ISSN 2528-6005

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA-VI
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO, 11-14 AGUSTUS 2015

Diselenggarakan Oleh :
Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNG

Bekerjasama dengan :
The Indonesian Mathematical Society (IndoMS)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR PRESIDEN INDOMS

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Salam sejahtera bagi kita semua.

Puji dan syukur kita panjatkan ke Hadirat Allah SWT, atas semua rahmat dan karunia-Nya, sehingga kami telah dapat menyelesaikan Prosiding Konferensi Nasional Pendidikan Matematika (KNPM) ke- 6 yang telah diselenggarakan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo, pada tanggal 11- 14 Agustus 2015 bertempat di Ballroom TC Damhil UNG. KNPM ke- 6 ini terselenggara atas kerja sama antara IndoMS dengan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo dengan tema **"Mewujudkan Kultur Akademik dan Revolusi Mental Melalui Matematika dan Pendidikan Matematika".**

Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Rektor Universitas Negeri Gorontalo yang telah mengusulkan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo sebagai penyelenggara KNPM ke-6 tahun 2015. Kami juga menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang mendalam kepada Pemerintah Provinsi Gorontalo yang telah membantu sehingga acara KNPM ke- 6 ini telah terselenggara dengan baik

Dalam mengisi pembangunan di Indonesia ini, IndoMS (Himpunan Matematika Indonesia) yang dibentuk tanggal 15 Juli 1976 di Bandung, sebagai organisasi profesi yang bersifat ilmiah dan non-profit senantiasa dituntut peran sertanya melalui berbagai aktivitas segenap anggota serta pengurus baik di tingkat pusat maupun wilayah. IndoMS merupakan suatu forum bagi matematikawan, pengguna matematika maupun penggemar dan pemerhati matematika di seluruh Indonesia. Dalam KNPM ke- 6 ini telah dipaparkan berbagai hasil penelitian dalam bidang pendidikan matematika, matematika dan statistika. Hasil konferensi ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam bidang pendidikan dan pembelajaran matematika serta matematika, statistika dan aplikasinya.

Pengurus Pusat IndoMS periode 2014-2016 mengucapkan terima kasih kepada semua reviewer, editor, tim prosiding serta semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu atas peran sertanya dan dukungannya dalam penerbitan prosiding ini. Ucapan terima kasih juga kami sampaikan kepada semua penulis yang telah mempresentasikan dan mengirimkan naskah makalahnya untuk diterbitkan pada Prosiding KNPM ke- 6 ini.

Kami harapkan bahwa Prosiding KNPM ke- 6 ini dapat bermanfaat bagi semua pembaca, pemakalah serta kemajuan pendidikan matematika, ilmu matematika dan statistika di tanah air tercinta, Indonesia.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Gorontalo, Juli 2016
Presiden IndoMS 2014-2016,

Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana

KATA PENGANTAR PANITIA KNPM 6

Puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberi kemudahan dalam pelaksanaan Konferensi Nasional Pendidikan Matematika (KNPM) ke- 6 tahun 2015 di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo pada tanggal 11–14 Agustus 2015.

Kami menyampaikan terima kasih atas penunjukkan Jurusan Matematika FMIPA UNG sebagai penyelenggara KNPM ke- 6, yang telah diselenggarakan di Ballroom TC Damhil kampus Universitas Negeri Gorontalo.

Pada KNPM ke- 6 ini panitia telah menetapkan tema: "**Mewujudkan Kultur Akademik dan Revolusi Mental Melalui Matematika dan Pendidikan Matematika".** Hal ini mengingat karena pengembangan karakter pada hakekatnya adalah pembangunan dan pengembangan mental. Pada sisi lain karakter merupakan bagian integral dari kultur akademik, mengingat karakter diperlukan dan berpotensi dikembangkan dari setiap aktivitas akademik. Pengembangan kultur akademik menjadi titik terminal antara upaya pembinaan karakter dengan peningkatan mutu akademik dari suatu proses pendidikan. Pengembangan kultur akademik dapat diwujudkan melalui ranah pendidikan termasuk pendidikan matematika.

Kultur akademik yang baik akan menjadi lahan bagi tumbuh berkembangnya masyarakat ilmiah, yakni masyarakat (peserta didik) yang memiliki keingintahuan yang tinggi, logis, kritis, objektif, analitis, kreatif dan konstruktif, percaya diri, mandiri, terbuka untuk menerima kritik, menghargai prestasi ilmiah, memiliki dan menjunjung tinggi norma dan susila akademik serta tradisi ilmiah, dinamis, dan berorientasi kemasa depan. Nilai-nilai tersebut di atas juga merupakan *instructional effect* dan *nurturant effect* dari konten matematika dan pendidikan matematika.

Pada konteks ini Konferensi Nasional Pendidikan Matematika (KNPM) ke- 6 di Universitas Negeri Gorontalo (UNG) diniatkan untuk dapat memberikan sumbangsih pemikiran meneguhkan harapan tumbuhnya kultur akademik dan menggaungkan revolusi mental melalui matematika dan pendidikan matematika. Harapan ini senantiasa harus diikhtiarkan secara bertahap dan kontinu. Seminar, diskusi ilmiah, diseminasi hasil-hasil penelitian dan *sharing* pengetahuan terkini dibidang matematika serta *best practice* dalam pembelajaran matematika pada kegiatan KNPM 6 ini diharapkan menjadi wahana instrumental dalam rangka menyongsong Indonesia Emas 2045 dan generasi Indonesia yang berkarakter.

Pada KNPM ke- 6 tahun 2015 tersebut telah dipresentasikan 7 makalah pada sidang pleno serta 78 makalah pada sidang paralel. Setelah melalui proses review oleh tim, panitia KNPM ke-6 telah menyusun prosiding KNPM ke- 6, yang alhamdulillah saat ini sudah dapat dituntaskan.

Kami dari pihak panitia mengucapkan banyak terima kasih kepada semua peserta yang telah mengirimkan makalah untuk diterbitkan pada prosiding konferensi, kepada Tim Reviewer dan Tim Editor yang telah membantu sehingga terbitnya prosiding ini.

Akhirnya, kami juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu kegiatan konferensi ini terutama kepada Rektor UNG, Pemerintah Provinsi Gorontalo, Pihak sponsor dan Panitia baik dari staf dosen, pegawai maupun para mahasiswa yang telah bekerja keras untuk mempersiapkan kesuksesan KNPM ke- 6 ini.

Panitia Pelaksana KNPM ke-6,

PANITIA PELAKSANA KNPM KE-6 TAHUN 2015

1. Pengarah:

Ketua : Prof. Dr. Budi Nurani (Universitas Padjadjaran)
Sekretaris : Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd (Universitas Negeri Gorontalo)
Anggota :

1. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng (Universitas Indonesia)
2. Prof. Dr. Zulkardi (Universitas Sriwijaya)
3. Prof. Dr. Tulus (USU)
4. Prof. Dr. Didi Suryadi (UPI)
5. Prof. Dr. Sarson W. Dj Pomalato, M.Pd (UNG)
6. Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd (UNG)
7. UM Malang
8. UNM Makasar
9. Unesa Surabaya

2. Pelaksana

Ketua Pelaksana	:	Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd
Wakil Ketua 1	:	Dr. Arfan Arsyad, M.Pd
Wakil Ketua 2	:	Dra. Lailany Yahya, M.Si
Wakil Ketua 3	:	Dr. Tedy Machmud, M.Pd
Sekretaris	:	Drs. Majid, M.Pd
Bendahara	:	Nursiya Bito, S. Pd, M.Pd
Wakil Bendahara	:	Rahnikmawati Hasan, A.Md

Seksi-seksi:

Seksi Sidang dan Acara	Drs. Sumarno Ismail, M.Pd Drs. Abas Kaluku, M.Si Novianita Achmad, M.Si Drs. Yus Iryanto Abas, M.Pd Agustina Mohi S.Sos Emli Rahmi, S.Pd, M.Si Sri Lestari Machmud, S.Pd, M.Si Abd. Fikri Katili Mulyadi Ondah
Seksi Makalah	Nurwan, S.Pd, M.Si. M. Yusuf, M.Si Zulfikar Hasan, S.Pd Syafrudin Kama, S.Pd.
Seksi *Reviewer Extended Abstract*	Prof. Dr. Sarson W. Dj Pomalato, M.Pd Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd. Prof. Dr. Hamzah B. Uno, M.Pd DR. Tedy Machmud, M.Pd.

Seksi Prosiding	Dr. Ali Kaku, M.Pd Drs. Pery Zakaria, M.Pd Hasan Panigoro, S.Pd, M.Si Jihad Wungguli, S.Pd, M.Si Laswi Kamali, S.T. Irvan Mustafa, S.Pd.
Seksi Akomodasi dan Transportasi	Dr. Abd. Djabar Mohidin, M.Pd. Drs. Abdul Wahab Abdullah, M.Pd Zulwardi S. Mamu, S.Pd, M.Pd Sufitro Kalapati, S.Pd.
Seksi Konsumsi	Dra. Kartin Usman, M.Pd Diana Madi, S.Pd, M.Pd Dewi Rahmawaty Isa, S.Si, M.Si Yanti, S.Pd
Seksi Publikasi dan Dokumentasi dan Pengelolaan web	Drs. Franky A. Oroh, M.Si Hasan Panigoro, S.Pd, M.Si Resmawan, S.Pd, M.Si
Seksi Perlengkapan	Khardiyawan Pauweni, S.Pd, M.Pd Dahlan Lukum, S.Pd Noldi Latada, S.Pd Ismet Mobia
Seksi Ekskursi / TOUR	Drs. Yamin Ismail, M.Pd Drs. Yus Iryanto Abas, M.Pd Salmun, S.Pd, M.Si Sitti Zakiyah, S.Pd, M.Pd
Seksi *Sponsorship* dan *Public Relation*	Drs. Abas Kaluku, M.Si Novianita Achmad, S.Si, M.Si
Design Cover dan *Layout* Prosiding	Irvan Mustafa, S.Pd

TIM REVIEWER

1. Prof. Dr. H. Sarson W. Dj Pomalato, M.Pd. (Universitas Negeri Gorontalo)
2. Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd. (Universitas Negeri Gorontalo)
3. Prof. Dr. H. Hamzah B. Uno, M.Pd. (Universitas Negeri Gorontalo)
4. DR. H. In Hi Abdullah, M.Si (Universitas Khairun Ternate)
5. DR. H. Kodirun, M.Pd. (Universitas Halu Oleo)
6. DR. Gelar Dwirahayu, M.Pd. (UIN Syarif Hidayatullah Jakarta)
7. DR. Hepsi Nindiasari, M.Pd. (Univ. Sultan Ageng Tirtayasa)
8. DR. Maria Ulpah, M.Si. (IAIN Purwokerto)
9. DR. Achmad Mudrikah, M.Pd. (Uninus Bandung)
10. DR. Edy Surya, M.Si. (Universitas Negeri Medan)
11. DR. H. Ismail Zakaria, M.Si. (Universitas Negeri Gorontalo)
12. DR. Tedy Machmud, M.Pd. (Universitas Negeri Gorontalo)

DAFTAR MAKALAH

A. PEMAKALAH UTAMA:

1. Prof. Dr. Hans-Stefan Siller. University of Koblenz-Landau Germany. Judul Makalah: “Modelling as a big idea in mathematics – Knowlegde and views of pre-service and in-service teachers”.
2. Prof. DR. Didi Suryadi, M.Ed. SPs UPI Bandung. Judul Makalah: “Penguatan Kapasitas Pendidik Melalui Sistem Komunitas Berbasis Riset: Sebuah Upaya Rintisan Di Kota Bandung”.
3. Prof. DR. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si. Universitas Sriwijaya. Judul Makalah: “Design Research: Eksplorasi Budaya Indonesia Dan Implementasinya Dalam Pembelajaran Matematika”.
4. Prof. DR. Budi Nurani Ruchjana. Universitas Padjajaran. Judul Makalah: “Peranan Pendidikan Matematika Menghadapi Masyarakat Ekonomi Asean 2015”.
5. Prof. Dr. Sarson W. Dj. Pomalato, M.Pd. Universitas Negeri Gorontalo. Judul Makalah: “Model Based Development Of Contextual Learning Math For Improved Communication And Creativity Of Math Elementary School Students”.
6. Profesor Dr.rer nat Dedi Rosadi S.Si M.Sc. Universitas Gajah Mada. Judul Makalah: “Pengajaran Ekonometrika Dan Analisis Runtun Waktu Dengan Paket Perangkat Lunak RcmdrPlugins.SPSS”.
7. DR. Kadir, S.Pd., M.Si. Universitas Halu Oleo. Judul Makalah: “Penggunaan Masalah Pesisir Untuk Melatih Kemampuan Berpikir Matematik Siswa SMP”.

B. PEMAKALAH BIDANG:

BIDANG PENDIDIKAN MATEMATIKA

BIDANG MATEMATIKA

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK: MODIFIKASI PADA DAYA DUKUNG DENGAN PEMANENAN PROPOSIONAL TERHADAP POPULASI

Hasan S. Panigoro[1]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo
Jln. Jendral Sudirman No. 6 Kota Gorontalo, hspanigoro@ung.ac.id

Abstrak

Paper ini merupakan kajian analisis dinamik terhadap model pertumbuhan logistik suatu populasi dengan mengasumsikan bahwa daya dukung *(carrying capacity)* juga tumbuh secara logistik. Asumsi ini muncul dikarenakan adanya kondisi pada suatu populasi tertentu yang mengalami perubahan daya dukungnya sehingga model logistik biasa tidak lagi relevan terhadap kondisi tersebut. Modifikasi selanjutnya adalah perilaku pemanenan secara proposional terhadap populasi tersebut. Munculnya perilaku pemanenan terhadap populasi dalam model ini diasumsikan karena adanya campur tangan manusia dalam eksistensi populasi tersebut dalam hal ini memburu atau memanen populasi tersebut dengan tipe pemanenan proposional terhadap jumlah populasi. Analisis yang dilakukan yaitu mencari titik ekuilibrium dan mempelajari kestabilannya ditinjau dari besaran pemanenan secara proposional yang dilakukan. Hasil analisis yang dilakukan di interpretasikan lebih lanjut dengan melihat pengaruh dari pemanenan secara proposional terhadap eksistensi dari populasi tersebut.

Kata Kunci: Ekuilibrium, Logistik, Pemanenan, Populasi

PENDAHULUAN

Model pertumbuhan suatu populasi merupakan suatu model yang sangat menarik untuk dipelajari dan terus dikaji dikarenakan masalah yang berkaitan dengan populasi selalu mengalami perkembangan dan perubahan seiring berjalannya waktu. Oleh karena itu banyak peneliti yang terus mengkaji, mengembangkan, dan memodifikasi model yang berhubungan dengan masalah pertumbuhan populasi, baik masalah populasi satu spesies, dua, atau lebih spesies seperti model pertumbuhan satu spesies, model kompetisi dua atau lebih spesies, model predator-prey dua atau lebih spesies dan sebagainya.

Dalam model dinamik, diperkenalkan model pertumbuhan eksponensial yang mengasumsikan populasi tumbuh secara eksponensial seperti pada *Boulanouar (2014)* yang meneliti pertumbuhan populasi bakteri yang diasumsikan tumbuh secara eksponensial. Namun dalam perkembangannya, model pertumbuhan tidak hanya diterapkan pada masalah populasi bakteri, namun pada populasi spesies lainnya. Pada beberapa kasus tertentu, model exponensial tidak lagi relevan terhadap pertumbuhan populasi lainnya. Oleh karena itu diperkenalkan suatu model pertumbuhan populasi oleh *Verhulst (1838, 1841, 1845, 1847)* yaitu model logistik yang mengasumsikan bahwa dalam kasus tertentu, pertumbuhan suatu populasi terbatas oleh daya dukungnya. Dalam perkembangannya, model ini tidak hanya digunakan dalam pertumbuhan populasi, namun juga dalam bidang lainnya seperti *Cai (2010)* dan *Juratoni et.al (2010)* yang menerapkan model logistik dalam model pertumbuhan ekonomi

Perkembangan model logistik juga tidak hanya dalam bidang ilmu lainnya, namun juga mengalami perkembangan dalam model itu sendiri. Dalam beberapa kasus, terjadi modifikasi pada model logistik seperti yang dilakukan oleh *Arugaslan (2015)* yang memodifikasi model logistik dengan waktu tunda dan pemanenan. Modifikasi juga dilakukan oleh *Lumi et.al*

(2014) yang mengasumsikan daya dukung *(carrying capacity)* berubah terhadap waktu dengan perubahannya di sebut *size-dependent carrying capacity*. Modifikasi model logistik ini dikenal dengan model *Von Foerster*. Modifikasi terhadap daya dukung juga dilakukan oleh *Meyer et.al (1999)* yang mengasumsikan bahwa daya dukung juga tumbuh secara logistik.
Dalam paper ini, penulis mengkaji tentang modifikasi yang dilakukan oleh Meyer et.al (1999) namun dengan memberikan perlakuan terhadap populasi tersebut yakni pemanenan proposional terhadap populasi tersebut. Dalam paper ini difokuskan untuk melihat pengaruh dari pemanenan proposional terhadap kestabilan model dan eksistensi dari populasi.

FORMULASI SISTEM

Model Pertumbuhan Logistik Populasi

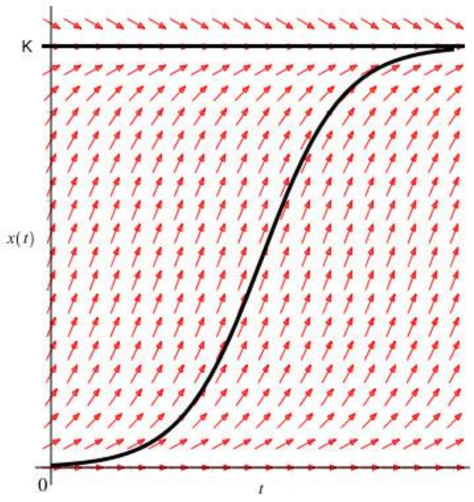
Model Logistik pertama kali diperkenalkan oleh *Verhulst (1838, 1841, 1845, 1847)* yang menyatakan bahwa setiap populasi akan tumbuh dengan daya dukung lingkungannya. Model ini dituliskan dalam:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{1}$$

Dimana $x(t) \geq 0$ sepanjang $t \geq 0$, dan r, K bilangan real positif. $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada waktu t, r merupakan laju pertumbuhan intrinsik populasi dan K adalah daya dukungnya. Model ini memiliki solusi khusus:

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} \tag{2}$$

Model ini memiliki 2 titik ekuilibrium yaitu $\bar{x}_1 = 0$ dan $\bar{x}_2 = K$ dengan tipe kestabilan yang berbeda. Titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = 0$ merupakan titik ekuilibrium tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = K$ merupakan titik ekuilibrium stabil. Hal ini mengakibatkan nilai awal $0 < x(0) < K$ akan menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = 0$ dan mendekati titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = K$. Dengan demikian maka populasi akan tumbuh dan mencapai nilai daya dukungnya. Dengan demikian model ini menjamin bahwa tidak akan terjadi kepunahan terahadap populasi tersebut. Pergerakan potret fase dari solusi dapat dilihat pada gambar (1) berikut:



Gambar 1. Potret Fase Model Logistik

Model Pertumbuhan Logistik Populasi dengan Pertumbuhan Logistik Daya Dukung
Dalam *Meyer et.al (1999)* diperlihatkan bahwa pada beberapa kasus model logistik tidak lagi relevan dengan keadaan sebenarnya. Modifikasi kemudian dilakukan oleh *Meyer et.al (1999)* yaitu dengan mengasumsikan bahwa daya dukung *(carrying capacity)* tumbuh secara logistik. Dengan kata lain, asumsi ini mengakibatkan model pertumbuhan logisitik memiliki daya dukung yang juga tumbuh secara logistik (model logistik di dalam logistik). Pertumbuhan logistik daya dukung dituliskan sebagai:

$$\dot{K} = \alpha K\left(1 - \frac{K}{\kappa}\right) \tag{3}$$

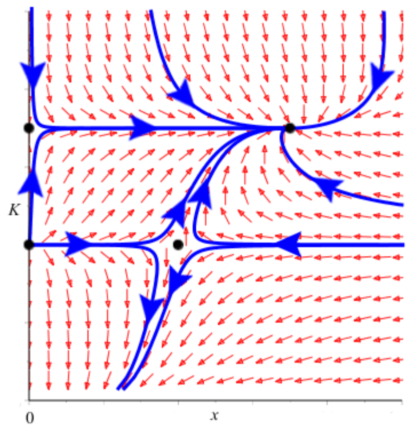
Asumsi model logistik dari daya dukung ini dianggap masih tidak realistik mengingat model ini mengakibatkan daya dukung $K(t) \geq 0$ sepanjang t. Oleh karena itu model logistik untuk daya dukungnya dimodifikasi sehingga daya dukungnya dimulai dari suatu daya dukung awal κ_1 dan tumbuh mencapai daya dukung $\kappa_1 + \kappa_2$. Asumsi oleh *Meyer et.al (1999)* ini mengakibatkan persamaan (3) dimodifikasi menjadi:

$$\dot{K} = \alpha(K - \kappa_1)\left(1 - \frac{K-\kappa_1}{\kappa_2}\right) \tag{4}$$

Model ini pada akhirnya menjadi sistem persamaan diferensial yang dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ \dot{K} &= \alpha(K - \kappa_1)\left(1 - \frac{K-\kappa_1}{\kappa_2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Sistem (5) memiliki potret fase sebagai berikut:



Gambar 2. Potret Fase Model Logistik dengan perubahan daya dukung yang tumbuh secara logistik

Sistem (5) memiliki 4 titik ekuilibrium yaitu:

$$E_1 = (0, \kappa_1), \qquad E_3 = (0, \kappa_1 + \kappa_2),$$
$$E_2 = (\kappa_1, \kappa_1), \quad E_4 = (\kappa_1 + \kappa_2, \kappa_1 + \kappa_2).$$

Sistem (5) memiliki 3 titik ekuilibrium tidak stabil dan satu titik ekuilibrium stabil. Titik ekuilibrium E_1 merupakan titik ekuilibrium tidak stabil asimtotik, titik ekuilibrium E_2 dan E_3 merupakan titik ekuilibrium tidak stabil tipe *saddle*, dan titik ekuilibrium E_4 merupakan titik ekuilibrium stabil asimtotik. Dapat dilihat pada gambar (2) bahwa jika nilai awal $\kappa_1 < x(0) < \kappa_1 + \kappa_2$, maka solusi akan selalu bergerak mencapai $K = \kappa_1 + \kappa_2$. Dengan demikian kondisi dengan nilai awal ini akan mengakibatkan eksistensi dari populasi tetap terjaga.

Model Pertumbuhan Logistik Populasi dengan Modifikasi daya dukung dan Pemanenan Proposional terhadap Populasi

Modifikasi selanjutnya yaitu dengan memberikan perlakuan terhadap sistem (5) yakni pemanenan secara proposional sehingga sistem menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-hx \\ \dot{K} &= \alpha(K-\kappa_1)\left(1-\frac{K-\kappa_1}{\kappa_2}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

dengan h adalah laju pemanenan yang bergantung pada jumlah dari $x(t)$. Model inilah yang menjadi fokus pembahasan dari paper ini. Analisis yang dilakukan difokuskan dalam mengamati kestabilan dari sistem (6) terhadap perubahan kestabilan dari sistem.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Identifikasi Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium didapatkan dari:

$$\begin{aligned} rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-hx &= 0 \\ \alpha(K-\kappa_1)\left(1-\frac{K-\kappa_1}{\kappa_2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Dari persamaan (7) didapatkan solusi:

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,\kappa_1) & E_3 &= (0,\kappa_1+\kappa_2) \\ E_2 &= \left(\kappa_1\frac{r-h}{r},\kappa_1\right) & E_4 &= \left((\kappa_1+\kappa_2)\frac{r-h}{r},\kappa_1+\kappa_2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Eksistensi Titik Ekuilibrium

Untuk melihat solusi (8) sebagai titik ekuilibrium, perhatikan teorema berikut:

Teorema 1. *Perhatikan solusi (8). Untuk $h, r > 0$, dan h, r bilangan real, E_1 dan E_3 merupakan titik ekuilibrium, sedangkan:*

a. Jika $h < r$ maka E_2 dan E_4 merupakan titik ekuilibrium sistem (6)

b. Jika $h \geq r$ maka E_2 dan E_4 bukan merupakan titik ekuilibrium sistem (6).

Bukti. Perhatikan bahwa untuk menjadi titik ekuilibrium sistem (6), berdasarkan kondisi biologis maka titik ekuilibrium E_i dengan $i = 1..4$ harus merupakan anggota dari himpunan $E \coloneqq \{(x,K)|x \geq 0, K > 0, dan\ x, K \in \mathbb{R}\}$. Perhatikan bahwa $E_1 \in E$, dan $E_3 \in E$ sehingga E_1 dan E_3 merupakan titik ekuilibrium. Perhatikan jika $h < r$ mengakibatkan $\kappa_1\frac{r-h}{r} > 0$ dan $(\kappa_1+\kappa_2)\frac{r-h}{r} > 0$. Karena $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$ dan $\kappa_1 + \kappa_2 > 0$ maka $E_2 \in E$ dan $E_4 \in E$. Dengan demikian E_2 dan E_4 merupakan titik ekuilibrium dari sistem (6). Untuk $h > r$ mengakibatkan $E_2 \notin E$ dan $E_4 \notin E$ sehingga E_2 dan E_4 bukan merupakan titik ekuilibrium dari sistem (6). Perhatikan bahwa jika $h = r$ mengakibatkan $E_1 = E_2$ dan $E_3 = E_4$ dengan $E_1 \in E$, dan $E_3 \in E$ sehingga hanya akan ada dua titik ekuilibrium di sistem (6) yaitu E_1 dan

E_3.

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium, kita lakukan pelinearan disekitar titik ekuilibrium $E(\bar{x}, \bar{K})$ terhadap sistem (6) sehingga didapatkan matriks *jacobian* sebagai berikut:

$$J(\bar{x}, \bar{K}) = \begin{bmatrix} (r-h) - \frac{2r\bar{x}}{\bar{K}} & \frac{r\bar{x}^2}{\bar{K}^2} \\ 0 & -\frac{\alpha(2\bar{K}-\kappa_2-2\kappa_1)}{\kappa_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sehingga pelinearan disekitar solusi titik ekuilibrium (8) memberikan matriks *jacobian*:

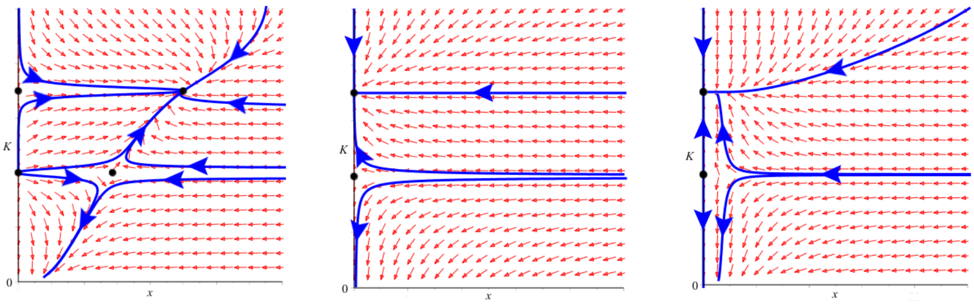
$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r-h & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad J(E_2) = \begin{bmatrix} -(r-h) & \frac{(r-h)^2}{r} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} r-h & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad J(E_4) = \begin{bmatrix} -(r-h) & \frac{(r-h)^2}{r} \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Dengan masing-masing nilai eigen:

a. $J(E_1)$ memiliki nilai eigen $\lambda_1 = r - h$ dan $\lambda_2 = \alpha$.
b. $J(E_2)$ memiliki nilai eigen $\lambda_1 = -(r - h)$ dan $\lambda_2 = \alpha$.
c. $J(E_3)$ memiliki nilai eigen $\lambda_1 = r - h$ dan $\lambda_2 = -\alpha$.
d. $J(E_4)$ memiliki nilai eigen $\lambda_1 = -(r - h)$ dan $\lambda_2 = -\alpha$.

Berdasarkan teorema (1) maka pada saat $h < r$ maka ada 4 titik ekuilibrium dimana E_1 tidak stabil asimtotik, E_2 dan E_3 tidak stabil tipe *saddle* dan E_4 stabil asimtotik. Untuk $h > r$ maka hanya ada dua titik ekuilibrium yaitu E_1 yang merupakan titik ekuilibrium tidak stabil tipe *saddle* dan E_3 yang merupakan titik ekuilibrium stabil asimtotik. Untuk $h = r$ juga akan memberikan kondisi titik ekuilibrium seperti pada saat $h > r$. Perhatikan potret fase pada gambar berikut:



a) $h < r$ **b)** $h > r$ **c)** $h = r$

Gambar 2. Potret Fase Model Logistik dengan perubahan daya dukung yang tumbuh secara logistik dan perlakuan berupa pemanenan proposional

Berdasarkan analisis dan simulasi diatas, perhatikan bahwa jika laju pemanenan proposional lebih besar atau sama dengan laju pertumbuhan intrinsik akan mengakibatkan populasi akan mendekati kepunahan atau dengan kata lain eksistensi dari populasi tersebut akan terancam. Satu-satunya harapan agar eksistensi dari populasi tetap terjaga yaitu ketika laju pemanenan proposional lebih kecil dari laju pertumbuhan intrinsik dengan nilai awal populasi lebih besar dari daya dukung awalnya (κ_1).

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dalam model pertumbuhan logistik dengan daya dukung tumbuh secara logisitik, eksistensi populasi akan tetap terjaga apabila nilai awal dari populasi berada diatas dari daya dukung awal populasi tersebut. Namun apabila diberikan perlakuan berupa pemanenan secara proposional, maka kondisi ini akan tercapai apabila laju pemanenan proposional lebih kecil dari laju pertumbuhan intrinsik. Laju pertumbuhan intrinsik yang lebih kecil atau sama dengan laju pemanenan proposional akan mengakibatkan seluruh kondisi dari nilai awal populasi menuju kepunahan. Dengan demikian agar eksistensi dari populasi terjaga maka laju pemanenan proposional yang dilakukan tidak boleh lebih besar dari laju pertumbuhan intrinsik.

Saran

Pada beberapa kasus, daya dukung populasi tidak hanya tumbuh secara logistik, misalkan daya dukung yang mengalami peluruhan dan sebagainya. Oleh karena itu lebih lanjut lagi dapat dikaji masalah serupa namun dengan beberapa modifikasi baru pada model disesuaikan dengan konteks masalah yang ada.

DAFTAR RUJUKAN

Arugaslan, D. 2015. *Dynamics of a Harvested Logistic Type Model with Delay and Piecewise Constant Argument*. J. Nonlinear Sci. Appl. 8. pp.507-517.

Boulanouar, M. 2014. *Asynchronous Exponential Growth of a Bacterial Population. Electronic Journal of differential Equations*. Vol 2014, No.06. pp.1-12.

Cai, D. 2010. *Multiple Equilibria and Bifurcations in an Economic Growth Model with Endogenous Carrying Capacity*. International Journal of Bifurcation an Chaos. Vol.20, No.11. pp.3461-3472.

Juratoni, A. & Bundau, O. 2010. *Hopf Bifurcation Analysis of The Economical Growth model with Logistic Population Growth and Delay*. Proceedings of the 21st International DAAAM Symposium, Vol.21, No.1. Viennam Austria.

Kuznetsov, Y.A. 1998. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag. New York.

Lumi, N., Ainsaar, A. and Mankin, R. 2014. *Noise-Induced Transitions in a Population Growth Model Based on Size-Dependent Carrying Capacity*. Journal of Mathematical Problems in Engineering. Volume 2014. Article ID 120624. pp.1-8.

Lynch, S. 2010. *Dynamical Systems with Applications using Maple, 2nd Edition*. Springer, New York.

Meyer, P.S. & Ausubel, J.H. 1999. *Carrying Capacity: A Model with Logistically Varrying Limits*. Tecnological Forecasting \& Social Change: pp.209-2014.

Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.

Purnomo, K. D. 2000. *Model Pertumbuhan Populasi dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik*. Majalah Matematika dan Statistika, Vol.1, No.1, pp.21–29.

Verhulst, F. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg.

Verhulst, PF. 1838. *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*. Correspondance mathématique et physique 10: 113–121. Retrieved 2013-02-18.

Verhulst, PF. 1841. *Traité élémentaire des fonctions elliptiques : ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral*. Bruxelles: Hayez. Retrieved 2013-02-18.

Verhulst, PF. 1845. *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population [Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase]*. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles 18: 1–42. Retrieved 2013-02-18.

Verhulst, PF. 1847. *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique 20: 1–32. Retrieved 2013-02-18.

9 772528 600000

TC DAMHIL UNG

11-14 AGUSTUS 2015