ISSN 2528-6005

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA-VI
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO, 11-14 AGUSTUS 2015

Diselenggarakan Oleh :
Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNG

Bekerjasama dengan :
The Indonesian Mathematical Society (IndoMS)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR PRESIDEN INDOMS

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Salam sejahtera bagi kita semua.

Puji dan syukur kita panjatkan ke Hadirat Allah SWT, atas semua rahmat dan karunia-Nya, sehingga kami telah dapat menyelesaikan Prosiding Konferensi Nasional Pendidikan Matematika (KNPM) ke- 6 yang telah diselenggarakan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo, pada tanggal 11- 14 Agustus 2015 bertempat di Ballroom TC Damhil UNG. KNPM ke- 6 ini terselenggara atas kerja sama antara IndoMS dengan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo dengan tema **"Mewujudkan Kultur Akademik dan Revolusi Mental Melalui Matematika dan Pendidikan Matematika".**

Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Rektor Universitas Negeri Gorontalo yang telah mengusulkan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo sebagai penyelenggara KNPM ke-6 tahun 2015. Kami juga menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang mendalam kepada Pemerintah Provinsi Gorontalo yang telah membantu sehingga acara KNPM ke- 6 ini telah terselenggara dengan baik

Dalam mengisi pembangunan di Indonesia ini, IndoMS (Himpunan Matematika Indonesia) yang dibentuk tanggal 15 Juli 1976 di Bandung, sebagai organisasi profesi yang bersifat ilmiah dan non-profit senantiasa dituntut peran sertanya melalui berbagai aktivitas segenap anggota serta pengurus baik di tingkat pusat maupun wilayah. IndoMS merupakan suatu forum bagi matematikawan, pengguna matematika maupun penggemar dan pemerhati matematika di seluruh Indonesia. Dalam KNPM ke- 6 ini telah dipaparkan berbagai hasil penelitian dalam bidang pendidikan matematika, matematika dan statistika. Hasil konferensi ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam bidang pendidikan dan pembelajaran matematika serta matematika, statistika dan aplikasinya.

Pengurus Pusat IndoMS periode 2014-2016 mengucapkan terima kasih kepada semua reviewer, editor, tim prosiding serta semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu atas peran sertanya dan dukungannya dalam penerbitan prosiding ini. Ucapan terima kasih juga kami sampaikan kepada semua penulis yang telah mempresentasikan dan mengirimkan naskah makalahnya untuk diterbitkan pada Prosiding KNPM ke- 6 ini.

Kami harapkan bahwa Prosiding KNPM ke- 6 ini dapat bermanfaat bagi semua pembaca, pemakalah serta kemajuan pendidikan matematika, ilmu matematika dan statistika di tanah air tercinta, Indonesia.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Gorontalo, Juli 2016
Presiden IndoMS 2014-2016,

Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana

KATA PENGANTAR PANITIA KNPM 6

Puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberi kemudahan dalam pelaksanaan Konferensi Nasional Pendidikan Matematika (KNPM) ke- 6 tahun 2015 di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo pada tanggal 11–14 Agustus 2015.

Kami menyampaikan terima kasih atas penunjukkan Jurusan Matematika FMIPA UNG sebagai penyelenggara KNPM ke- 6, yang telah diselenggarakan di Ballroom TC Damhil kampus Universitas Negeri Gorontalo.

Pada KNPM ke- 6 ini panitia telah menetapkan tema: "**Mewujudkan Kultur Akademik dan Revolusi Mental Melalui Matematika dan Pendidikan Matematika".** Hal ini mengingat karena pengembangan karakter pada hakekatnya adalah pembangunan dan pengembangan mental. Pada sisi lain karakter merupakan bagian integral dari kultur akademik, mengingat karakter diperlukan dan berpotensi dikembangkan dari setiap aktivitas akademik. Pengembangan kultur akademik menjadi titik terminal antara upaya pembinaan karakter dengan peningkatan mutu akademik dari suatu proses pendidikan. Pengembangan kultur akademik dapat diwujudkan melalui ranah pendidikan termasuk pendidikan matematika.

Kultur akademik yang baik akan menjadi lahan bagi tumbuh berkembangnya masyarakat ilmiah, yakni masyarakat (peserta didik) yang memiliki keingintahuan yang tinggi, logis, kritis, objektif, analitis, kreatif dan konstruktif, percaya diri, mandiri, terbuka untuk menerima kritik, menghargai prestasi ilmiah, memiliki dan menjunjung tinggi norma dan susila akademik serta tradisi ilmiah, dinamis, dan berorientasi kemasa depan. Nilai-nilai tersebut di atas juga merupakan *instructional effect* dan *nurturant effect* dari konten matematika dan pendidikan matematika.

Pada konteks ini Konferensi Nasional Pendidikan Matematika (KNPM) ke- 6 di Universitas Negeri Gorontalo (UNG) diniatkan untuk dapat memberikan sumbangsih pemikiran meneguhkan harapan tumbuhnya kultur akademik dan menggaungkan revolusi mental melalui matematika dan pendidikan matematika. Harapan ini senantiasa harus diikhtiarkan secara bertahap dan kontinu. Seminar, diskusi ilmiah, diseminasi hasil-hasil penelitian dan *sharing* pengetahuan terkini dibidang matematika serta *best practice* dalam pembelajaran matematika pada kegiatan KNPM 6 ini diharapkan menjadi wahana instrumental dalam rangka menyongsong Indonesia Emas 2045 dan generasi Indonesia yang berkarakter.

Pada KNPM ke- 6 tahun 2015 tersebut telah dipresentasikan 7 makalah pada sidang pleno serta 78 makalah pada sidang paralel. Setelah melalui proses review oleh tim, panitia KNPM ke-6 telah menyusun prosiding KNPM ke- 6, yang alhamdulillah saat ini sudah dapat dituntaskan.

Kami dari pihak panitia mengucapkan banyak terima kasih kepada semua peserta yang telah mengirimkan makalah untuk diterbitkan pada prosiding konferensi, kepada Tim Reviewer dan Tim Editor yang telah membantu sehingga terbitnya prosiding ini.

Akhirnya, kami juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu kegiatan konferensi ini terutama kepada Rektor UNG, Pemerintah Provinsi Gorontalo, Pihak sponsor dan Panitia baik dari staf dosen, pegawai maupun para mahasiswa yang telah bekerja keras untuk mempersiapkan kesuksesan KNPM ke- 6 ini.

Panitia Pelaksana KNPM ke-6,

PANITIA PELAKSANA KNPM KE-6 TAHUN 2015

1. Pengarah:

Ketua : Prof. Dr. Budi Nurani (Universitas Padjadjaran)
Sekretaris : Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd (Universitas Negeri Gorontalo)
Anggota :

1. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng (Universitas Indonesia)
2. Prof. Dr. Zulkardi (Universitas Sriwijaya)
3. Prof. Dr. Tulus (USU)
4. Prof. Dr. Didi Suryadi (UPI)
5. Prof. Dr. Sarson W. Dj Pomalato, M.Pd (UNG)
6. Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd (UNG)
7. UM Malang
8. UNM Makasar
9. Unesa Surabaya

2. Pelaksana

Ketua Pelaksana	:	Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd
Wakil Ketua 1	:	Dr. Arfan Arsyad, M.Pd
Wakil Ketua 2	:	Dra. Lailany Yahya, M.Si
Wakil Ketua 3	:	Dr. Tedy Machmud, M.Pd
Sekretaris	:	Drs. Majid, M.Pd
Bendahara	:	Nursiya Bito, S. Pd, M.Pd
Wakil Bendahara	:	Rahnikmawati Hasan, A.Md

Seksi-seksi:

Seksi Sidang dan Acara	Drs. Sumarno Ismail, M.Pd Drs. Abas Kaluku, M.Si Novianita Achmad, M.Si Drs. Yus Iryanto Abas, M.Pd Agustina Mohi S.Sos Emli Rahmi, S.Pd, M.Si Sri Lestari Machmud, S.Pd, M.Si Abd. Fikri Katili Mulyadi Ondah
Seksi Makalah	Nurwan, S.Pd, M.Si. M. Yusuf, M.Si Zulfikar Hasan, S.Pd Syafrudin Kama, S.Pd.
Seksi *Reviewer Extended Abstract*	Prof. Dr. Sarson W. Dj Pomalato, M.Pd Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd. Prof. Dr. Hamzah B. Uno, M.Pd DR. Tedy Machmud, M.Pd.

Seksi Prosiding	Dr. Ali Kaku, M.Pd Drs. Pery Zakaria, M.Pd Hasan Panigoro, S.Pd, M.Si Jihad Wungguli, S.Pd, M.Si Laswi Kamali, S.T. Irvan Mustafa, S.Pd.
Seksi Akomodasi dan Transportasi	Dr. Abd. Djabar Mohidin, M.Pd. Drs. Abdul Wahab Abdullah, M.Pd Zulwardi S. Mamu, S.Pd, M.Pd Sufitro Kalapati, S.Pd.
Seksi Konsumsi	Dra. Kartin Usman, M.Pd Diana Madi, S.Pd, M.Pd Dewi Rahmawaty Isa, S.Si, M.Si Yanti, S.Pd
Seksi Publikasi dan Dokumentasi dan Pengelolaan web	Drs. Franky A. Oroh, M.Si Hasan Panigoro, S.Pd, M.Si Resmawan, S.Pd, M.Si
Seksi Perlengkapan	Khardiyawan Pauweni, S.Pd, M.Pd Dahlan Lukum, S.Pd Noldi Latada, S.Pd Ismet Mobia
Seksi Ekskursi / TOUR	Drs. Yamin Ismail, M.Pd Drs. Yus Iryanto Abas, M.Pd Salmun, S.Pd, M.Si Sitti Zakiyah, S.Pd, M.Pd
Seksi *Sponsorship* dan *Public Relation*	Drs. Abas Kaluku, M.Si Novianita Achmad, S.Si, M.Si
Design Cover dan *Layout* Prosiding	Irvan Mustafa, S.Pd

TIM REVIEWER

1. Prof. Dr. H. Sarson W. Dj Pomalato, M.Pd.	(Universitas Negeri Gorontalo)
2. Prof. Dr. Nurhayati Abbas, M.Pd.	(Universitas Negeri Gorontalo)
3. Prof. Dr. H. Hamzah B. Uno, M.Pd.	(Universitas Negeri Gorontalo)
4. DR. H. In Hi Abdullah, M.Si	(Universitas Khairun Ternate)
5. DR. H. Kodirun, M.Pd.	(Universitas Halu Oleo)
6. DR. Gelar Dwirahayu, M.Pd.	(UIN Syarif Hidayatullah Jakarta)
7. DR. Hepsi Nindiasari, M.Pd.	(Univ. Sultan Ageng Tirtayasa)
8. DR. Maria Ulpah, M.Si.	(IAIN Purwokerto)
9. DR. Achmad Mudrikah, M.Pd.	(Uninus Bandung)
10. DR. Edy Surya, M.Si.	(Universitas Negeri Medan)
11. DR. H. Ismail Zakaria, M.Si.	(Universitas Negeri Gorontalo)
12. DR. Tedy Machmud, M.Pd.	(Universitas Negeri Gorontalo)

DAFTAR MAKALAH

A. PEMAKALAH UTAMA:

1. Prof. Dr. Hans-Stefan Siller. University of Koblenz-Landau Germany. Judul Makalah: “Modelling as a big idea in mathematics – Knowlegde and views of pre-service and in-service teachers”.
2. Prof. DR. Didi Suryadi, M.Ed. SPs UPI Bandung. Judul Makalah: “Penguatan Kapasitas Pendidik Melalui Sistem Komunitas Berbasis Riset: Sebuah Upaya Rintisan Di Kota Bandung”.
3. Prof. DR. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si. Universitas Sriwijaya. Judul Makalah: “Design Research: Eksplorasi Budaya Indonesia Dan Implementasinya Dalam Pembelajaran Matematika”.
4. Prof. DR. Budi Nurani Ruchjana. Universitas Padjajaran. Judul Makalah: “Peranan Pendidikan Matematika Menghadapi Masyarakat Ekonomi Asean 2015”.
5. Prof. Dr. Sarson W. Dj. Pomalato, M.Pd. Universitas Negeri Gorontalo. Judul Makalah: “Model Based Development Of Contextual Learning Math For Improved Communication And Creativity Of Math Elementary School Students”.
6. Profesor Dr.rer nat Dedi Rosadi S.Si M.Sc. Universitas Gajah Mada. Judul Makalah: “Pengajaran Ekonometrika Dan Analisis Runtun Waktu Dengan Paket Perangkat Lunak RcmdrPlugins.SPSS”.
7. DR. Kadir, S.Pd., M.Si. Universitas Halu Oleo. Judul Makalah: “Penggunaan Masalah Pesisir Untuk Melatih Kemampuan Berpikir Matematik Siswa SMP”.

B. PEMAKALAH BIDANG:

BIDANG PENDIDIKAN MATEMATIKA

BIDANG MATEMATIKA

MODEL LOGISTIK DENGAN PEMANENAN KONSTAN TERHADAP POPULASI: FENOMENA BIFURKASI AKIBAT PEMANENAN

Hasan S. Panigoro[1]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo
Jln. Jendral Sudirman No. 6 Kota Gorontalo, hspanigoro@ung.ac.id

Abstract

Tulisan ini merupakan kajian terhadap model pertumbuhan logistik dengan pemanenan konstan pada populasi. Diperlihatkan bahwa model ini memiliki maksimum dua titik ekuilibrium dengan tipe kestabilan berbeda, dan minimum tidak memiliki titik ekuilibrium. Salah satu fenomena yang menarik pada model ini adalah terjadinya bifurkasi. Fenomena ini terjadi ketika perubahan satu atau lebih parameter pada model mengakibatkan perubahan struktur kestabilan model tersebut. Bifurkasi yang terjadi pada model ini adalah bifurkasi *saddle-node* dimana model yang mula-mula memiliki dua titik ekuilibrium dengan tipe kestabilan berbeda, kemudian setelah dilakukan variasi nilai parameter yakni parameter pemanenan, maka dua titik ekuilibrium melebur menjadi satu kemudian hilang. Dalam tulisan ini juga diperlihatkan bahwa eksistensi populasi dapat terjaga (tidak punah) apabila memenuhi syarat-syarat tertentu.

Keywords: Bifurkasi, Ekuilibrium, Logistik, Pemanenan, Populasi, *Saddle-Node*

PENDAHULUAN

Masalah populasi adalah salah satu masalah yang sangat penting mengingat masalah ini dapat mempengaruhi keadaan yang lain pada populasi tersebut. Misalkan masalah populasi manusia dalam suatu negara yang dapat mempengaruhi keadaan politik, ekonomi dan sebagainya dari populasi tersebut. Oleh karena itu masalah populasi merupakan masalah yang sangat menarik dibahas dalam bidang ilmu matematika. Salah satu metode untuk mempelajari masalah populasi yaitu dengan membuat model matematika yang sesuai dengan masalah ini. Model matematika adalah himpunan dari rumus dan atau persamaan berdasarkan fenomena nyata dan dibuat dengan harapan bisa merepresentasikan dengan baik fenomena nyata tersebut menurut ilmu yang melatarbelakanginya.

Salah satu model matematika yang mempelajari model pertumbuhan populasi adalah model logistik. Model logistik merupakan suatu persamaan diferensial yang memodelkan pertumbuhan suatu populasi. Populasi yang dimaksud adalah sekumpulan spesies yang sama yang menempati tempat tertentu. Model pertumbuhan ini mengasumsikan bahwa pertumbuhan suatu populasi bergantung pada daya dukung lingkungan seperti ruang dan makanan. Model logistik adalah salah satu model yang popular tidak hanya dalam bidang matematika, namun juga dalam bidang-bidang lainnya *(Fory's:2003)*. Model pertumbuhan logistik dibangun menggunakan kaidah logistik *(logistic law)* bahwa persediaan logistik ada batasnya, model ini mengasumsikan pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (ekuilibrium) *(Purnomo:2000)*. Model logistik pertama kali diperkenalkan oleh *Verhulst (1838, 1841, 1845, 1847)*. Dalam perkembangannya model ini kemudian dimodifikasi agar sesuai dengan kondisi populasi yang dipelajarinya. Beberapa modifikasi pada daya dukungnya dapat dilihat pada *Arugaslan (2015), Cai (2010), Juratoni (2010)*, dan *Lumi (2014)*. Selain itu, model pertumbuhan logistik juga dipelajari dalam bidang ilmu lainnya seperti model pertumbuhan ekonomi *(Cai:2010, Juratoni:2010)*, model pertumbuhan tumor *(Forry et.al:2003)*, dan sebagainya. Dalam tulisan ini dipelajari model logistik dengan perlakuan berupa pemanenan secara konstan terhadap suatu populasi. Modifikasi ini termotivasi dari kondisi bahwa dalam beberapa kasus suatu populasi seperti ikan, rumput laut dan populasi lainnya merupakan salah satu kebutuhan dari manusia sehingga manusia melakukan perburuan atau pemanenan terhadapnya. Dalam tulisan ini, diasumsikan pemanenan yang dilakukan yaitu pemanenan secara konstan sepanjang $t \geq 0$.

FORMULASI SISTEM

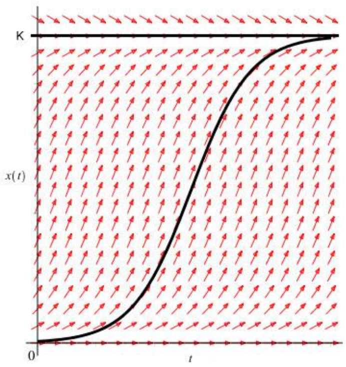
Perhatikan persamaan diferensial biasa berikut:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{1}$$

Dimana $x(t) \geq 0$ sepanjang $t \geq 0$, dan r, K bilangan real positif. $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada waktu t, r merupakan laju pertumbuhan intrinsik populasi dan K adalah daya dukungnya. Model ini memiliki solusi khusus:

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} \tag{2}$$

Model ini dikenal dengan model logistik yang mengasumsikan pertumbuhan suatu populasi dibatasi oleh daya dukungnya. Model (1) memperlihatkan bahwa eksistensi populasi akan selalu terjaga dan tumbuh secara logistik dengan jumlah awal populasi bertambah mencapai kondisi daya dukungnya *(carrying capacity)*. Potret Fase model ini dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1. Potret fase model logistik

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita melihat bahwa eksistensi populasi suatu spesies bergantung pada campur tangan manusia. Misalkan perburuan terhadap harimau, perburuan ikan paus dan hiu, dan perburuan terhadap spesies lainnya oleh manusia yang akhirnya mengancam eksistensi dari populasi itu sendiri. Dengan demikian pada paper ini diasumsikan ada perlakuan berupa pemanenan terhadap populasi pada model logistik ini. Pemanenan yang diberikan diasumsikan dilakukan secara konstan sepanjang waktu t. Dengan demikian model logistik setelah pemanenan secara kosntan menjadi:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h \tag{3}$$

Dimana h merupakan laju pemanenan secara konstan terhadap populasi. Model inilah yang dikaji pada paper ini. Kajian utama yang dipelajari adalah melihat pengaruh dari pemanenan secara konstan terhadap populasi dengan model logistik. Akan diperlihatkan bagaimana eksistensi dari populasi apabila diberikan perlakuan berupa pemanenan secara konstan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Titik Ekuilibrium

$\bar{x}$ adalah titik ekuilibrium (3) jika:

$$r\bar{x}\left(1-\frac{\bar{x}}{K}\right)-h=0\ , \tag{4}$$

atau:

$$\bar{x}^2-K\bar{x}+\frac{hK}{r}=0\ , \tag{5}$$

sehingga diperoleh:

$$\bar{x}=\frac{K\pm\sqrt{\Delta}}{2} \tag{6}$$

dimana $\Delta = K^2-\frac{4hK}{r}$. Berdasarkan kondisi biologis maka kita hanya memperhatikan solusi di daerah $\Omega \coloneqq \{x|x\geq 0, x\in\mathbb{R}\}$. Untuk selanjutnya perhatikan teorema berikut:

***Teorema 1**. Ekuilibrium dari model (3) adalah sebagai berikut:*

(i) *Model (3) tidak memiliki titik ekuilibrium di Ω jika $h>\frac{rK}{4}$ (gambar 2a).*

(ii) *Model (3) Memiliki satu titik ekuilibrium $\bar{x}_1$ di Ω jika $h=\frac{rK}{4}$, dimana $\bar{x}_1=\frac{2h}{r}$ (gambar 2b).*

(iii) *Model (3) Memiliki dua titik ekuilibrium $\bar{x}_2$ dan $\bar{x}_3$ di Ω jika $h<\frac{rK}{4}$, dimana:*

$$\bar{x}_2=\frac{K+\sqrt{\Delta}}{2}\quad dan\quad \bar{x}_3=\frac{K-\sqrt{\Delta}}{2} \tag{7}$$

(perhatikan gambar 2c)

Bukti. Perhatikan bahwa untuk $h>\frac{rK}{4}$ mengakibatkan $\Delta<0$ sehingga persamaan (4) tidak memiliki akar real sehingga model (3) tidak akan memiliki titik ekuilibrium di Ω. Selanjutnya untuk $h=\frac{rK}{4}$ mengakibatkan $\Delta=0$ sehingga persamaan (4) memiliki satu akar real yaitu $\bar{x}_1=\frac{2h}{r}$. Karena $\frac{2h}{r}>0$ maka $\bar{x}_1$ berada didaerah Ω. Untuk $h<\frac{rK}{4}$ mengakibatkan $\Delta>0$ sehingga persamaan (4) memiliki dua akar real yaitu $\bar{x}_2=\frac{K+\sqrt{\Delta}}{2}$ dan $\bar{x}_3=\frac{K-\sqrt{\Delta}}{2}$. Eksistensi $\bar{x}_2$ dan $\bar{x}_3$ di Ω dapat dilihat pada proposisi berikut:

Proposisi 1.1. *Jika $\Delta>0$ maka $\bar{x}_2,\bar{x}_3\in\Omega$ atau $\bar{x}_2,\bar{x}_3$ adalah titik ekuilibrium.*

Bukti. Karena $\Delta>0$ dan $K>0$ maka $\frac{K+\sqrt{\Delta}}{2}>0$ sehingga $\bar{x}_2\in\Omega$ atau dengan kata lain $\bar{x}_2$ adalah titik ekuilibrium model (3). Perhatikan bahwa $r,h,K>0$ sehingga $\frac{4hk}{r}>0$:

$$\begin{aligned}
-\frac{4hK}{r} &< 0\\
K^2-\frac{4hK}{r} &< K^2\\
\Delta &< K^2\\
\sqrt{\Delta} &< K\\
K-\sqrt{\Delta} &> 0\\
\frac{K-\sqrt{\Delta}}{2} &> 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian maka $\bar{x}_3\in\Omega$ atau $\bar{x}_3$ adalah titik ekuilibrium dari model (3).

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk menganalisa kestabilan titik ekuilibrium yaitu dengan melakukan pelinearan. Jika diketahui suatu persamaan diferensial biasa $\dot{x} = f(x)$ dengan titik ekuilibrium $\bar{x}$, maka pelinearan dilakukan dengan melakukan transformasi koordinat *(Wiggins:1990)*;

$$y = x - \bar{x}.$$

Hasil pelinearan akan memberikan persamaan diferensial:

$$\dot{y} = \left(\frac{r(K\bar{x}-\bar{x}^2)-hK}{K}\right) + \frac{r}{K}(K-2\bar{x})y - \frac{r}{K}y^2, \tag{8}$$

namun untuk mempelajari kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}$ maka menurut *Wiggins (1990)* kita cukup mempelajari:

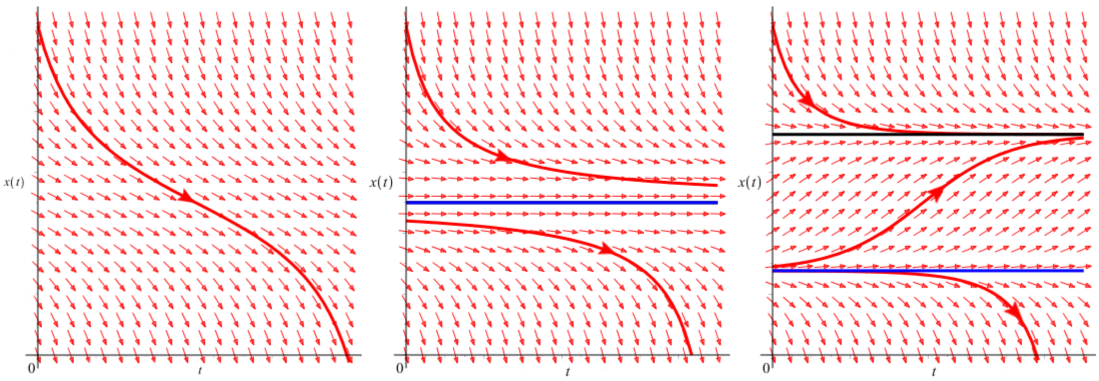
$$\dot{y} = \frac{r}{K}(K-2\bar{x})y, \tag{9}$$

Teorema 2. *Ekuilibrium (3) memiliki tipe kestabilan sebagai berikut:*

(i) *Jika* $h = \frac{rK}{4}$, *maka titik ekuilibrium* $\bar{x}_1$ *adalah titik ekuilibrium stabil.*

(ii) *Jika* $h < \frac{rK}{4}$, *maka titik ekuilibrium* $\bar{x}_2$ *adalah titik ekuilibrium stabil sedangkan titik ekuilibrium* $\bar{x}_3$ *adalah titik ekuilibrium tidak stabil.*

Bukti. Untuk $h = \frac{rK}{4}$ mengakibatkan persamaan (8) menjadi $\dot{y} = -\frac{r^2}{4h}y^2$ sehingga titik ekuilibrium $\bar{x}_1$ titik ekuilibrium stabil. Untuk $h < \frac{rK}{4}$, perhatikan persamaan (9). Agar titik ekuilibrium ini stabil, berdasarkan persamaan (9) maka $K - 2\bar{x} < 0$. Dengan demikian titik ekuilibrium stabil jika $\bar{x} > \frac{K}{2}$ dan tidak stabil jika $\bar{x} < \frac{K}{2}$. Dengan aljabar sederhana didapatkan $\bar{x}_2 = \frac{K+\sqrt{\Delta}}{2} > \frac{K}{2}$ dan $\bar{x}_3 = \frac{K-\sqrt{\Delta}}{2} < \frac{K}{2}$ sehingga $\bar{x}_2$ adalah titik ekuilibrium stabil dan $\bar{x}_3$ adalah titik ekuilbrium tidak stabil.



a) $h > \frac{rK}{4}$ **b)** $h = \frac{rK}{4}$ **c)** $h < \frac{rK}{4}$

Gambar 2. Potret fase model logistik dengan pemanenan konstan

Dari simulasi dan analisis diatas dapat di interpretasikan bahwa:

a. Untuk $h > \frac{rK}{4}$ mengakibatkan populasi pada t tertentu mencapai kepunahan.

b. Untuk $h = \frac{rK}{4}$ mengakibatkan populasi akan mengalami kepunahan apabila nilai awal $x(0) < \bar{x}_1$. Namun untuk $x(0) \geq \bar{x}_1$ maka eksistensi dari populasi tetap terjaga dengan jumlah populasi akan mendekati $\bar{x}_1$.

c. Untuk $h < \frac{rK}{4}$, jika nilai awal $0 < x(0) < \bar{x}_3$ mengakibatkan populasi akan mencapai kepunahan, dan jika $x(0) > \bar{x}_3$ mengakibatkan eksistensi populasi akan terjaga dengan jumlah populasi akan bergerak mendekati $\bar{x}_2$.

Bifurkasi Saddle-Node

Dari teorema (1), perubahan parameter pemanenan mengakibatkan perubahan jumlah titik ekuilibrium dan kestabilannya. Dapat dilihat ketika nilai pemanenan h melewati titik $\frac{rK}{4}$ mengakibatkan titik ekuilibrium di Ω dari tidak ada menjadi dua titik ekuilibrium. Hal ini mengindikasikan terjadinya bifurkasi *saddle-node*. Dalam *Kuznetsov (1998)* telah dibuktikan bahwa bentuk umum bifurkasi *saddle-node (fold)* adalah:

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3).$$

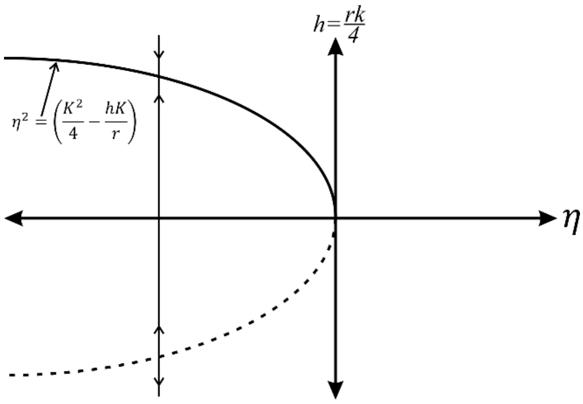
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa model (3) juga mengalami bifurkasi *saddle-node* dengan cara melakukan transformasi koordinat dan penskalaan waktu t. Misalkan $\eta = x - \frac{K}{2}$ maka:

$$\dot{\eta} = \left(\frac{rK}{4} - h\right) - \frac{r}{K}\eta^2 \tag{10}$$

Dengan melakukan penskalaan $t \to \frac{K}{r}t$ maka persamaan (10) menjadi:

$$\dot{\eta} = \left(\frac{K^2}{4} - \frac{hK}{r}\right) - \eta^2. \tag{11}$$

Karena persamaan (11) merupakan bentuk umum bifurkasi *saddle-node,* maka model (3) juga mengalami bifurkasi *saddle-node* dengan titik bifurkasinya adalah $\frac{K^2}{4} - \frac{hK}{r} = 0$ atau $h = \frac{rK}{4}$. Fenomena bifurkasi *saddle-node* dapat dilihat pada simulasi berikut:



Gambar 3. Diagram bifurkasi *saddle-node* pada model (3)

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Model logistik dengan pemanenan secara konstan adalah model yang mengalami suatu fenomena yang disebut dengan bifurkasi. Bifurkasi yang dialami oleh model ini adalah bifurkasi *saddle-node* dimana dalam model ini perubahan parameter pemanenan konstan akan mengakibatkan model yang semula memiliki dua titik ekuilibrium dengan kestabilan yang berbeda kemudian kedua titik ekuilibrium tersebut melebur menjadi satu dan selanjutnya menghilang. Bufurkasi ini terjadi ketika nilai parameter pemanenan bergerak melewati titik

$h = \frac{rK}{4}$. Eksistensi dari populasi dapat terjaga apabila $h \leq \frac{rK}{4}$ dengan nilai awalnya $x(0) > \bar{x}_3$ atau $x(0) \geq \bar{x}_1$.

Saran

Mengingat bahwa dalam beberapa kasus ternyata daya tampung mengalami perubahan, maka model ini dapat dikaji lebih lanjut dengan melakukan modifikasi pada daya dukungnya disesuaikan dengan kondisi daya dukung populasi tersebut.

DAFTAR RUJUKAN

Arugaslan, D. 2015. *Dynamics of a Harvested Logistic Type Model with Delay and Piecewise Constant Argument*. J. Nonlinear Sci. Appl. 8. pp.507-517.

Boulanouar, M. 2014. *Asynchronous Exponential Growth of a Bacterial Population. Electronic Journal of differential Equations*. Vol 2014, No.06. pp.1-12.

Cai, D. 2010. *Multiple Equilibria and Bifurcations in an Economic Growth Model with Endogenous Carrying Capacity*. International Journal of Bifurcation an Chaos. Vol.20, No.11. pp.3461-3472.

Fory's, U. Marciniak-Czochra, A. 2003. *Logistic Equation in Tumour Growth Modelling.* Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. Vol.13, No.3. pp.317–325.

Juratoni, A. & Bundau, O. 2010. *Hopf Bifurcation Analysis of The Economical Growth model with Logistic Population Growth and Delay*. Proceedings of the 21st International DAAAM Symposium, Vol.21, No.1. Viennam Austria.

Kuznetsov, Y.A. 1998. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag. New York.

Lumi, N., Ainsaar, A. and Mankin, R. 2014. *Noise-Induced Transitions in a Population Growth Model Based on Size-Dependent Carrying Capacity*. Journal of Mathematical Problems in Engineering. Volume 2014. Article ID 120624. pp.1-8.

Lynch, S. 2010. *Dynamical Systems with Applications using Maple, 2nd Edition*. Springer, New York.

Purnomo, K. D. 2000. *Model Pertumbuhan Populasi dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik*. Majalah Matematika dan Statistika, Vol.1, No.1, pp.21–29.

Verhulst, F. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg.

Verhulst, PF. 1838. *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*. Correspondance mathématique et physique 10: 113–121. Retrieved 2013-02-18.

Verhulst, PF. 1841. *Traité élémentaire des fonctions elliptiques : ouvrage destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral*. Bruxelles: Hayez. Retrieved 2013-02-18.

Verhulst, PF. 1845. *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population [Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase]*. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles 18: 1–42. Retrieved 2013-02-18.

Verhulst, PF. 1847. *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique 20: 1–32. Retrieved 2013-02-18.

Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos.* Springer-Verlag, New York.

9 772528 600000

TC DAMHIL UNG

11-14 AGUSTUS 2015