtotik* jika memenuhi definisi (1) dan jika terdapat $b \in \mathbb{R}^+$ sehingga $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$ berakibat $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$.

2.2 Pelinearan

Untuk menganalisa sistem (6), langkah yang paling mudah adalah mempelajari kestabilan titik ekuilibrium dengan melakukan pelinearan disekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Misalkan:

$$x = \bar{x} + y \quad (7)$$

Substitusi (7) ke (6) kemudian lakukan ekspansi *Taylor* pada $f(x)$ disekitar $\bar{x}(t)$ sehingga didapatkan:

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2), \quad (8)$$

dimana Df adalah turunan dari f terhadap x dan $|\cdot|$ adalah *norm* di \mathbb{R}^n . Karena $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t))$, maka:

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2).$$

Jika $J = Df(\bar{x}(t))$ maka sistem (9) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{y} = Jy + \mathcal{O}(|y|^2). \quad (9)$$

Perhatikan teorema berikut:

Teorema 1. Misalkan matriks J pada (9) semua nilai eigennya bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $x = \bar{x}$ stabil asimtotik.

Bukti 1. Lihat *Wiggins* [19] halaman 8.

3. HASIL

3.1 Penskalaan Sistem

Pandang sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r_1 x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - mxy \\ \dot{y} &= r_2 y \left(1 - \frac{ny}{x}\right) \\ \dot{k} &= r_3 \left(1 - \frac{k}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Dalam analisis sistem dinamik, solusi umum dari sistem (10) bukan menjadi kajian utama dalam pembahasannya, namun lebih kepada mempelajari perilaku dari solusi tersebut. Oleh karena itu, dilakukan simplifikasi sistem dengan melakukan penskalaan, baik penskalaan variabel maupun penskalaan parameter dengan tujuan untuk membuang sebanyak mungkin parameter dengan harapan agar sistem menjadi lebih sederhana, namun tidak mengubah dinamik dari sistem tersebut.

Penskalaan awal yang dilakukan adalah penskalaan variabel terhadap sistem (1) yaitu dengan transformasi $(x, y, k, t) \rightarrow \left(\frac{x}{\omega}, \frac{ny}{\omega}, \frac{k}{\omega}, \omega r_1 t\right)$ sehingga sistem (10) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left(1 - \frac{\omega my}{nr_1} - \frac{x}{k} \right) \\ \dot{y} &= \frac{r_2}{nr_1} y \left(1 - \frac{y}{x} \right) \\ \dot{k} &= \frac{r_3}{r_1} \left(1 - \frac{k}{\omega} \right)\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi biologis bahwa $r_1, r_2, r_3, n, \omega > 0$ maka dapat dilakukan penskalaan parameter dengan memisalkan:

$$\alpha = \frac{\omega m}{nr_1}, \beta = \frac{r_2}{nr_1}, \delta = \frac{r_3}{r_1},$$

sehingga sistem menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left(1 - \alpha y - \frac{x}{k} \right) \\ \dot{y} &= \beta y \left(1 - \frac{y}{x} \right) \\ \dot{k} &= \delta (1 - k)\end{aligned} \quad (11)$$

dengan $x > 0, y \geq 0, k > 0$ dan $\alpha, \beta, \delta > 0$.

3.2 Titik Ekuilibrium dan Eksistensinya

Titik ekuilibrium didapatkan dengan mencari solusi dari:

$$\begin{aligned}x \left(1 - \alpha y - \frac{x}{k} \right) &= 0 \\ \beta y \left(1 - \frac{y}{x} \right) &= 0 \\ \delta (1 - k) &= 0\end{aligned} \quad (12)$$

sehingga didapatkan titik ekuilibrium:

$$E_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}) = (1, 0, 1) \text{ dan } E_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}) = \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}, 1 \right)$$

Berdasarkan kondisi biologis, titik ekuilibrium yang dimaksud merupakan titik ekuilibrium tak nol (tak ada jumlah populasi dan daya dukung yang kecil dari nol). Karena $\frac{1}{\alpha+1} > 0$, maka E_1 dan E_2 merupakan titik ekuilibrium dari sistem dan selalu ada pada sistem.

3.3 Pelinearan Sistem

Berdasarkan Teorema (1), untuk mempelajari kestabilan dari titik ekuilibrium dilakukan pelinearan terhadap sistem (11) disekitar titik ekuilibrium. Dengan cara pada persamaan (9) maka didapatkan:

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha \bar{y} - \frac{2\bar{x}}{\bar{k}} & -\alpha \bar{x} & \left(\frac{\bar{x}}{\bar{k}} \right)^2 \\ \beta \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right)^2 & \beta \left(1 - \frac{2\bar{y}}{\bar{x}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(1 - 2\bar{k}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.4 Kestabilan Titik Ekuilibrium

3.4.1 Kestabilan Titik Ekuilibrium $E_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}) = (1, 0, 1)$.

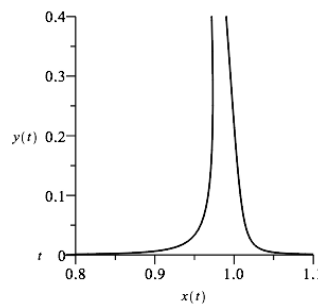
Untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium, substitusi nilai E_1 ke (13) sehingga:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Matriks (13) memiliki nilai eigen:

$$\lambda_1 = -1 < 0, \quad \lambda_2 = \beta > 0, \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = -\delta < 0,$$

sehingga titik ekuilibrium E_1 adalah titik ekuilibrium tidak stabil tipe *saddle*. Perhatikan gambar (2) berikut:



Gambar 2. Potret Fase Disekitar Titik Ekuilibrium E_1

Solusi disekitar titik ekuilibrium bergerak menjauhi titik ekuilibrium E_1 dengan kurva solusi membentuk *saddle* sehingga titik ekuilibrium ini disebut titik *saddle*.

3.4.2 Kestabilan Titik Ekuilibrium $E_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{k}) = \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}, 1\right)$.

Untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium, substitusi nilai E_2 ke (13) sehingga:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha+1} & -\frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{1}{(\alpha+1)^2} \\ \beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Matriks (13) memiliki nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\delta < 0.$$

λ_2 dan λ_3 didapatkan dengan menyelesaikan persamaan:

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{\alpha+1} + \beta\right)\lambda + \beta = 0 \quad (16)$$

Persamaan (16) memiliki solusi:

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1} + \beta \pm \sqrt{D(\lambda)}\right) \quad (17)$$

dengan:

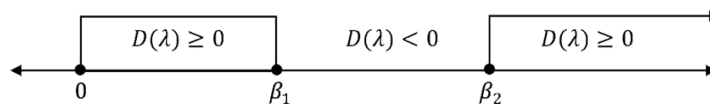
$$D(\lambda) = (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2), \quad (18)$$

dan:

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha+1} (1 + 2\alpha - 2\sqrt{\alpha(\alpha+1)}), \quad (19)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\alpha+1} (1 + 2\alpha + 2\sqrt{\alpha(\alpha+1)}). \quad (20)$$

Perhatikan bahwa $\beta_2 > 0$ (karena semua suku-sukunya positif) sehingga $\beta_2 \in \beta$. Dengan pembuktian aljabar sederhana pula dapat dibuktikan bahwa $\beta_1 > 0$ sehingga $\beta_1 \in \beta$. Perhatikan bahwa nilai dari $\beta_1 < \beta_2$ (berdasarkan (19) dan (20)). Dengan demikian, menggunakan perhitungan yang sederhana dapat ditunjukkan bahwa nilai dari β dapat mempengaruhi $D(\lambda)$ dengan kondisi sebagai berikut:



Gambar 3. Pengaruh β terhadap $D(\lambda)$

Berdasarkan (18), maka kestabilan titik ekuilibrium E_2 dipengaruhi oleh besarnya β jika α bernilai konstan dan β divariasikan. Kestabilan dari E_2 dapat diklasifikasikan dalam tiga kasus berikut:

- a. Untuk $0 < \beta < \beta_1$ dan $\beta > \beta_1$

Berdasarkan Gambar (3), kondisi ini mengakibatkan $D(\lambda) > 0$. Selanjutnya dapat ditunjukkan dengan pembuktian sederhana bahwa:

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha+1} + \beta + \sqrt{D(\lambda)} \right) < 0, \text{ dan } \lambda_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha+1} + \beta - \sqrt{D(\lambda)} \right) < 0$$

Karena $\lambda_{1,2,3} > 0$ maka kondisi $0 < \beta < \beta_1$ dan $\beta > \beta_1$ mengakibatkan E_2 adalah titik ekuilibrium stabil.

- b. Untuk $\beta = \beta_1$ dan $\beta = \beta_2$

Kondisi ini mengakibatkan $D(\lambda) = 0$ sehingga:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha+1} + \beta \right) < 0$$

Karena $\lambda_{1,2,3} > 0$ maka kondisi $\beta = \beta_1$ mengakibatkan E_2 adalah titik ekuilibrium stabil.

- c. Untuk $\beta_1 < \beta < \beta_2$

Kondisi ini mengakibatkan $D(\lambda) < 0$ sehingga:

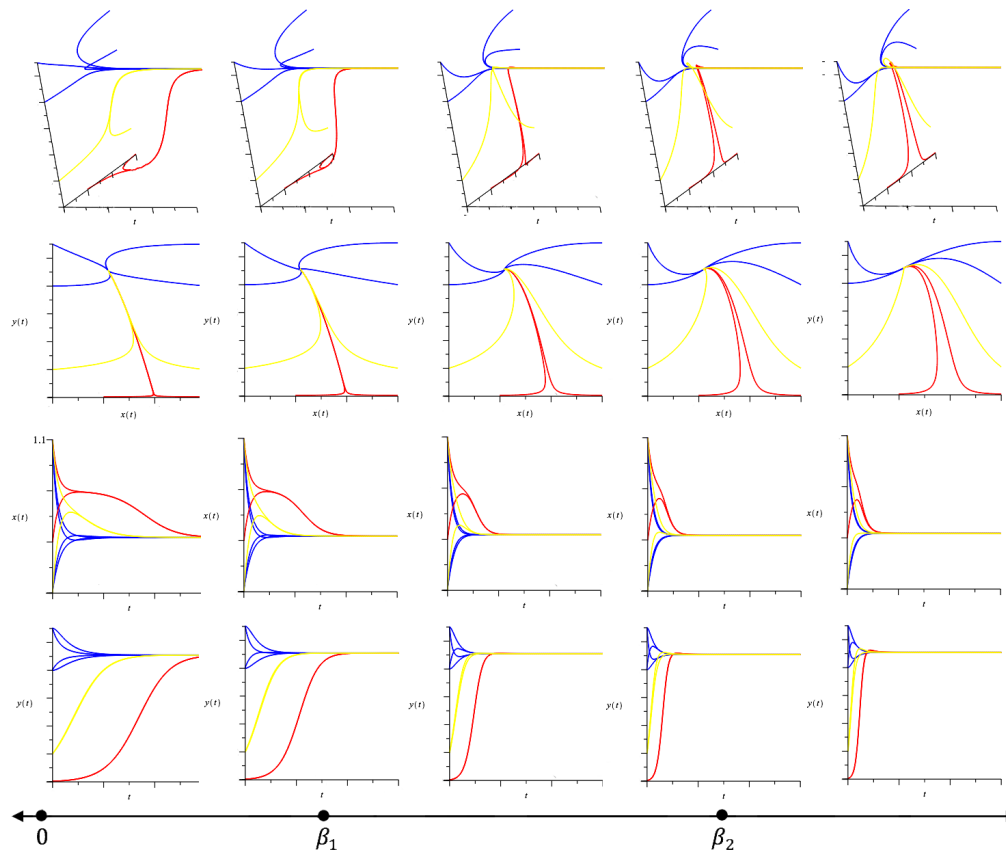
$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha+1} + \beta + i\sqrt{-D(\lambda)} \right)$$

Karena $\lambda_1 > 0$ dan $Re(\lambda_{2,3}) > 0$ maka kondisi $\beta_1 < \beta < \beta_2$ mengakibatkan E_2 adalah titik ekuilibrium stabil.

Dengan melihat ketiga kasus diatas, ternyata titik ekuilibrium E_2 merupakan titik ekuilibrium stabil asimtotik untuk seluruh nilai parameter positif. Dinamik dari solusi disekitar titik ekuilibrium E_1 menunjukkan bahwa E_1 adalah titik ekuilibrium *saddle*, sehingga solusi yang ada disekitar titik ekuilibrium E_1 bergerak mendekati titik ekuilibrium E_2 . Dengan demikian secara global sistem ini merupakan sistem yang stabil.

3.5 Simulasi Numerik

Secara analitik telah ditunjukkan bahwa sistem ini stabil secara global. Dengan komputasi numerik, didapatkan potret fase dari sistem (11) seperti pada gambar 4 berikut:



Gambar 4. Potret fase dari Sistem (11) untuk seluruh nilai dari parameter

Dari potret fase yang ada pada gambar (4), terlihat bahwa titik ekuilibrium pada E_1 merupakan titik ekuilibrium tidak stabil tipe *saddle*. Solusi yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium ini akan menjauhinya. Untuk solusi yang berada dari arah kiri dan kanan titik ekuilibrium, solusi akan mendekati titik ekuilibrium, yang pada waktu tertentu kemudian bergerak menjauh dan mendekati titik ekuilibrium E_2 . Sedangkan untuk titik ekuilibrium E_2 yang bersifat stabil, solusi yang ada disekitarnya akan ditarik mendekati titik ekuilibrium ini. Dari potret fase secara global, terlihat sistem ini selalu stabil.

Dari kondisi yang ada, ketika parameter α ditetapkan untuk bilangan real positif tertentu, dan parameter β divariasikan, maka terlihat bahwa tidak ada perubahan kestabilan dari sistem, sehingga dipastikan bahwa tidak akan terjadi bifurkasi pada sistem ini. Hal yang menarik adalah ketika β bergerak menjauhi $\beta = 0$ ke arah positif, perubahan yang terjadi adalah kecepatan dari solusi bergerak mendekati titik ekuilibrium E_2 . Dengan demikian perubahan β akan memberikan pengaruh ke waktu yang dibutuhkan untuk solusi konvergen ke titik ekuilibrium E_2 .

4. KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Beberapa hal yang dapat di simpulkan dari analisis pada sistem ini yaitu:

- a. Sistem ini merupakan sistem yang stabil secara global. Setiap solusi di ruang fase akan bergerak mendekati titik ekuilibrium stabil.
- b. Perubahan nilai parameter tidak akan berpengaruh terhadap kestabilan dari sistem. Perubahan nilai parameter hanya akan memberikan pengaruh terhadap kecepatan konvergensi solusi untuk bergerak mendekati titik ekuilibrium stabil.
- c. Dapat diinterpretasikan bahwa model ini menjamin bahwa setiap populasi akan bertahan dengan jumlah populasi masing-masing baik *predator* ataupun *prey* akan menuju ke nilai kesetimbangannya yang bersesuaian dengan daya dukungnya.

4.2 Saran

Pembahasan pada makalah ini terbatas pada sistem *predator-prey* model *Leslie-Gower* dengan perubahan daya dukung dari *prey*. Dalam pengembangan lebih lanjut, modifikasi tidak hanya dapat dilakukan terhadap daya dukungnya, namun juga pada parameter lain dalam sistem *Leslie-Gower*. Misalkan dengan mengasumsikan untuk fungsi respon yang lainnya, dan mengasumsikan pertumbuhan intrinsiknya bukanlah merupakan bilangan konstan, namun merupakan suatu fungsi yang lain yang bergantung waktu. Selain itu, dapat diasumsikan adanya waktu tunda. Modifikasi terhadap daya dukungnyapun tidak terbatas hanya pada asumsi bahwa daya dukungnya tumbuh secara logistik. Modifikasi-modifikasi dapat disesuaikan dengan kondisi *predator* dan *prey* dalam ekosistemnya.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Negeri Gorontalo yang telah memberikan dukungan moril dan materil sehingga makalah ini dapat diselesaikan, dipresentasikan dan dipublikasikan dalam seminar nasional MIPANET tahun 2017 di Universitas Sam Ratulangi Manado.

Daftar Pustaka

- [1] Conway, ED, Smoller, JA., *Global Analysis of a System of Predator-Prey Equations*, SIAM J Appl Math, 1986.
- [2] Hsu, S. B. and Huang, T. W., *Global stability for a class of predator-prey system*, SIAM J. Appl. Math., 55 , 763-783, 1995.
- [3] Huang, J., Gong, Y., *Bifurcation Analysis in a Predator-Prey Model with Constant-Yield Predator Harvesting*, Discrete and Continuous Dynamical System Series B 21011-212, 2013.
- [4] Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York.L, 1998
- [5] Leslie, P. H. & Gower, J. C., *The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species*. *Biometrika*, 47, 219–234, 1960.
- [6] Lynch, S., *Dynamical Systems with Applications using Maple, 2nd Edition*, Springer, New York, 2010.

- [7] Panigoro, H.S., *Analisis Dinamik Sistem Predator-Prey Model Leslie-Gower dengan Pemanenan Secara Konstan terhadap Predator*. Jurnal Euler, Vol.2, No.1, 1-12, 2014.
- [8] Panigoro, H.S., *Sistem Dinamik Untuk Pemula "Sebuah Pengantar Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Satu Parameter Suatu Titik Ekuilibrium"*, Ideas Publishing, Gorontalo.
- [9] Purnomo, K.D., *Model Pertumbuhan Populasi dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik*. Majalah Matematika dan Statistika, Vol. 1, No.1, 21-29, 2000.
- [10] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*," Second edition, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [11] Verhulst, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [12] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [13] Yang, L, Zhong, S., *Dynamics of a diffusive predator-prey model with modified Leslie-Gower schemes and additive Allee effect*, Comp. Appl. Math, 34:671-690, 2015.
- [14] Zhang, W., Liu, W., Xu, C., *Bifurcation Analysis for a Leslie-Gower Predator-Prey System with Time Delay*, International Journal of Nonlinear Science, Vol.15 No.1, pp. 35-44.
- [15] Zhu, C. R. and Lan, K. Q., *Phase portraits, Hopf bifurcation and limit cycles of Leslie-Gower predator-prey systems with harvesting rates*, Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B, 14, 289-306, 2010.