

**BARISAN HINGGA BIFURKASI PERIOD-DOUBLING  
PADA INTERAKSI NONLINEAR SEPASANG OSILATOR**

**TESIS**

**Karya Tulis sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Magister Matematika  
Institut Teknologi Bandung**

**Oleh**

**HASAN S. PANIGORO**

**NIM : 20108028**

**Program Studi Matematika**



**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**

**2011**

# ABSTRAK

## BARISAN HINGGA BIFURKASI PERIOD-DOUBLING PADA INTERAKSI NONLINEAR SEPASANG OSILATOR

Oleh

HASAN S. PANIGORO

NIM : 20108028

Pada tesis ini dipelajari sistem dinamik dari interaksi nonlinear sepasang osilator dengan perbandingan frekuensi  $1 : \varepsilon$ . Kita asumsikan bahwa ketaklinearannya kuadratik dan mempertahankan jarak. Dengan menggunakan metode perataan, kita mengkonstruksi bentuk normalnya. Secara khusus, diselidiki munculnya sejumlah bifurkasi *period-doubling* pada himpunan buka di ruang parameter.

**Kata Kunci:**

manifold center, bentuk normal, metode perataan, solusi periodik, bifurkasi *period-doubling*

## ABSTRACT

### FINITE SEQUENCES OF PERIOD-DOUBLING BIFURCATION IN COUPLED NONLINEAR OSCILATORS

By

HASAN S. PANIGORO

NIM : 20108028

In this manuscript, a dynamical system of coupled nonlinear oscillators having the frequencies with ratio  $1 : \varepsilon$ , is studied. We assume that the nonlinearity is quadratic and norm preserving. Using the averaging method, we constructed the normal form. In particular, we are interested on the existence of a number of period-doubling bifurcations in an open set of parameter values.

**Keywords:**

center manifold, normal form, averaging method, periodic solution, period-doubling bifurcation

**BARISAN HINGGA BIFURKASI PERIOD-DOUBLING  
PADA INTERAKSI NONLINEAR SEPASANG OSILATOR**

**TESIS**

**Karya Tulis sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Magister dari  
Institut Teknologi Bandung**

**Oleh**

**HASAN S. PANIGORO**

**NIM : 20108028**

**Program Studi Magister Matematika**

Telah diperiksa dan disetujui  
Bandung, September 2011  
Pembimbing Tesis

Dr. Johan Matheus Tuwankotta

NIP: 19701201 199702 1 001

**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG  
2011**

## **PEDOMAN PENGGUNAAN TESIS**

Tesis S2 yang tidak dipublikasikan terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung, dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada pengarang dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau peringkasan hanya dapat dilakukan seizin pengarang dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh tesis haruslah seizin Direktur Program Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.



*Dipersembahkan*

*untuk istriku tercinta*

***Emlia Rahmi***

*dan anakku tersayang*

***Aisyah Raihanun Panigoro***

## UCAPAN TERIMA KASIH

*Bismillahirrahmanirrahim*

Puji syukur atas kehadiran Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya, petunjuk dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada Dr. Johan Matheus Tuwankotta atas segala bimbingan dan arahan, terutama kesabarannya membimbing penulis baik dalam pengerjaan tesis ini maupun materi perkuliahan lainnya. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Dr. Wono Setya Budhi dan Dr. Agus Yodi atas kesediaannya sebagai penguji dan segala saran dan masukannya bagi penulisan tesis ini.

Tak lupa penulis mengucapkan terimakasih kepada Rektor UNG, Dekan FMIPA UNG dan Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNG yang telah memberikan izin kepada penulis untuk menempuh program S2 dan memberikan dukungan moral dan material kepada penulis selama penulis menjalani program S2. Terima kasih juga penulis ucapkan kepada seluruh staf Jurusan Pendidikan Matematika UNG. Penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada seluruh staf program studi matematika ITB baik dosen maupun karyawan atas segala bantuan selama studi Magister Matematika di ITB.

Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada rekan-rekan analisis, cicik, yusuf dan owen, dan rekan-rekan dalam sistem dinamik, erik, juli, kus, yang menjadi tempat bertanya dan berbagi. Juga kepada seluruh teman-teman S2 ITB yang tidak dapat diucapkan satu persatu, penulis mengucapkan banyak terima kasih.

Terakhir, penulis mengucapkan terima kasih kepada istriku tercinta Emli Rahmi dan anakku Aisyah Raihanun Panigoro, yang selalu memberikan dukungan moril dan spritual, memberikan semangat baru setiap harinya, sehingga pada akhirnya penulis mampu melewati studi dengan hati yang lebih tenang dan tabah.

Juga kepada kedua orang tuaku Bapak Samsudin Panigoro dan Ibu Rabia Paramata, kepada kedua mertuaku, Bapak Eddy B. Mahdjani dan Ibu Misnar, yang selalu mendukung kami sekeluarga ketika studi, baik berupa doa dan bantuan materil. Kepada saudara-saudaraku, Daud R.S. Panigoro, Zaenab S. Panigoro, dan keluarga besar Panigoro, Paramata, Mahdjani yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Bandung, September 2011

Penulis

**Hasan S. Panigoro**



## DAFTAR ISI

ABSTRAK	i
ABSTRACT	ii
PEDOMAN PENGGUNAAN TESIS	iv
UCAPAN TERIMA KASIH	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	x
<b>I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Motivasi, Rumusan Masalah dan Sistematika Pembahasan . . .	1
1.2 Hasil-Hasil Utama pada Tesis Ini . . . . .	3
<b>II SISTEM DINAMIK DAN BIFURKASI</b>	<b>4</b>
2.1 Sistem Dinamik . . . . .	4
2.2 Pelinearan . . . . .	5
2.3 Metode Manifold Center . . . . .	6
2.4 Bentuk Normal dengan Metode Perataan . . . . .	12
2.5 Bifurkasi Satu Parameter suatu Titik Ekuilibrium . . . . .	14
2.5.1 Bifurkasi <i>Saddle-Node</i> dan bifurkasi <i>Pitchfork</i> . . . . .	15
2.5.2 Bifurkasi <i>Hopf</i> . . . . .	18
2.6 Bifurkasi Satu Parameter suatu Solusi Periodik . . . . .	22
2.6.1 Bifurkasi <i>Period-Doubling (Flip)</i> . . . . .	23

<b>III INTERAKSI NONLINEAR SEPASANG OSILATOR</b>	<b>26</b>
3.1 Formulasi Sistem . . . . .	26
3.2 Manifold Ekuilibrium Sistem Tak Terperturbasi . . . . .	28
3.2.1 Manifold ekuilibrium dibidang $r = 0$ . . . . .	29
3.2.2 Manifold ekuilibrium dibidang $x = 0$ . . . . .	30
3.3 Titik-Titik Bifurkasi Sistem Tak Terperturbasi . . . . .	32
3.4 Bifurkasi Sistem Tak Terperturbasi . . . . .	35
3.4.1 Bifurkasi <i>saddle-node</i> dan <i>homoklinik</i> yang terjadi se-	
cara simultan . . . . .	35
3.4.2 Bifurkasi <i>Pitchfork</i> . . . . .	36
3.4.3 Bifurkasi <i>Saddle-Node</i> . . . . .	37
<b>IV BARISAN HINGGA BIFURKASI <i>PERIOD-DOUBLING</i></b>	<b>38</b>
4.1 Manifold Ekuilibrium Sistem Terperturbasi . . . . .	38
4.2 Bifurkasi <i>Hopf</i> pada ekuilibrium tak trivial . . . . .	40
4.3 Barisan Hingga Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> pada Sistem Terper-	
turbasi . . . . .	41
<b>V PENUTUP</b>	<b>46</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>47</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Ilustrasi $E^s$ , $E^u$ , dan $E^c$ diruang $\mathbb{R}^3$ . . . . .	7
2.2	Ilustrasi $E^s$ , $E^u$ , $E^c$ , $W^s$ , $W^u$ , dan $W^c$ diruang $\mathbb{R}^3$ . . . . .	9
2.3	Diagram Bifurkasi <i>Saddle-Node</i> . . . . .	17
2.4	Diagram Bifurkasi <i>Pitchfork</i> . . . . .	18
2.5	Bifurkasi <i>Hopf Superkritikal</i> di ruang fase $(x_1, x_2)$ . . . . .	20
2.6	Diagram Bifurkasi <i>Hopf Superkritikal</i> . . . . .	20
2.7	Bifurkasi <i>Hopf Subkritikal</i> di ruang fase $(x_1, x_2)$ . . . . .	21
2.8	Diagram Bifurkasi <i>Hopf Subkritikal</i> . . . . .	22
2.9	Pemetaan iterasi kedua disekitar bifurkasi <i>Period-Doubling</i> . . . . .	24
2.10	Diagram Tangga untuk Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> . . . . .	25
2.11	Diagram Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> di ruang- $(x, \alpha)$ . . . . .	25
3.1	Diagram nilai bagian real dari $\lambda_2$ dan $\lambda_3$ untuk $\alpha < 0$ . . . . .	30
3.2	Manifold Ekuilibrium pada Sistem (3.7) . . . . .	32
3.3	Titik-Titik Bifurkasi pada Sistem (3.7) . . . . .	33
3.4	Potret Fase dari Sistem (3.7). . . . .	35
4.1	Letak Titik Ekuilibrium Tak Trivial . . . . .	39
4.2	Barisan hingga Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> pada saat $\varepsilon = 0.015$ . . . . .	41
4.3	Cabang dari Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> di <i>Label-1</i> dan <i>Label-6</i> . . . . .	42
4.4	Plot 4 buah solusi periodik di percabangan <i>label-1</i> gambar (4.3). . . . .	43
4.5	Plot 2 buah solusi periodik lain di $\delta = 2.2$ pada barisan <i>Period-Doubling</i> . . . . .	43
4.6	Plot 3 buah solusi periodik di percabangan <i>label-6</i> gambar (4.3). . . . .	44
4.7	Barisan Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> untuk Beberapa Nilai $\varepsilon$ . . . . .	45

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Motivasi, Rumusan Masalah dan Sistematika Pembahasan

Perhatikan sistem persamaan diferensial berorde dua berikut:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_x^2 x &= f(\dot{x}, x, y, t) \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= g(\dot{x}, x, y, t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

dimana  $\omega_x$  dan  $\omega_y$  diasumsikan bilangan real positif, dan  $f$  dan  $g$  fungsi yang cukup licin. Sistem (1.1) disebut sistem osilator berpasangan yang saling berinteraksi (*Coupled Oscillator System*). Misalkan terdapat  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}$  sehingga  $\kappa_1\omega_x - \kappa_2\omega_y = 0$ , maka situasi ini disebut resonansi. Jika  $\kappa_1$  dan  $\kappa_2$  saling prima relatif dan  $\kappa_1 + \kappa_2 < 5$ , maka disebut sebagai resonansi orde rendah (biasa juga disebut resonansi kuat atau resonansi sejati). Salah satu fenomena yang dipelajari dalam sistem pasangan osilator adalah perpindahan energi antara osilator. Jika resonansinya berorde rendah, perpindahan energi akan lebih besar dibandingkan orde tinggi.

Pada tahun 2002, Crommelin [2] memodelkan permasalahan iklim yang dikenal dengan *Ultra-Low Frequency Variability* (ULFV). ULFV merupakan suatu sistem osilator berpasangan yang menyatakan interaksi antara pola aliran (*finite pattern motion*) di atmosfer (aliran udara, panas dan lainnya) dengan komponen yang lebih lambat pada sistem cuaca (laut, lautan es dan lainnya) dalam jangka waktu yang lama. Interaksi kedua dinamik tersebut terjadi di permukaan laut. Selain terjadi perpindahan air melalui penguapan

dan hujan, pada permukaan laut juga terjadi interaksi momentum dari atmosfer dengan momentum dari lautan. Unsur-unsur yang mempengaruhi interaksi ini adalah tekanan permukaan, suhu dan uap air pada suatu lapisan di atmosfer, dan komponen-komponen dengan laju horizontal pada lapisan tersebut. Parameter yang digunakan pada model ini menggambarkan pengaruh dari beberapa proses, diantaranya konveksi, proses kimiawi di permukaan tanah, bentuk awan yang menutupi suatu wilayah tertentu, radiasi sinar matahari dan lainnya yang terjadi secara lambat. Fenomena cuaca yang terjadi secara cepat seperti badai yang terjadi secara tiba-tiba diabaikan pada kasus ini.

Pada tahun 2003 dan 2004, Tuwankotta [6] [7] melakukan penelitian yang termotivasi oleh sistem ULFV yang dimodelkan oleh Crommelin [2]. Sistem ini memiliki sifat geometri dan frekuensi yang sama dengan Crommelin, dengan perbandingan frekuensi  $1 : \varepsilon$ :

$$\dot{x} = (A + \varepsilon B)x + \varepsilon F(x) \quad (1.2)$$

dengan  $x = x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4$  dan nilai eigen dari  $A$  adalah  $\lambda_{1,2} = \varepsilon\mu_1 \pm i$  dan  $\lambda_{3,4} = \varepsilon\mu_2 \pm i\varepsilon\omega$ . Salah satu kesimpulan dari penelitian tersebut yaitu energi diawetkan secara nonlinear karena memenuhi  $x \cdot F(x) = 0$ . Bentuk normal dari sistem inilah yang dipelajari dalam tesis ini, namun difokuskan pada bifurkasi satu parameter terhadap kontinuitas solusi periodik.

Sistematika pembahasan tesis ini dimulai dari teori tentang sistem dinamik yang berhubungan dengan hasil-hasil yang ada pada tesis ini, yang disajikan pada BAB II. Pada BAB III diperkenalkan dengan sistem yang diteliti dan perilaku bagian nonlinear dari sistem tersebut. Selain itu dibahas perilaku sistem ketika sistem tersebut tidak terganggu, mulai dari manifold ekuilibrium sistem, sampai bifurkasi yang terjadi pada saat sistem terganggu. Di BAB IV dibahas tentang perilaku sistem ketika sistem tersebut terganggu.

basi. Pada bab ini difokuskan pada terjadinya barisan bifurkasi *period-doubling* ketika dilakukan kontinuasi solusi periodik dengan variasi satu parameter.

## 1.2 Hasil-Hasil Utama pada Tesis Ini

Tesis ini membahas tentang sistem dinamik berdimensi-3. Sistem tersebut merupakan bentuk normal dari sistem sepasang osilator dengan interaksi nonlinear pada Tuwankotta [6] dengan perbandingan frekuensi  $1 : \varepsilon$ . Sistem ini memiliki sifat mengawetkan energi, dengan energi yang dimaksud adalah jarak ke titik asal. Pada Tuwankotta [7] ditunjukkan bahwa dengan metode perataan, akan didapatkan bentuk normal dengan dimensi ruang fase dan parameter yang lebih sederhana. Metode ini menjamin bahwa solusi yang diperoleh dari bentuk normalnya akan berdekatan dengan solusi sistem awal dalam waktu yang panjang.

Hasil utama pada tesis ini yaitu barisan bifurkasi *period-doubling* dan perilakunya pada sistem osilator dengan interaksi nonlinear. Ditunjukkan bahwa untuk nilai perturbasi  $\varepsilon \geq 0.008$ , ditemukan barisan hingga bifurkasi *period-doubling*. Ketika mengkontinuasi ekuilibrium tak trivial dengan variasi satu parameter menghasilkan bifurkasi *hopf* dan munculnya solusi periodik stabil. Solusi periodik tersebut kemudian dikontinuasi dan mengalami barisan bifurkasi *period-doubling* dan barisan ini berakhir pada solusi periodik yang tercipta pada saat terjadi bifurkasi *hopf* yang lain ketika mengkontinuasi titik ekuilibrium trivial. Ketika diberikan perturbasi yang berbeda-beda (dalam hal ini untuk nilai  $\varepsilon \geq 0.008$ , barisan bifurkasi *period-doubling* tersebut tetap ada dan bukan merupakan barisan tak hingga, sehingga mengindikasikan bahwa tidak mungkin terjadi *chaos* pada sistem ini, setidaknya untuk nilai perturbasi diatas. Analisa bifurkasi ini dibantu AUTO-07P dengan nilai-nilai parameter yang mengacu pada penelitian Tuwankotta [6]. Untuk menggambarkan diagram bifurkasi dan potret fase digunakan *pyplaut* yang ada di AUTO tersebut.

## BAB II

### SISTEM DINAMIK DAN BIFURKASI

#### 2.1 Sistem Dinamik

Pandang suatu persamaan diferensial biasa:

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

dengan  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  adalah fungsi  $C^r$ . Solusi dari sistem (2.1) adalah suatu kurva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  yang memenuhi  $\frac{d\gamma}{dt} = F(\gamma(t))$  untuk setiap  $t \in \mathbb{R}$ . Ruang variabel bebas pada sistem dinamik biasanya dinyatakan sebagai waktu, sedangkan ruang variabel terikat di  $\mathbb{R}^n$  pada sistem (2.1) sering disebut dengan ruang fase. Kurva  $\gamma$  diatas disebut dengan orbit, sedangkan kumpulan dari orbit-orbit pada ruang fase disebut dengan potret fase.

Sistem yang berbentuk seperti pada persamaan (2.1) disebut sistem *autonomous* atau sistem yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu. Apabila sistem bergantung secara eksplisit terhadap waktu, maka sistem itu disebut dengan sistem *nonautonomous*. Salah satu solusi dari sistem (2.1) adalah titik ekuilibrium.

$\bar{x}$  dikatakan titik ekuilibrium dari sistem (2.1) jika:

$$f(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{untuk setiap } t \in \mathbb{R}.$$

Jika suatu sistem memiliki tak berhingga banyak solusi ekuilibrium dan solusi-solusi ekuilibrium tersebut membentuk kurva di ruang fasenya, maka kurva ini disebut dengan manifold ekuilibrium.

Perhatian definisi kestabilan berikut.

**Definisi 2.1.** Titik ekuilibrium  $\bar{x}(t)$  dikatakan *stabil liapunov* jika, untuk  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sehingga untuk setiap solusi  $y(t)$  dari (2.1) yang memenuhi  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$  berakibat  $|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon$  untuk  $t > t_0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Definisi 2.2.** Titik ekuilibrium  $\bar{x}(t)$  dikatakan *stabil asimtotik* jika memenuhi definisi (2.1) dan jika terdapat  $b \in \mathbb{R}^+$  sehingga jika  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$  berakibat  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$ .

## 2.2 Pelinearan

Untuk menganalisa sistem (2.1), langkah yang paling mudah adalah dengan melakukan pelinearan disekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Misalkan:

$$x = \bar{x}(t) + y. \quad (2.2)$$

Substitusi (2.2) ke (2.1), kemudian lakukan ekspansi *Taylor* pada  $f(x)$  disekitar  $\bar{x}(t)$  sehingga didapatkan:

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2), \quad (2.3)$$

dimana  $Df$  adalah turunan dari  $f$  terhadap  $x$  dan  $|\cdot|$  adalah *norm* di  $\mathbb{R}^n$ . Karena  $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t))$ , maka:

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2). \quad (2.4)$$

Jika  $T = Df(\bar{x}(t))$ , maka sistem (2.4) dapat dituliskan menjadi:

$$\dot{y} = Ty + \mathcal{O}(|y|^2). \quad (2.5)$$

Perhatikan teorema berikut:



**Teorema 2.1.** *Misalkan matriks  $T$  pada (2.5) semua nilai eigennya bernilai negatif, maka titik ekuilibrium  $x = \bar{x}$  stabil asimtotik.*

*Untuk pembuktiannya lihat Wiggins [9] halaman 8.*

Dengan demikian, untuk mempelajari dinamik disekitar titik ekuilibrium dari sistem (2.1), kita cukup mempelajari bagian linear dari (2.5) yaitu:

$$\dot{y} = Ty, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

Lebih lanjut, ketika sistem tersebut memiliki titik ekuilibrium tidak hiperbolik, maka kita tidak dapat menganalisa dinamik sistem ini dengan menggunakan pelinearan saja.

**Definisi 2.3.** Misalkan  $x = \bar{x}$  titik ekuilibrium dari persamaan (2.1).  $\bar{x}$  dikatakan titik ekuilibrium *hiperbolik* jika bagian real dari nilai eigen  $Df(\bar{x})$  tidak bernilai nol dan dikatakan titik ekuilibrium *tidak hiperbolik* jika bagian real dari nilai eigen  $Df(\bar{x})$  ada yang bernilai nol.

Untuk menganalisa perilaku disekitar titik ekuilibrium yang tidak hiperbolik dapat dilakukan dengan metode manifold center. Metode ini juga dapat digunakan untuk menganalisa perubahan struktur orbit pada sistem yang bergantung pada parameter.

### 2.3 Metode Manifold Center

Secara umum, persamaan (2.5) dapat dituliskan:

$$\dot{y} = Ty + F(y), \quad (2.7)$$

dengan  $y \in \mathbb{R}^n$ , dan  $f$  adalah fungsi  $C^r$  (dengan  $r \geq 2$ ). Diketahui matriks  $T$  adalah matriks konstan ( $T = Df(\bar{x})$ ) yang memiliki nilai-nilai eigen:

1.  $(e_1, \dots, e_s)$  adalah  $s$  buah nilai eigen dengan bagian real negatif,
2.  $(e_{s+1}, \dots, e_{s+u})$  adalah  $u$  buah nilai eigen dengan bagian real positif, dan
3.  $(e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c})$  adalah  $c$  buah nilai eigen dengan bagian real nol,

dengan subruang eigen:

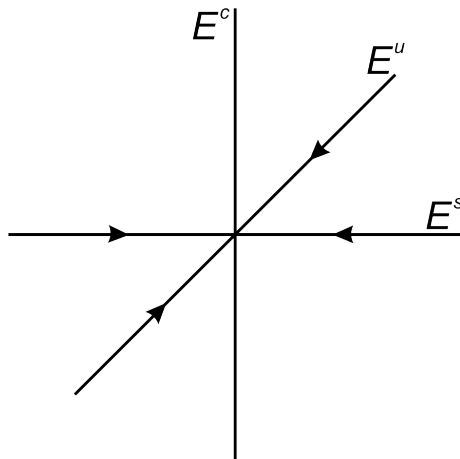
$$E^s = \text{span}\{e_1, \dots, e_s\}, \text{ disebut subruang stabil (stable),}$$

$$E^u = \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}, \text{ disebut subruang tidak stabil (unstable), dan}$$

$$E^c = \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}, \text{ disebut subruang center (center),}$$

dengan  $s+u+c = n$ . Subruang-subruang ini berkorespondensi dengan vektor-vektor eigen  $(v_1, \dots, v_s)$ ,  $(v_{s+1}, \dots, v_{s+u})$ , dan  $(v_{s+u+1}, \dots, v_{s+u+c})$ .

Perhatikan ilustrasi pada gambar (2.1). Orbit pada  $E^s$  akan menuju ke titik ekuilibrium pada saat  $t \rightarrow \infty$ , sedangkan orbit pada  $E^u$  akan menjauh dari titik ekuilibrium menuju tak hingga pada saat  $t \rightarrow \infty$ .



**Gambar 2.1:** Ilustrasi  $E^s$ ,  $E^u$ , dan  $E^c$  diruang  $\mathbb{R}^3$

Untuk mendapatkan bentuk yang lebih "sederhana", dilakukan transformasi linear  $y = Pz$  ke (2.7), dengan  $P$  terdiri atas vektor-vektor eigen dari  $T$ . Apabila matriks  $T$  merupakan matriks *invertible*, maka kita akan memiliki sistem dengan bagian linear hasil transformasi merupakan matriks diagonal,

dan apabila matriks  $T$  merupakan matriks *singular*, kita akan mendapatkan bentuk normal *jordan* pada bagian linearnya. Dengan demikian didapatkan:

$$\dot{z} = Jz + F(z) \quad (2.8)$$

dengan  $J = P^{-1}TP$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  dan  $F$  fungsi  $C^r$  ( $r \geq 2$ ). Sistem (2.8) dapat dituliskan:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} z + F(z), \quad (2.9)$$

dengan  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $F(z)$  adalah fungsi  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) dan:

- A matriks  $s \times s$  dengan nilai eigen yang bagian realnya nol,
- B matriks  $c \times c$  dengan nilai eigen yang bagian realnya negatif,
- C matriks  $u \times u$  dengan nilai eigen yang bagian realnya positif,

dimana  $s + u + c = n$ .

**Definisi 2.4.** Perhatikan kembali sistem (2.1). Misalkan  $\mathcal{S}$  adalah sebuah himpunan di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ , maka  $\mathcal{S}$  dikatakan *invariant* terhadap sistem  $\dot{x} = f(x)$  jika untuk setiap  $x_0 \in \mathcal{S}$  mengakibatkan  $x(t, 0, x_0) \in \mathcal{S}$  untuk setiap  $t \in \mathbb{R}$ .

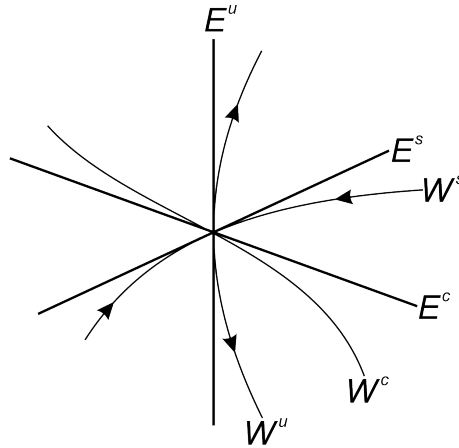
**Definisi 2.5.** Sebuah himpunan  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  dikatakan  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) *manifold invariant* jika  $\mathcal{S}$  memiliki struktur dari  $C^r$  manifold yang terdiferensialkan.

**Teorema 2.2.** Perhatikan persamaan (2.9). Misalkan  $F(z)$  adalah fungsi  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) di  $\mathbb{R}^n$ .  $E^s, E^u$ , dan  $E^c$  masing-masing adalah subruang eigen stabil, tidak stabil dan center. Maka terdapat  $C^r$  manifold invariant stabil dan tidak stabil  $W^s$  dan  $W^u$  yang menyinggung  $E^s$  dan  $E^u$  di titik ekuilibrium, dan  $C^{r-1}$  manifold center  $W^c$  yang menyinggung  $E^c$  di titik ekuilibrium. Manifold

$W^s, W^u$ , dan  $W^c$  invarian terhadap flow dari  $F(z)$ . Manifold stabil  $W^s$  dan tidak stabil ( $W^u$ ) tunggal, tetapi belum tentu untuk manifold center  $W^c$ .

Pembuktiannya dapat dilihat di Kelley [4].

Sebagai ilustrasi dari teorem (2.2), perhatikan gambar (2.2).



**Gambar 2.2:** Ilustrasi  $E^s, E^u, E^c, W^s, W^u$ , dan  $W^c$  diruang  $\mathbb{R}^3$

Ketika berhadapan dengan sistem yang memiliki nilai eigen nol, kita tidak dapat menganalisa kestabilan dengan hanya melihat bagian linearnya saja. Untuk mengamati sistem seperti ini, kita harus memperhatikan bagian non-linearinya juga. Misalkan  $E^u = \emptyset$ , maka setiap orbit akan menuju ke  $E^c$ . Dengan demikian, untuk mempelajari saat  $t \rightarrow \infty$ , kita cukup menganalisa sistem yang dibatasi oleh  $E^c$ . Dengan demikian, sistem (2.9) dapat dituliskan sebagai sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$x = Ax + f(x, y), \quad (2.10)$$

$$y = By + g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^c,$$

dimana:

$$f(0, 0) = 0, \quad Df(0, 0) = 0, \quad (2.11)$$

$$g(0, 0) = 0, \quad Dg(0, 0) = 0,$$

dengan  $A$  matriks  $c \times c$  dengan nilai eigen tidak hiperbolik,  $B$  matriks  $s \times s$  dengan nilai eigen hiperbolik negatif, dimana  $f$  dan  $g$  adalah fungsi  $C^r$  ( $r \geq 2$ ).

**Definisi 2.6.** Sebuah manifold invarian dikatakan *manifold center* untuk (2.10) jika secara lokal bisa direpresentasikan sebagai:

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

untuk  $\delta$  yang cukup kecil.

Kondisi  $h(0) = 0$  dan  $Dh(0) = 0$  menyiratkan bahwa  $W^c(0)$  menyinggung  $E^c$  di  $(x, y) = (0, 0)$ . Perhatikan dua teorema berikut:

**Teorema 2.3.** *Terdapat  $C^r$  manifold center untuk (2.10). Dinamik dari (2.10) dibatasi oleh manifold center itu untuk  $u$  yang cukup kecil:*

$$\dot{u} = Au + f(f, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^c \quad (2.12)$$

*Bukti: lihat Carr [1].*

Teorema (2.3) menyatakan tentang keberadaan manifold center, sedangkan teorema berikut menyatakan bahwa kita dapat menganalisa dinamik dari (2.10) disekitar  $(x, y) = (0, 0)$  dengan melihat dinamik dari (2.12) disekitar  $u = 0$ .

**Teorema 2.4.** *(i) Jika solusi nol dari (2.12) stabil (atau stabil asimtotik) maka solusi nol dari (2.10) juga stabil (atau stabil asimtotik). Demikian sebaliknya untuk solusi nol dari (2.12) yang tidak stabil.*

*(ii) Jika solusi nol dari (2.12) stabil, maka jika  $(x(t), y(t))$  adalah solusi dari (2.10) dengan  $(x(0), y(0))$  cukup kecil, terdapat solusi  $u(t)$  dari (2.12)*

sehingga untuk  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \\y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),\end{aligned}$$

dengan  $\gamma > 0$  suatu konstanta.

*Bukti: lihat Carr [1].*

Dengan demikian kita dapat mereduksi dimensi  $\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$  menjadi  $\mathbb{R}^c$  sehingga lebih mempermudah kita dalam mempelajari sistem tersebut. Selanjutnya, akan diturunkan persamaan  $h(x)$  yang harus dipenuhi sehingga dapat kita menggambarkan manifold center dari (2.10). Misalnya kita memiliki persamaan manifold center:

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}, \quad (2.13)$$

untuk  $\delta$  yang cukup kecil. Dengan menggunakan invarian dari  $W^c(0)$  terhadap dinamik (2.10), kita dapat menurunkan persamaan diferensial parsial yang harus dipenuhi oleh  $h(x)$ . Langkah-langkah penurunan sebagai berikut:

1. Setiap titik koordinat  $(x, y)$  di  $W^c(0)$  harus memenuhi:

$$y = h(x). \quad (2.14)$$

2. Selanjutnya adalah menurunkan (2.14) terhadap waktu. Hal ini menyatakan bahwa sehingga titik koordinat  $(\dot{x}, \dot{y})$  di  $W^c(0)$  harus memenuhi:

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (2.15)$$

3. Setiap titik di  $W^c(0)$  harus sesuai dinamik dari (2.10). Dengan demikian,

kita substitusi:

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)), \quad (2.16)$$

$$\dot{y} = Bh(x) + g(x, h(x)), \quad (2.17)$$

ke persamaan (2.15) sehingga diperoleh:

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x)), \quad (2.18)$$

atau:

$$\mathcal{N}(h(x)) \equiv Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) + g(x, h(x)) = 0. \quad (2.19)$$

## 2.4 Bentuk Normal dengan Metode Perataan

Agar mempermudah menganalisa sistem dengan bagian nonlinear yang berorde tinggi, dilakukan penormalan terhadap sistem. Penormalan pada sistem tersebut dilakukan dengan harapan kita dapat membuang sebanyak mungkin suku-suku nonlinear namun secara kualitatif dinamik sistem semula dapat dipertahankan. Bentuk normal yang dibahas kali ini adalah penormalan dengan metode perataan (*averaging method*).

### Bentuk Standar *Lagrange*

Untuk  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , pandang masalah nilai awal:

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.20)$$

dimana,  $A(t)$  merupakan  $n \times n$  matriks kontinu sedangkan  $g(t, x)$  adalah fungsi yang terdiferensialkan terhadap  $t$  dan  $x$ . Ketika sistem tidak terperturbasi

( $\varepsilon = 0$ ), sistem (2.20) merupakan sistem yang linear dan memiliki solusi:

$$x = \Phi(t)y, \quad (2.21)$$

dengan  $\Phi(t)y$  merupakan matriks fundamental dari sistem (2.20) dan  $y$  merupakan vektor konstan. Substitusi (2.21) ke (2.20) sehingga didapatkan:

$$\dot{\Phi}y + \Phi\dot{y} = A\Phi y + \varepsilon g(t, \Phi y),$$

$$\Phi\dot{y} = \varepsilon g(t, \Phi y),$$

$$\dot{y} = \varepsilon \Phi^{-1}g(t, \Phi y).$$

Dari (2.21), didapatkan nilai awal:

$$x(0) = \Phi(0)y(0),$$

$$y(0) = \Phi^{-1}(0)x(0).$$

Bentuk  $\dot{y} = \varepsilon f(t, y)$  dengan  $f(t, y) = \Phi^{-1}g(t, \Phi y)$  ini disebut bentuk standar *lagrange*.

### **Metode Perataan pada Kasus Periodik**

Diberikan sistem:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.22)$$

dengan  $f(t, x)$  fungsi periodik (dalam  $t$ ) dengan periode  $T$  dan fungsi  $g$  kontinu *Lipschitz* terhadap  $x$  untuk  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  dan  $D$  merupakan suatu domain terbatas. Bentuk (2.22) diatas merupakan perumuman dari bentuk standar *lagrange* di atas.



Pandang suatu persamaan dan nilai awal untuk perataan berikut:

$$\dot{y} = \varepsilon f^\circ(y), y(0) = x_0 \quad (2.23)$$

dengan  $f^\circ(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , merupakan rata-rata dari sistem (2.22) pada selang  $[0, T]$ .

Syarat-syarat yang harus dipenuhi agar solusi dari sistem (2.23) merupakan solusi hampiran dari solusi sistem (2.22) disajikan dalam teorema berikut ini.

**Teorema 2.5. (*Sanders dan Verhulst (1985) dan Verhulst (1996)*)**

Misalkan diberikan masalah nilai awal (2.22) dan (2.23) dengan  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , dan  $D$  suatu domain yang terbatas. Misalkan:

1. fungsi vektor  $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}$  terdefinisi, kontinu dan terbatas oleh konstanta  $M$  (independen terhadap  $\varepsilon$ ) pada  $[0, \infty) \times D$ ;
2. fungsi  $g$  kontinu Lipschitz terhadap  $x$  untuk  $x \in D$ ;
3.  $f(t, x)$  periodik dalam  $t$  dengan periode  $T$  dengan rata-rata  $f^\circ(x)$ , dengan  $T$  konstan dan independen terhadap  $\varepsilon$ ;
4.  $y(t)$  termuat dalam interior dari  $D$ ,

maka  $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$  pada skala waktu  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Teorema ini menjamin solusi dari persamaan (2.22) dan (2.23) akan saling berdekatan pada skala waktu  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Pembuktian Teorema ini ada di Verhulst [8] halaman 141.

## 2.5 Bifurkasi Satu Parameter suatu Titik Ekuilibrium

Perhatikan persamaan diferensial yang bergantung pada parameter berikut:

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (2.24)$$

dimana  $g$  adalah fungsi  $C^r$  dan besar dari  $r$  akan disesuaikan sesuai ekspansi Taylor (2.24) pada pelinearan. Misalkan (2.24) memiliki titik ekuilibrium di  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$  sehingga  $g(y_0, \lambda_0) = 0$ . Untuk melihat kestabilan dari titik ekuilibrium, seperti pada pembahasan sebelumnya hal yang paling mudah dilakukan yaitu dengan pelinearan. Dengan melakukan pelinearan, kita akan mendapatkan bagian linear sistem:

$$\dot{\xi} = D_y g(y_0, \lambda_0) \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

Jika titik ekuilibrium tersebut hiperbolik, maka titik ekuilibrium akan stabil struktural. Hal ini berarti dengan merubah sedikit  $\lambda$  tidak akan merubah kestabilan dari titik ekuilibrium tersebut. Lain halnya apabila titik ekuilibrium tersebut tidak hiperbolik (sistem (2.25) memiliki nilai eigen yang terletak di sumbu imajiner). Apabila  $\lambda$  berubah sedikitpun, maka akan terjadi perubahan dinamik dari sistem tersebut. Kondisi perubahan struktur orbit ketika  $\lambda$  divariasikan inilah yang disebut dengan bifurkasi.

**Definisi 2.7.** Sebuah titik ekuilibrium  $(y, \lambda) = (0, 0)$  dari sistem yang berdimensi satu dan memiliki satu parameter dikatakan mengalami bifurkasi di  $\lambda = 0$  jika orbit ketika  $\lambda \neq 0$  secara kualitatif tidak sama dengan orbit pada saat  $\lambda = 0$  disekitar  $x = 0$ .

### 2.5.1 Bifurkasi *Saddle-Node* dan bifurkasi *Pitchfork*

Misalkan  $D_y g(y_0, \lambda_0)$  memiliki satu nilai eigen nol dengan nilai eigen yang lain memiliki bagian real tidak nol, maka struktur orbit disekitar  $(y_0, \lambda_0)$  ditentukan oleh persamaan manifold center berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad (2.26)$$

dimana  $\mu = \lambda - \lambda_0$ . Persamaan ini harus memenuhi:

$$f(0, 0) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (2.28)$$

Persamaan (2.27) menunjukkan bahwa  $(x, \mu) = (0, 0)$  merupakan titik ekuilibrium dari persamaan (2.26) sedangkan persamaan (2.28) menunjukkan bahwa titik ekuilibrium tersebut memiliki nilai eigen nol. Perhatikan dua contoh berikut yang menunjukkan terjadinya bifurkasi *saddle-node* dan bifurkasi *pitch-fork*. Kedua bifurkasi tersebut merupakan bifurkasi satu parameter, dimana apabila terdapat lebih dari satu parameter, maka nilai parameter yang lain tersebut ditetapkan.

### **Bifurkasi *saddle-node***

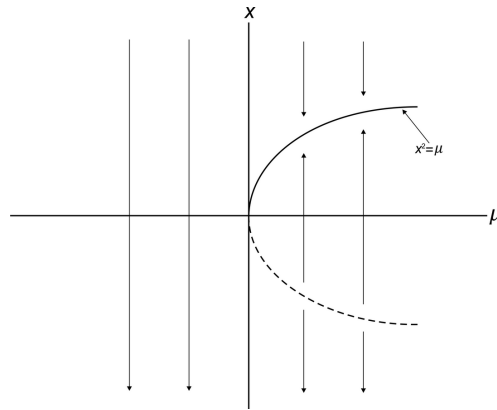
Pandang persamaan diferensial berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1. \quad (2.29)$$

Perhatikan bahwa (2.27) dan (2.28) dipenuhi oleh (2.29). Selain itu kita dapat mendefinisikan manifold ekuilibrium dari persamaan (2.29) yaitu:

$$x^2 = \mu. \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) merepresentasikan suatu parabola di bidang  $(\mu, x)$  Perhatikan gambar (2.3).



**Gambar 2.3:** Diagram bifurkasi *saddle-node*. Disaat  $\mu < 0$ , sistem (2.29) tidak memiliki titik ekuilibrium. Ketika  $\mu > 0$ , akan muncul dua titik ekuilibrium baru yang saling berbeda kestabilan

Dari gambar (2.3) dapat kita lihat bahwa ketika  $\mu < 0$ , persamaan (2.29) tidak memiliki titik ekuilibrium. Namun setelah melewati titik bifurkasi yaitu pada saat  $\mu > 0$ , persamaan (2.29) memiliki dua titik ekuilibrium, dengan satu ekuilibrium stabil (yang ditandai dengan cabang utuh pada parabola) dan ekuilibrium yang lain yang tidak stabil (yang ditandai dengan cabang yang putus-putus pada parabola). Kondisi seperti ini dinamakan dengan bifurkasi *saddle-node*.

### Bifurkasi *Pitchfork*

Pandang persamaan diferensial berikut:

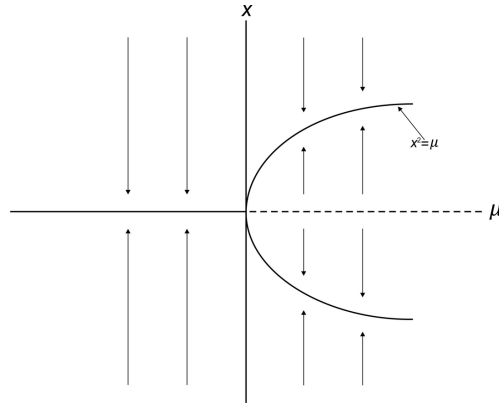
$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1. \quad (2.31)$$

Perhatikan bahwa (2.27) dan (2.28) dipenuhi oleh (2.31). Selain itu kita dapat mendefinisikan manifold ekuilibrium dari persamaan (2.31) yaitu:

$$x = 0, \quad \text{dan} \quad (2.32)$$

$$x^2 = \mu. \quad (2.33)$$

Ilustrasi dari persamaan (2.31) ditunjukkan oleh gambar (2.4).



**Gambar 2.4:** Diagram bifurkasi *pitchfork*. Disaat  $\mu < 0$ , sistem (2.31) memiliki satu titik ekuilibrium stabil di  $x = 0$ . Ketika  $\mu > 0$ , Titik ekuilibrium tersebut berubah menjadi tidak stabil dibarengi dengan munculnya dua titik ekuilibrium baru yang bersifat stabil

Dari gambar (2.4) dapat kita lihat bahwa ketika  $\mu < 0$  terdapat satu titik ekuilibrium stabil  $x = 0$  pada sistem (2.31). Namun ketika  $\mu > 0$ , titik ekuilibrium di  $x = 0$  berubah kestabilannya dari stabil menjadi tidak stabil. Bersamaan dengan itu, muncul dua titik ekuilibrium yang baru dimana kedua titik ekuilibrium tersebut bersifat stabil. Fenomena seperti ini dinamakan dengan bifurkasi *pitchfork*.

## 2.5.2 Bifurkasi *Hopf*

Pandang sistem persamaan diferensial di  $\mathbb{R}^2$  berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Sistem (2.34) memiliki titik ekuilibrium  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , dengan matriks *jacobian*:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

dengan nilai eigen  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ . Kita definisikan variabel kompleks  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ ,  $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$ . Variabel ini memenuhi persamaan diferensial:

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Dengan demikian kita dapat menuliskan kembali sistem (2.34) dalam bentuk kompleks:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 \quad (2.35)$$

Kemudian agar dapat mengamati dinamik dari persamaan (2.34), kita transformasi persamaan (2.35) ke bentuk polar dengan transformasi:

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{i\varphi}, \\ \dot{z} &= \dot{\rho} e^{i\varphi} + \rho i \dot{\varphi} e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

sehingga:

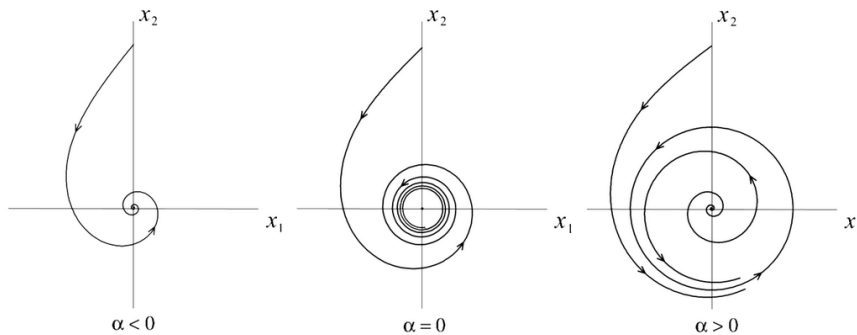
$$\dot{\rho} e^{i\varphi} + \rho i \dot{\varphi} e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi} (\alpha + i - \rho^2),$$

yang memberikan bentuk polar:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

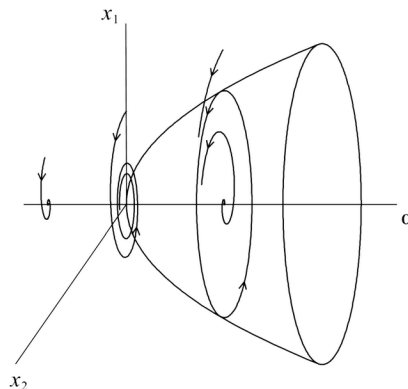
Bifurkasi yang terjadi ketika melewati titik  $\alpha = 0$  akan lebih mudah dianalisis menggunakan bentuk polar, karena persamaan untuk  $\rho$  dan  $\varphi$  pada (2.36) akan saling bebas. Ketika  $\alpha < 0$ , sistem (2.36) memiliki satu titik ekuilibrium di  $\rho = 0$ . Titik ekuilibrium tersebut bersifat stabil asimtotik. Ketika  $\alpha = 0$  sistem (2.36) juga memiliki satu titik ekuilibrium di  $\rho = 0$ , dengan titik

ekuilibriumnya bersifat stabil, dimana solusi bergerak lambat ketika mendekati titik ekuilibrium tersebut. Ketika  $\alpha > 0$ , akan ada dua titik ekuilibrium yaitu titik ( $\rho = 0$ ) dan *limit cycle* dengan radius ( $\rho^2 = \alpha$ ). Titik ekuilibrium trivial bersifat tidak stabil, sedangkan *limit cycle* bersifat stabil. Semua orbit yang berada didalam *limit cycle* (kecuali titik ekuilibrium trivial) akan menjauhi ekuilibrium trivial dan akan mendekati *limit cycle*, sedangkan semua orbit yang berada diluar *limit cycle* akan bergerak mendekati *limit cycle*. Kondisi seperti ini dinamakan dengan Bifurkasi *Hopf Superkritisal*. Ilustrasi bifurkasi sistem (2.34) pada ruang fase ( $x_1, x_2$ ) dapat dilihat pada gambar (2.5).



**Gambar 2.5:** Bifurkasi *Hopf Superkritisal* di ruang fase ( $x_1, x_2$ )

Selain itu, bifurkasi ini juga dapat di ilustrasikan di ruang fase-parameter ( $x_1, x_2, \alpha$ ) (lihat gambar (2.6)). Dari diagram bifurkasi ini, keluarga *Limit cycle* ketika  $\alpha > 0$  berbentuk sebuah permukaan *paraboloid*.



**Gambar 2.6:** Diagram Bifurkasi *Hopf Superkritisal*

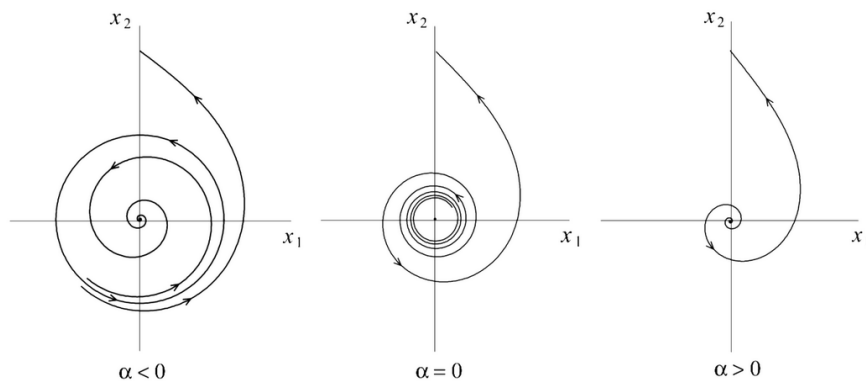
Perhatikan jika kita memiliki sistem yang berlainan tanda dengan sistem (2.34) yang didefinisikan:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Dengan cara yang sama, kita dapat mentransformasi sistem (2.37) ke bentuk polar:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\alpha + \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}\tag{2.38}$$

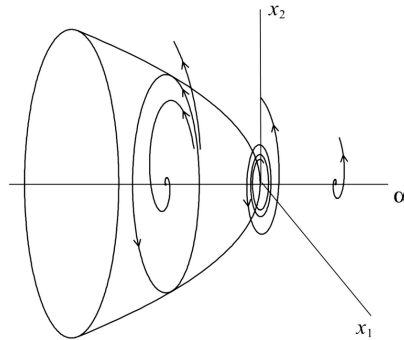
Berkebalikan dengan sistem (2.36), ketika  $\alpha < 0$  sistem (2.38) akan memberikan *limit cycle* yang tidak stabil, dengan titik ekuilibrium trivial yang stabil. Ketika  $\alpha = 0$ , kita hanya akan memiliki satu titik ekuilibrium trivial tidak stabil dimana orbit yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium tersebut akan bergerak lambat menjauhi titik ekuilibrium. Kemudian ketika  $\alpha > 0$ , kita tetap akan memiliki satu titik ekuilibrium, namun semua orbit bergerak cepat menjauhi titik ekuilibrium tersebut. Kondisi ini disebut dengan bifurkasi *hopf subkritisal*, dengan ilustrasinya dapat dilihat pada gambar (2.7).



**Gambar 2.7:** Bifurkasi *Hopf Subkritisal* di ruang fase  $(x_1, x_2)$



Bifurkasi ini juga dapat di ilustrasikan di ruang fase-parameter  $(x_1, x_2, \alpha)$  (lihat gambar (2.8)). Keluarga *Limit cycle* ketika  $\alpha < 0$  berbentuk sebuah permukaan *paraboloid*.



**Gambar 2.8:** Diagram Bifurkasi Hopf Subkritis

Kita telah melihat bahwa ada dua tipe dari bifurkasi *hopf*. Bifurkasi pada sistem (2.34) dinamakan *superkritisal* karena *limit cycle* yang muncul setelah melewati titik bifurkasi ( $\alpha > 0$ ) bersifat stabil, sedangkan pada bifurkasi pada sistem (2.37) dinamakan *subkritisal* karena *limit cycle* yang muncul sebelum melewati titik bifurkasi ( $\alpha < 0$ ) bersifat tidak stabil.

## 2.6 Bifurkasi Satu Parameter suatu Solusi Periodik

Pada pembahasan sebelumnya untuk melihat fenomena bifurkasi yang terjadi, kita melihat pergerakan titik ekuilibrium ketika suatu parameter divariasikan. Selain mengamati perilaku titik ekuilibrium, hal lain yang dapat diamati yaitu perilaku solusi periodik ketika suatu parameter divariasikan. Kontinuasi solusi periodik pada dasarnya sama dengan kontinuasi titik ekuilibrium. Pada irisan *Poincaré*, suatu solusi periodik digambarkan sebagai sebuah titik pada irisan tersebut, sehingga ketika dikontinuasi solusi-solusi periodik tersebut dianggap sebagai kontinuasi titik-titik pada irisan *Poincaré*. Oleh karena itu, kontinuasi solusi periodik pada sistem kontinu dapat dianggap pemetaan pada irisan *Poincaré*.

Pandang suatu sistem dinamik diskrit yang bergantung pada parameter:

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad (2.39)$$

dimana pemetaan  $f$  cukup licin. Misalkan  $x = x_0$  adalah titik tetap untuk  $\alpha = \alpha_0$ . Jika titik tetap tersebut memiliki nilai eigen  $D_x f(x_0, \alpha_0) \neq |1|$ , maka titik tetap tersebut dinamakan titik tetap hiperbolik, sedangkan jika titik tetap tersebut memiliki nilai eigen  $D_x f(x_0, \alpha_0) = |1|$  maka titik tetap tersebut dinamakan dengan titik tetap tidak hiperbolik. Dengan demikian ada tiga cara sehingga titik tetap tidak hiperbolik dapat dipenuhi yaitu:

1.  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  memiliki nilai eigen 1 dan  $n - 1$  nilai eigen lainnya yang modulusnya bukan 1.
2.  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  memiliki nilai eigen -1 dan  $n - 1$  nilai eigen lainnya yang modulusnya bukan 1.
3.  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  memiliki sepasang nilai eigen saling konjugat yang modulusnya 1 dan  $n - 2$  nilai eigen lainnya yang modulusnya bukan 1.

Titik tetap tidak hiperbolik merupakan titik tetap yang tidak stabil secara struktural. Dengan merubah sedikit nilai parameter akan mengakibatkan perubahan dinamik dari sistem tersebut disekitar titik tetapnya. Hal inilah yang mengakibatkan terjadinya bifurkasi disekitar titik tetap tersebut ketika parameter divariasikan.

### 2.6.1 Bifurkasi *Period-Doubling (Flip)*

Pandang suatu sistem dinamik diskrit di  $\mathbb{R}^1$  yang bergantung pada satu parameter berikut:

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 = f(x, \alpha) = f_\alpha(x) \quad (2.40)$$

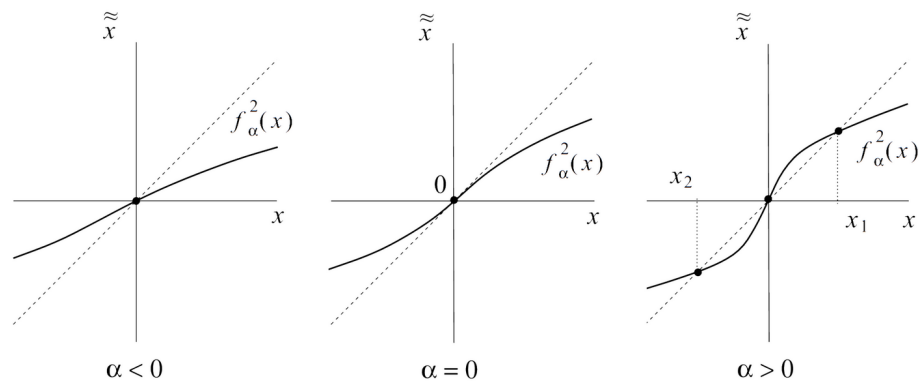
Pemetaan  $f_\alpha$  *invertible* untuk  $|\alpha|$  yang cukup kecil disekitar titik tetapnya. Sistem (2.40) memiliki titik tetap  $x_0 = 0$  untuk semua  $\alpha$  dengan nilai eigen  $D_x f(0,0) = -(1 + \alpha)$ . Saat  $\alpha < 0$  titik tetap tersebut stabil dan pada saat  $\alpha > 0$  titik tetap tersebut tidak stabil. Pada saat  $\alpha = 0$ , titik tetap tersebut tidak hiperbolik dengan nilai eigen  $D_x f(0,0) = -1$ . Tidak ada titik tetap lain disekitar  $x = 0$  untuk  $|\alpha|$  kecil.

Perhatikan iterasi kedua  $f_\alpha^2(x)$  dari pemetaan (2.40). Jika  $y = f_\alpha(x)$ , maka:

$$\begin{aligned} f_\alpha^2(x) &= f_\alpha(y) = -(1 + \alpha)y + y^3 \\ &= -(1 + \alpha)[-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 \\ &= (1 + \alpha)^2 x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

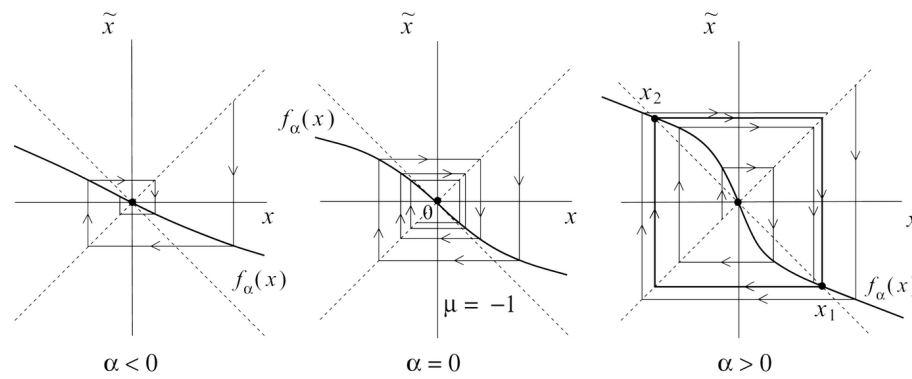
Selain memiliki titik tetap  $x_0 = 0$ ,  $f_\alpha^2(x)$  juga memiliki dua buah titik tetap yang lain yaitu  $x_{1,2} = \pm(\sqrt{\alpha} + \mathcal{O}(\alpha))$ , asalkan  $|\alpha| < 1$  (lihat gambar (2.9)). Kedua titik tetap tersebut merupakan titik tetap stabil. Jika kedua titik tetap  $x_{1,2}$  dimasukkan kedalam  $f_\alpha(x)$  akan diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_\alpha(x_2), \\ x_2 &= f_\alpha(x_1), \end{aligned} \quad \text{dengan } x_1 \neq x_2$$



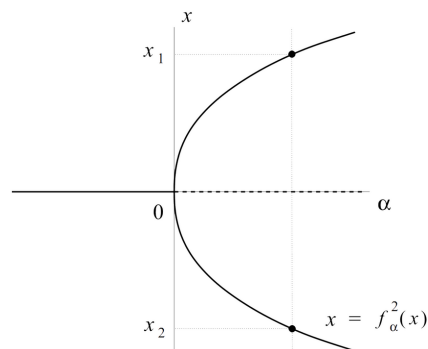
**Gambar 2.9:** Pemetaan iterasi kedua disekitar bifurkasi *Period-Doubling*

Pada gambar (2.10) diperlihatkan diagram Tangga untuk sistem (2.40). Ketika  $\alpha$  mendekati nol dari arah atas, orbit periodik tersebut menyusut dan akhirnya menghilang. Bifurkasi seperti ini disebut dengan bifurkasi *flip*.



**Gambar 2.10:** Diagram Tangga untuk Bifurkasi *Period-Doubling*

Cara lain untuk mengilustrasikan bifurkasi ini yaitu dengan menggunakan diagram bifurkasi di ruang- $(x, \alpha)$  (lihat gambar (2.11)).



**Gambar 2.11:** Diagram Bifurkasi *Period-Doubling* di ruang- $(x, \alpha)$

Pada sistem dinamik kontinu, bifurkasi *flip* menggambarkan pecahnya suatu solusi periodik menjadi dua buah solusi periodik dengan kestabilan yang berbeda setelah melewati titik bifurkasi. Solusi periodik yang baru akan memiliki periode sebesar dua kali dari solusi periodik awal. Oleh karena itu, bifurkasi *flip* disebut juga dengan bifurkasi *period-doubling*.

## BAB III

### INTERAKSI NONLINEAR SEPASANG OSILATOR

#### 3.1 Formulasi Sistem

Pandang sistem persamaan diferensial di  $\mathbb{R}^3$  berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x r \\ \Omega y - \delta r^2 \\ -\Omega x \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

dengan  $\Omega = \alpha + \beta x + \omega y$  dan  $0 < \varepsilon \ll 1$  adalah parameter perturbasi. Sistem (3.1) adalah bentuk normal dari sistem yang dipelajari oleh Tuwankotta [6]. Sistem awal dari sistem (3.1) adalah persamaan diferensial berdimensi-4 yang merepresentasikan sepasang osilator yang saling berinteraksi dengan perbandingan frekuensi  $1 : \varepsilon$  dengan  $0 < \varepsilon \ll 1$  adalah parameter yang cukup kecil. Sistem tersebut berbentuk:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} z + F(z), \quad (3.2)$$

dengan  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  dan :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon\mu_1 & 1 \\ -1 & \varepsilon\mu_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon\mu_2 & \varepsilon\omega \\ -\varepsilon\omega & \varepsilon\mu_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

dimana  $\lambda_{1,2} = \varepsilon\mu_1 \pm i$  dan  $\lambda_{3,4} = \varepsilon\mu_2 \pm i\varepsilon\omega$  adalah nilai eigen dari matriks (3.3), dan  $\omega$ ,  $\mu_1$ , dan  $\mu_2$  adalah bilangan real dengan asumsi  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  terbatas dan  $\omega$  terbatas jauh dari 0 dan  $\infty$ .  $F(z) = (F_1(z) \ F_2(z) \ F_3(z) \ F_4(z))^T$  diasumsikan

sebagai polinom kuadratik yang homogen dan memenuhi  $z \cdot F(z) = 0$  (dengan "  $\cdot$  " menyatakan hasil kali dalam euclidean) untuk setiap  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

Pada Tuwankotta [7], telah ditunjukkan bahwa dengan metode perataan, sistem (3.2) akan memiliki bentuk normal (3.1). Bentuk normal (3.1) dapat mempertahankan dinamik dari sistem (3.2) secara kualitatif. Bentuk normal yang diperoleh telah membuang cukup banyak suku-suku kuadratik dari sistem awal (3.2) bahkan mereduksi sistem yang berdimensi-4 menjadi berdimensi-3.

Misalkan terdapat fungsi  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  didefinisikan oleh:

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \delta x r \\ \Omega y - \delta r^2 \\ -\Omega x \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

dimana  $\xi = (r, x, y)^\top$ , dan  $\Omega = \omega + \alpha x + \beta y$ . Kita juga mendefinisikan fungsi  $\mathcal{S} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  yaitu:

$$\mathcal{S}(\xi) = r^2 + x^2 + y^2 \quad (3.5)$$

Kemudian kita definisikan:

$$S(R) = \{\xi | r^2 + x^2 + y^2 = R^2, R \geq 0\}, \quad (3.6)$$

dengan kurva ketinggian  $\mathcal{S}(\xi) = R^2$ . Perhatikan bahwa sifat  $\xi \cdot G(\xi) = 0$  tetap dipertahankan setelah dilakukan penormalan. Dari sifat ini berakibat  $\frac{d\mathcal{S}}{dt} = 0$  sepanjang solusi dari  $\dot{\xi} = G(\xi)$ . Ini berarti medan vektor  $G$  senantiasa tangensial pada permukaan bola  $S(\xi)$ .

### **Kesimetrian pada Sistem (3.1)**

Seperti yang ditunjukkan pada Tuwankotta [6], bahwa sistem (3.1) memiliki beberapa sifat simetri. Pandang dua tipe transformasi: Transformasi di ruang fase  $\Phi_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1, 2, 3$  dan transformasi di ruang parameter:  $\Psi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ . Perhatikan bahwa sistem (3.1) invarian terhadap transformasi di ruang

fase  $\Phi_1(r, x, y) = (-r, x, y)$ . Ini berarti dinamik untuk  $r > 0$  sama dengan dinamik untuk  $r < 0$ . Oleh karena itu, ruang fase dari sistem (3.1) dapat direduksi menjadi  $\mathcal{D} = \{r \geq 0 | r \in \mathbb{R}\}$ .

Simetri lain adalah kombinasi antara transformasi di ruang fase  $\Phi_2(r, x, y) = (r, -x, -y)$  dan transformasi di ruang parameter  $\Psi(\alpha, \beta, \delta, \omega, \kappa_1, \kappa_2) = (-\alpha, -\beta, -\delta, \omega, \kappa_1, \kappa_2)$ . Dari simetri ini, ruang parameter tersebut dapat direduksi dengan menetapkan nilai dari  $\beta$ . Kita pilih  $\beta < 0$ .

Pada sistem kali ini selain asumsi akibat dari kesimetrian diatas, maka untuk parameter yang lain juga akan ditetapkan. Kita asumsikan  $\alpha, \delta \neq 0$ ,  $\omega > 0$ , dan  $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ .

### Dinamik Sistem (3.1) Disekitar Ekuilibrium Trivial

Salah satu ekuilibrium pada sistem (3.1) adalah ekuilibrium trivial  $(r, x, y) = (0, 0, 0)$ . Untuk menganalisa kestabilan sistem (3.1) disekitar ekuilibrium trivial, kita cukup melihat nilai eigen dari sistem (3.1) setelah melakukan pelinearan sistem (3.1) disekitar ekuilibrium trivial  $(r, x, y) = (0, 0, 0)$ . Pelinearan di sekitar ekuilibrium trivial akan memberikan nilai eigen  $\varepsilon \kappa_1, -\varepsilon \kappa_2 \pm i\omega$ . Akibat dari asumsi  $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ , maka akan ada dua kasus saja yaitu disaat  $\kappa_1 > 0$  dan  $\kappa_2 > 0$ , dan kasus disaat  $\kappa_1 < 0$  dan  $\kappa_2 < 0$ . Kedua kasus ini sama-sama akan memberikan nilai eigen yang mengakibatkan titik ekuilibrium trivial akan menjadi titik ekuilibrium tipe *saddle*.

## 3.2 Manifold Ekuilibrium Sistem Tak Terperturbasi

Ketika sistem tak terperturbasi ( $\varepsilon = 0$ ), maka sistem (3.1) menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \delta x r, \\ \dot{x} &= \Omega y - \delta r^2, \\ \dot{y} &= -\Omega x, \end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan  $\Omega = \alpha + \beta x + \omega y$ . Untuk selanjutnya kita akan melihat manifold ekuilibrium yang ada pada bidang  $r = 0$  dan  $x = 0$ . Disaat  $y = 0$  kita akan memperoleh ekuilibrium trivial dan titik ekuilibrium  $(r, x, y) = (0, -\frac{\alpha}{\beta}, 0)$ . Titik ekuilibrium ini sudah tercakup pada titik ekuilibrium di manifold ekuilibrium pada bidang  $r = 0$  dan  $x = 0$ .

### 3.2.1 Manifold ekuilibrium dibidang $r = 0$

Ada 2 manifold ekuilibrium dari sistem (3.7) dibidang  $r = 0$ , yaitu ekuilibrium trivial  $(0, 0, 0)$  dan titik-titik ekuilibrium tak trivial yang membentuk garis dibidang  $(x, y)$  yaitu garis  $\Omega = \omega + \alpha x + \beta y = 0$ . Kita parameterisasi titik-titik ekuilibrium pada garis  $\Omega = 0$  dengan  $y = y_o$ ,

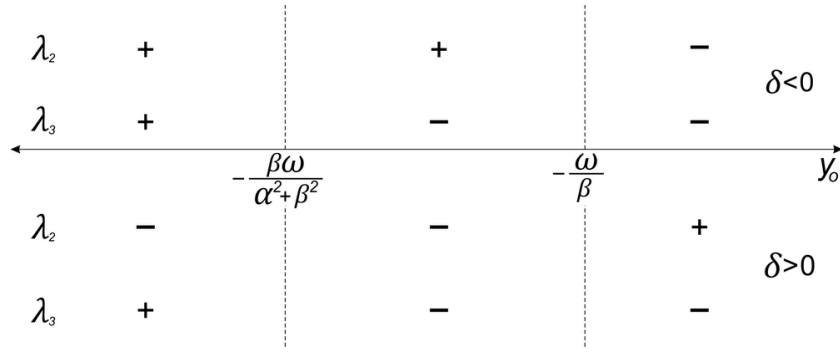
$$(r, x, y) = \left( 0, -\frac{\beta y_o + \omega}{\alpha}, y_o \right), \quad y_o = (-\infty, +\infty). \quad (3.8)$$

Pada saat  $x = 0$  garis  $\Omega = 0$  akan berpotongan disumbu  $y$  di  $y = -\frac{\omega}{\beta}$  (yang nantinya akan berpotongan juga dengan manifold ekuilibrium di bidang  $r = 0$ ), sedangkan pada saat  $y = 0$  garis  $\Omega = 0$  akan berpotongan disumbu  $x$  di  $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ . Kemudian kita lakukan pelinearan sistem (3.7) disekitar titik (3.8) sehingga diperoleh nilai-nilai eigen:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\delta(\beta y_o + \omega)}{\alpha}, \quad \lambda_3 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)y_o + \beta\omega}{\alpha} \quad (3.9)$$

Untuk  $\lambda_1 = 0$ , pelinieran diatas belum bisa memberikan informasi apapun mengenai kestabilan disekitar titik ekuilibrium. Sedangkan untuk  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$ , perilaku sistem disekitar titik ekuilibriumnya dapat dilihat pada gambar (3.1):





**Gambar 3.1:** Diagram nilai bagian real dari  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  untuk  $\alpha < 0$

### 3.2.2 Manifold ekuilibrium dibidang $x = 0$

Manifold ekuilibrium dibidang  $x = 0$  berbentuk kurva yang didefinisikan oleh persamaan:

$$\omega y + \beta y^2 - \delta r^2 = 0.$$

Kurva diatas dapat dituliskan dengan:

$$\frac{r^2}{\frac{-\omega^2}{4\beta\delta}} + \frac{(y + \frac{\omega}{2\beta})^2}{\frac{\omega^2}{4\beta^2}} = 1. \quad (3.10)$$

Manifold ekuilibrium ini berbentuk elips disaat  $\delta > 0$  dan berbentuk hiperbola disaat  $\delta < 0$ . Manifold ekuilibrium ini memotong  $r = 0$  disaat  $y = 0$  dan  $y = -\frac{\omega}{\beta}$ . Dititik  $y = -\frac{\omega}{\beta}$  manifold ekuilibrium (3.10) juga berpotongan dengan manifold ekuilibrium (3.8).

#### a. Titik-Titik Ekuilibrium pada Elips

Pada saat  $\delta > 0$ , kita mempunyai titik-titik ekuilibrium berupa kurva elips. Kita parameterisasi elips (3.10) oleh  $y_o$ :

$$(r, x, y) = \left( \sqrt{\frac{y_o(\omega + \beta y_o)}{\delta}}, 0, y_o \right), \quad (3.11)$$

dimana  $0 \leq y_o \leq -\frac{\omega}{\beta}$ . Pelinearan sistem (3.7) disekitar ekuilibrium (3.11) akan memberikan nilai eigen:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2}(\alpha y_o \pm \sqrt{D}),\end{aligned}\tag{3.12}$$

dimana:

$$D = (\alpha y_o)^2 - 4(\omega + \beta y_o)(2(\delta + \beta)y_o + \omega).\tag{3.13}$$

**Lemma.** Misal  $\alpha < 0$ .

- (1) Jika  $\delta \geq -\frac{\beta}{2}$  maka  $\Re(\lambda_{2,3}) < 0$  untuk semua titik kecuali di dua titik ujung dari ekuilibrium (3.11).
- (2) Jika  $0 < \delta < -\frac{\beta}{2}$  maka di ekuilibrium

$$(r_s, x_s, y_s) = \left( -\frac{\omega}{2(\delta + \beta)} \sqrt{-\frac{\beta + 2\delta}{\delta}}, 0, -\frac{\omega}{2(\delta + \beta)} \right),\tag{3.14}$$

$\lambda_2 = 2\alpha y_o < 0$  dan  $\lambda_3 = 0$ . Lebih lanjut, untuk ekuilibrium di (3.11) dengan  $0 < y_o < y_s$ ,  $\Re(\lambda_{2,3}) < 0$ , untuk ekuilibrium lainnya  $(y_s < y_o < -\frac{\omega}{\beta})$ ,  $\lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_3 > 0$ .

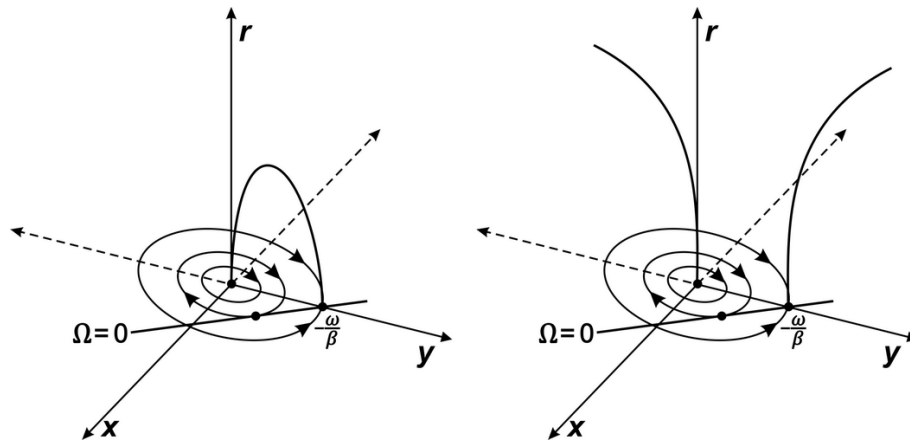
## b. Titik-Titik Ekuilibrium pada Hiperbola

Pada saat  $\delta < 0$ , kita mempunyai titik-titik ekuilibrium berupa kurva hiperbola. Kurva ini terdiri atas dua cabang. Kita namakan cabang hiperbola di  $y_o > -\omega/\beta$  adalah cabang positif dan cabang  $y_o < 0$  adalah cabang negatif. Sama halnya pada elips, titik-titik ekuilibrium pada hiperbola memiliki nilai eigen:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2}(\alpha y_o \pm \sqrt{D}),\end{aligned}\tag{3.15}$$

dimana  $D = (\alpha y_o)^2 - 4(\omega + \beta y_o)(2(\delta + \beta)y_o + \omega)$ . Dapat dilihat bahwa  $D$  adalah fungsi kuadrat dalam  $y_o$ . Nilai eigen  $\lambda_2 = 0$  atau  $\lambda_3 = 0$  jika dan hanya jika

$y_o = -\frac{\omega}{\beta}$  atau  $y_o = -\frac{\omega}{2(\delta+\beta)}$ . Perhatikan bahwa untuk  $\delta < 0$  kita peroleh  $0 < -\frac{\omega}{2(\delta+\beta)} < -\frac{\omega}{\beta}$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa ekuilibrium (3.11) memiliki nilai eigen nol hanya apabila  $y_o = -\frac{\omega}{\beta}$ . Dapat dilihat juga, disalah satu cabang,  $\Re(\lambda_{2,3})$  selalu bernilai negatif ketika cabang lainnya positif. Jika  $\alpha^2 < 8\beta(\delta + \beta)$  maka untuk suatu nilai  $y_o$  yang cukup besar, maka nilai eigen yang ada berupa sepasang bilangan kompleks. Untuk lebih jelasnya, manifold ekuilibrium pada sistem (3.7) dapat dilihat pada gambar (3.2).



**Gambar 3.2:** Manifold Ekuilibrium pada Sistem (3.7). Di kedua gambar terdapat potret fase di  $r = 0$ . Dibidang  $r = 0$  juga terdapat manifold ekuilibrium  $\Omega = 0$ . Untuk kasus kiri ( $\delta > 0$ ), manifold ekuilibrium dibidang  $x = 0$  berupa curva elips, sedangkan untuk kasus kanan ( $\delta < 0$ ), manifold ekuilibrium di bidang  $x = 0$  berupa kurva hiperbola.

### 3.3 Titik-Titik Bifurkasi Sistem Tak Terperturbasi

Dinamik pada sistem (3.7) dapat berubah jika terjadi perubahan radius dari permukaan bola  $S(R)$ . Perubahan radius ini dapat mempengaruhi titik potong antara manifold ekuilibrium sistem (3.7) dengan permukaan bola  $S(R)$ . Untuk sistem tak terperturbasi, permukaan bola  $S(R)$  khususnya bagian atas bola ( $r > 0$ ), invarian terhadap sistem (3.7). Dengan demikian dapat didefinisikan sebuah bijeksi yang memetakan orbit sistem (3.7) ke orbit dua dimensi yang didefinisikan oleh cakram  $D(0, R) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R_o^2\}$ .

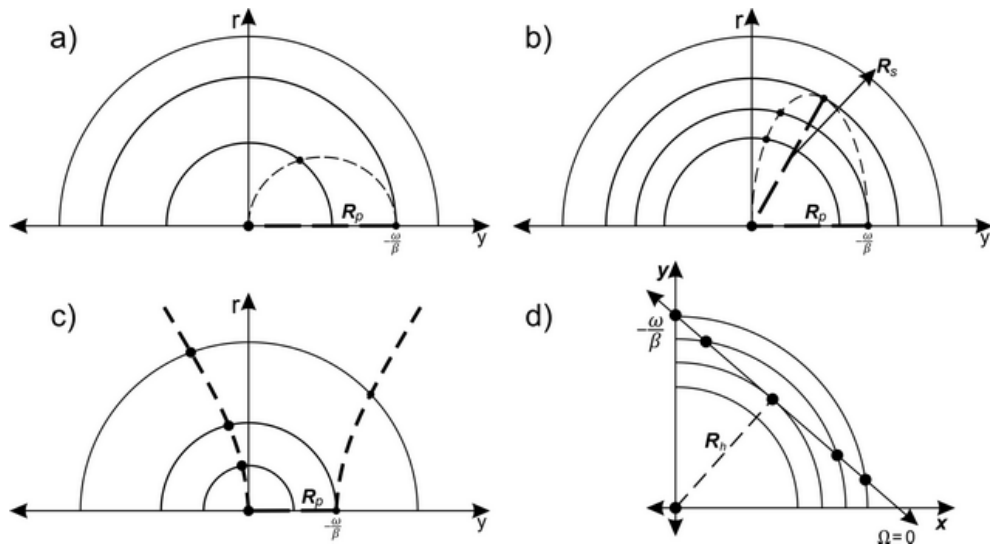
Bijeksi ini tidak lain adalah proyeksi dari permukaan bola  $S(R)$  di  $r > 0$

ke bidang  $(x, y)$ . Transformasi yang dilakukan yaitu transformasi  $r^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$  terhadap sistem (3.1), dengan hasil transformasi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega y - \delta(R^2 - (x^2 + y^2)), \\ \dot{y} &= -\Omega x, \end{aligned} \quad (3.16)$$

dimana,  $\Omega = \omega + \alpha x + \beta y$ , yang dibatasi oleh lingkaran  $D(0, R) : x^2 + y^2 = R^2$  yang invarian terhadap orbit dari sistem (3.16) Kita namakan batas lingkaran ini sebagai *ekuator*.

Titik-titik bifurkasi sistem (3.16) didapatkan dari perpotongan antara manifold ekuilibrium dengan permukaan bola  $S(R)$ . Titik-titik tersebut ditunjukkan oleh panjang jari-jari cakram  $D(0, R)$  saat terjadi perubahan jumlah titik potong ketika jari-jari cakram membesar. Perhatikan gambar



**Gambar 3.3:** Perubahan titik potong ketika jari-jari permukaan bola membesar. Gambar a), b) dan c) adalah manifold ekuilibrium dibidang  $x = 0$ . Gambar a) untuk kasus  $\delta > -\frac{\beta}{2}$ . Gambar b) untuk kasus  $0 < \delta < -\frac{\beta}{2}$ . Gambar c) untuk kasus  $\delta < 0$ . Gambar d) untuk perpotongan ekuilibrium dibidang  $r = 0$ .

3.3 a), b), c). Perpotongan antara manifold ekuilibrium dibidang  $x = 0$  terjadi di beberapa kasus. Untuk kedua elips dan hiperbola, salah satu titik perpotongan terjadi di perpotongan antara manifold ekuilibrium dengan garis  $r = 0$

dan  $y \neq 0$ . Panjang jari-jari cakram pada saat ini kita namakan dengan  $R_p$ , yang didapatkan dengan menghitung jarak antara ekuilibrium trivial dengan titik perpotongan tersebut. Panjang jari-jari cakram ini adalah:

$$R_p = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Untuk kasus pada gambar 3.3 *b*. Kita bisa mendapatkan satu lagi titik potong antara curva elips dengan permukaan bola. Hal ini terjadi pada saat  $y > -\frac{\omega}{\beta}$ . Dibidang  $x = 0$  kita dapatkan  $R^2 = r^2 + y^2$  dan  $r^2 = \frac{(\beta y + \omega)y}{\delta}$ . Kita substitusikan nilai  $r^2$  kedalam  $R^2$ , sehingga didapatkan  $R^2 = \frac{(\beta + \delta)y^2 + \omega y}{\delta}$ . Titik perpotongan antara manifold ekuilibrium dengan permukaan bola didapatkan dengan menghitung nilai maksimum dari  $R^2$ . Nilai maksimum ini dicapai pada saat  $\frac{dR^2}{dy} = 0$ , sehingga didapatkan  $y = -\frac{\omega}{2(\beta + \delta)}$ . Dengan demikian, perpotongan ini terjadi hanya pada kasus  $0 < \delta < -\frac{\beta}{2}$ .  $R$  yang diperoleh yaitu dengan mensubstitusi nilai  $y$  ke (3.11), dan kemudian menghitung nilai dari  $R^2$ nya. Panjang jari-jari cakram pada saat ini dinamakan dengan  $R_s$ , dimana:

$$R_s = -\frac{\omega}{2(\beta + \delta)\sqrt{-\frac{\beta + \delta}{\delta}}}.$$

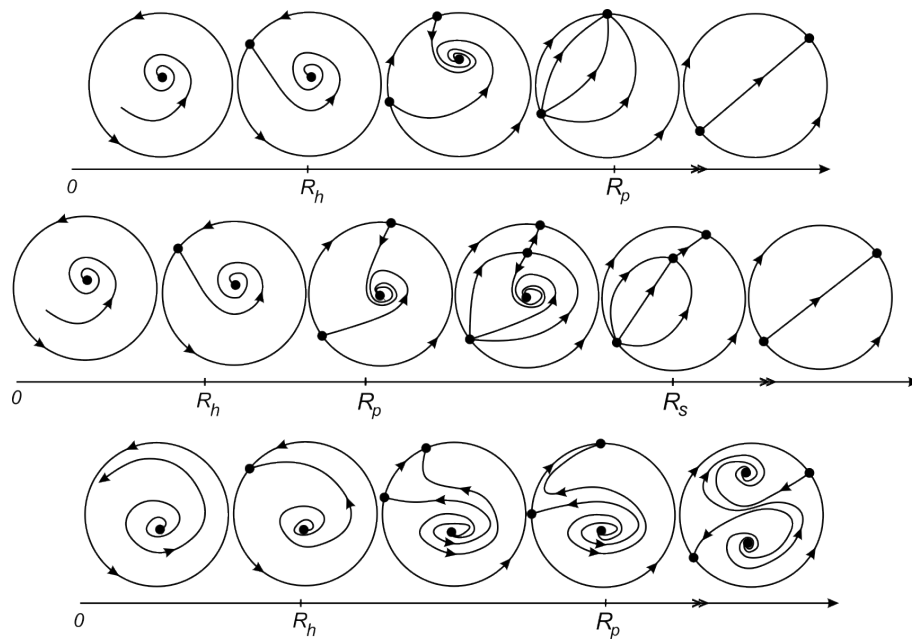
Dibidang  $r = 0$  pada gambar 3.3 *d*), kita akan mendapatkan satu lagi titik perpotongan perubahan jumlah ekuilibrium, yaitu pada saat permukaan bola tersebut bersinggungan dengan garis  $\Omega = 0$ . Panjang jari-jari cakrahnya dinamakan dengan  $R_h$ , dimana:

$$R_h = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Dapat kita lihat bahwa  $R_h < R_p < R_s$ , jika semua parameter tidak nol.

### 3.4 Bifurkasi Sistem Tak Terperturbasi

Pada Tuwankotta [6], telah ditunjukkan bahwa sistem (3.7) mengalami beberapa bifurkasi ketika jari-jari permukaan bola membesar. Bifurkasi yang terjadi yaitu bifurkasi *pitchfork*, *saddle-node*, serta bifurkasi *homoklinik* dan *saddle-node* yang terjadi secara simultan. Untuk jelasnya, perhatikan potret fase sistem (3.7) ketika jari-jari permukaan tersebut membesar (perhatikan gambar (3.4)).



**Gambar 3.4:** Potret fase dari sistem (3.7). Gambar atas : Potret fase untuk kasus  $\delta > \frac{-\beta}{2}$ . Ketika melalui  $R_p$ , salah satu dari ekuilibrium mengalami bifurkasi *pitchfork*. Ketika  $R$  melalui  $R_h$  terjadi bifurkasi *saddle-node* bersamaan dengan bifurkasi homoklinik. Ketika  $R < R_h$ , ekuator adalah solusi periodik. Periode dari solusi periodik ini menuju tak hingga ketika  $R$  menuju  $R_h$  dari arah bawah. Gambar tengah : Potret fase untuk kasus  $0 < \delta < \frac{-\beta}{2}$ . Sebelum bifurkasi *pitchfork* terjadi bifurkasi *saddle-node* di  $R = R_s$  dan selanjutnya serupa dengan kasus  $\delta \geq \frac{-\beta}{2}$ . Gambar bawah : Potret fase untuk kasus  $\delta < 0$  (hiperbola). Terjadi bifurkasi *pitchfork* dan bifurkasi homoklinik.

#### 3.4.1 Bifurkasi *saddle-node* dan *homoklinik* yang terjadi secara simultan

Ketika  $R$  melewati  $R = R_h$ , maka sistem (3.15) akan mengalami bifurkasi *saddle-node* dan *homoklinik* secara simultan. Pada saat  $R < R_h$ , ekuator

merupakan solusi periodik. Ketika jari-jari ekuator membesar mendekati  $R = R_h$ , periode dari solusi periodik akan menuju tak hingga. Tepat  $R = R_h$  ekuator menjadi orbit homoklinik dengan ekuilibrium *degenerate* (ada nilai eigen dengan bagian real nol). Ekuilibrium *degenerate* ini ada ketika terjadi bifurkasi *saddle-node*. Setelah melewati titik  $R = R_h$ , muncul dua ekuilibrium di ekuator bersamaan dengan hilangnya orbit homoklinik pada ekuator, yaitu pada saat  $R > R_h$ . Bifurkasi ini terjadi di ketiga situasi dari sistem (3.16). Perbedaannya yaitu ketika kasus  $\delta > 0$ , ekuator adalah limit cycle stabil, sedangkan untuk  $\delta < 0$ , ekuator menjadi limit cycle tidak stabil. Hal ini berpengaruh pada kestabilan dari dua ekuilibrium yang terletak pada ekuator ketika  $R > R_h$ .

### 3.4.2 Bifurkasi *Pitchfork*

Bifurkasi yang juga muncul di ketiga situasi dari sistem (3.15) adalah bifurkasi *pitchfork*. Perbedaannya yaitu, ketika pada situasi  $\delta > -\frac{\beta}{2}$  ekuilibrium yang berada di cakram  $D(0, R)$ , menjadi ekuilibrium tipe *saddle* di ekuator ketika  $R = R_p$ . Setelah bifurkasi ( $R > R_p$ ), muncul titik ekuilibrium stabil di ekuator (dengan dua nilai eigen negatif). Flow dari sistem (3.16) setelah terjadi bifurkasi *pitchfork* dapat dilihat pada flow dari kedua titik ekuilibrium di ekuator, dimana salah satu ekuilibrium stabil dengan manifold stabil dua dimensi, dan ekuilibrium lain yang tidak stabil dengan manifold tidak stabil dua dimensi.

Pada situasi  $0 < \delta < -\frac{\beta}{2}$ , ketika  $R = R_p$  ekuilibrium tipe *saddle* di cakram  $D(0, R)$  pecah menjadi ekuilibrium tipe *saddle* di ekuator. Ekuilibrium di ekuator tersebut kemudian menjadi ekuilibrium stabil dengan manifold stabil dua dimensi.

Untuk situasi ( $\delta < 0$ ), ekuilibrium stabil pecah menjadi ekuilibrium tipe *saddle* di ekuator. Setelah bifurkasi ( $R > R_p$ ), muncul empat ekuilibrium, dua

di ekuator dan dua di dalam cakram  $D(0, R)$ . Kedua ekuilibrium di ekuator adalah ekuilibrium tipe *saddle*, dan di dalam cakram  $D(0, R)$  terdiri atas satu ekuilibrium stabil dan satu ekuilibrium tidak stabil.

### 3.4.3 Bifurkasi *Saddle-Node*

untuk kasus ketika  $0 < \delta < -\frac{\beta}{2}$ , kita memperoleh satu lagi bifurkasi yaitu bifurkasi *saddle-node*. Lihat kembali bahwa setelah bifurkasi *pitchfork* terjadi, didalam cakram  $D(0, R)$  terdapat ekuilibrium tipe *saddle*. Selain itu juga terdapat ekuilibrium stabil yang terus berada disana dari awal sebelum terjadi bifurkasi *pitchfork*. Dua titik ekuilibrium ini menyatu menjadi suatu ekuilibrium degenerate ketika  $R = R_s$ , selanjutnya ketika  $R > R_s$ , titik ekuilibrium degenerate tersebut hilang. Dengan demikian kita memiliki satu bifurkasi *saddle-node*. Setelah terjadi bifurkasi *saddle-node*, potret fase sistem (3.16) akan sama dengan potret fase ketika  $\delta > -\frac{\beta}{2}$ . Akan terdapat dua titik ekuilibrium di ekuator, dimana satunya stabil dengan manifold stabil dua dimensi, dan satunya lagi tidak stabil dengan manifold tidak stabil dua dimensi.



**BAB IV**  
**BARISAN HINGGA BIFURKASI**  
*PERIOD-DOUBLING*

**4.1 Manifold Ekuilibrium Sistem Terperturbasi**

Ketika sistem terperturbasi ( $\varepsilon \neq 0$ ), kita memiliki sistem di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \delta x r + \varepsilon \kappa_1 r, \\ \dot{x} &= \Omega y - \delta r^2 - \varepsilon \kappa_2 x, \\ \dot{y} &= -\Omega x - \varepsilon \kappa_2 y, \end{aligned} \tag{4.1}$$

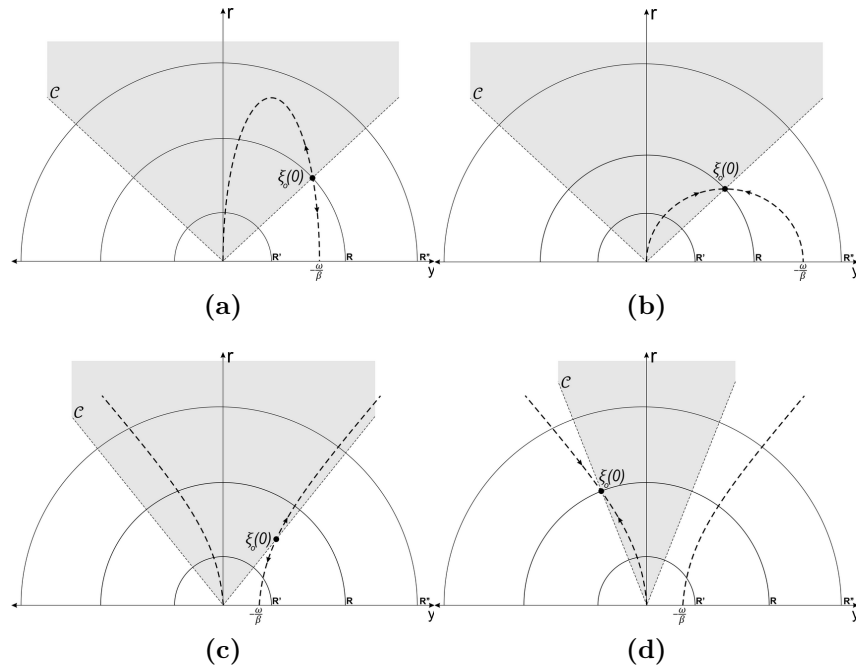
dimana  $\Omega = \alpha + \beta x + \gamma y$  dan  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Kita asumsikan  $\kappa_1 > 0$  dan  $\kappa_2 > 0$ . Untuk menganalisa sistem ini, hal yang biasanya dilakukan adalah mencari titik ekuilibrium kemudian mengamati dinamik disekitar titik ekuilibrium tersebut ketika suatu parameter divariasikan. Sistem (4.1) memiliki titik ekuilibrium trivial dimana dengan asumsi diatas mengakibatkan titik ekuilibrium trivial tersebut bersifat *saddle*.

Pandang kembali fungsi  $\mathcal{S}(\xi) = r^2 + x^2 + y^2$ . Dengan menerapkan fungsi tersebut ke sistem (4.1), diperoleh  $\dot{\mathcal{S}} = 2\varepsilon(\kappa_1 r^2 - \kappa_2(x^2 + y^2))$ . Ketika  $\dot{\mathcal{S}} = 0$ , kita akan mendapatkan sebuah persamaan kerucut (Disimbolkan dengan  $\mathcal{C}$ ) di ruang fase  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ . Kerucut  $\mathcal{C}$  ini membagi ruang fase  $\mathcal{D}$  menjadi dua bagian. Bagian dalam ketika  $\dot{\mathcal{S}} > 0$  dan bagian luar ketika  $\dot{\mathcal{S}} < 0$ . Ketika  $\dot{\mathcal{S}} > 0$ , solusi akan bergerak menjauhi ekuilibrium trivial, sedangkan ketika  $\dot{\mathcal{S}} < 0$ , solusi akan bergerak mendekati ekuilibrium trivial. Titik-titik ekuilibrium tak trivial sistem (4.1) akan terletak pada kerucut  $\mathcal{C}$ .

Lokasi dari ekuilibrium tak trivial dari sistem (4.1) yaitu:

$$\begin{aligned} r_o(\varepsilon) &= \sqrt{\frac{(\varepsilon^2(\beta\kappa_1 - \delta\kappa_2)^2 + (\varepsilon\alpha\kappa_1 - \delta\omega)^2)\kappa_1\kappa_2}{((\beta\kappa_1 - \delta\kappa_2)\delta)^2}}, \\ x_o(\varepsilon) &= -\varepsilon\frac{\kappa_1}{\delta}, \\ y_o(\varepsilon) &= \frac{(\varepsilon\alpha\kappa_1 - \delta\omega)\kappa_1}{(\beta\kappa_1 - \delta\kappa_2)\delta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Perhatikan bahwa ekuilibrium trivial ini ada apabila  $(\beta\kappa_1 - \delta\kappa_2)\delta \neq 0$  dan  $\delta \neq 0$ . Letak ekuilibrium tersebut dapat dilihat pada gambar (4.1). Gambar (4.1a) dan (4.1b) merupakan ilustrasi dari kasus  $\delta > 0$  sedangkan gambar (4.1c) dan (4.1d) merupakan ilustrasi dari kasus  $\delta < 0$ . Titik ekuilibrium tersebut jika ada maka terletak pada kerucut  $\mathcal{C}$  disekitar titik potong dengan manifold ekuilibrium dibidang  $(x = 0)$  (elips atau hiperbola).



**Gambar 4.1:** Letak titik ekuilibrium tak trivial pada bidang  $(r, y)$ . Garis yang membentuk kerucut  $\mathcal{C}$  (garis putus-putus) membagi ruang fase menjadi dua bagian yaitu bagian dalam (yang diarsir) dengan semua solusinya bergerak menjauhi titik ekuilibrium trivial, dan bagian luar dengan semua solusi mendekati ekuilibrium trivial.

## 4.2 Bifurkasi *Hopf* pada ekuilibrium tak trivial

Pada BAB II telah dibahas bahwa bifurkasi *hopf* merupakan bifurkasi satu parameter dengan kontinuitas titik ekuilibrium. Dengan demikian, langkah awal yang dilakukan adalah dengan mengkontinuasi solusi ekuilibrium dalam hal ini adalah ekuilibrium tak trivial dengan memvariasikan salah satu parameter, dan menetapkan nilai untuk parameter lain. Pada Tuwankotta [6], dengan menetapkan nilai  $\beta < 0, \alpha < 0, \omega > 0, \kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$  dan memvariasikan parameter  $\delta$ , titik ekuilibrium tak trivial (4.2) mengalami bifurkasi *hopf* di  $\delta = -\frac{\beta\kappa_1}{2\kappa_1+\kappa_2}$ . Kita tetapkan nilai untuk parameter:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 5, & \kappa_2 &= 1, & \alpha &= 3, \\ \beta &= -2, & \omega &= -6, & & \end{aligned} \tag{4.3}$$

dengan perturbasi:

$$\varepsilon = 0.015. \tag{4.4}$$

Dengan nilai parameter diatas, menurut prediksi analisis, bifurkasi *hopf* terjadi pada saat  $\delta = 2.73$ . Dengan komputasi numerik menggunakan AUTO, didapatkan Bifurkasi *hopf* terjadi disekitar:

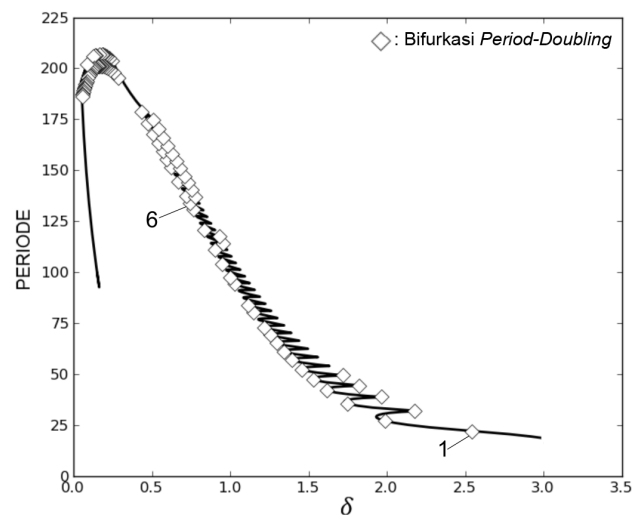
$$\delta = 3.02, \text{ dan} \tag{4.5}$$

$$\delta = 0.164. \tag{4.6}$$

### 4.3 Barisan Hingga Bifurkasi *Period-Doubling* pada Sistem Terperturbasi

Perhatikan kembali data numerik (4.3). Kita tetapkan nilai  $\delta = 3.5$ , sehingga titik ekuilibrium tersebut stabil. Kemudian titik ekuilibrium tersebut dikontinuasi dengan  $\delta$  bergerak mundur. Disekitar  $\delta = 3.02$ , terjadi bifurkasi *hopf* pertama (4.5) dimana muncul solusi periodik stabil.

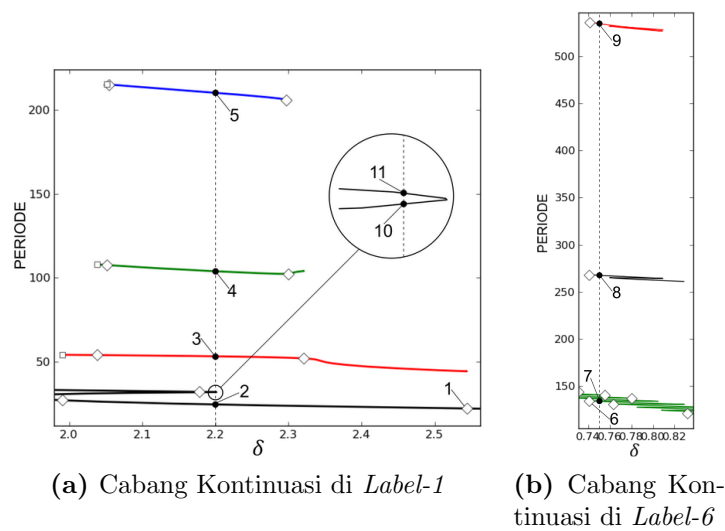
Selanjutnya dilakukan kontinuasi solusi periodik dengan variasi parameter  $\delta$ . Ketika  $\delta$  bergerak mundur, solusi periodik tersebut mengalami bifurkasi *period-doubling* berkali-kali. Barisan bifurkasi *period-doubling* berhenti pada saat ( $\delta = 0.164$ ) yang merupakan solusi periodik yang tercipta pada saat bifurkasi *hopf* kedua (4.6) terjadi (perhatikan gambar (4.2)). Dengan demikian barisan bifurkasi *period-doubling* ini merupakan barisan hingga yang terbatas oleh dua buah solusi periodik yang tercipta pada saat terjadi dua bifurkasi *hopf* ketika  $\delta$  divariasikan.



**Gambar 4.2:** Barisan hingga bifurkasi *period-doubling* pada saat  $\varepsilon = 0.015$

Pada saat terjadi *period-doubling*, satu solusi periodik pecah menjadi dua buah solusi periodik dengan solusi periodik yang baru memiliki periode dua kali dari periode solusi periodik sebelumnya. Perhatikan gambar (4.3). Di

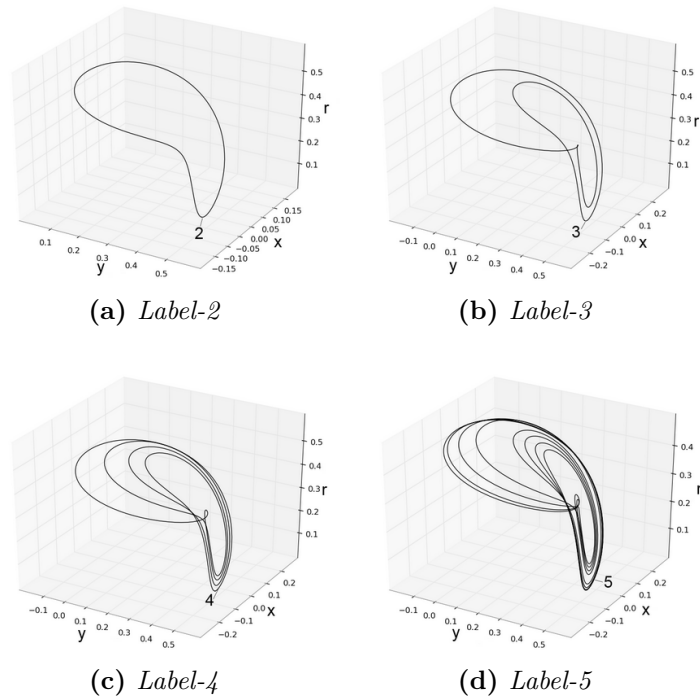
*label-1* dan *label-6* pada gambar (4.2) dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik. Cabang baru yang didapatkanpun mengalami bifurkasi *period-doubling*. Pergantian cabang kontinuasi juga dilakukan pada cabang baru tersebut dan kembali terjadi bifurkasi *period-doubling*. Pada gambar (4.3a) diperlihatkan 3 cabang baru dari bifurkasi *period-doubling* oleh *label-1*, dan pada gambar (4.3b) diperlihatkan 2 cabang baru dari bifurkasi *period-doubling* pada *label-6*.



**Gambar 4.3:** Cabang dari bifurkasi *period-doubling* di *label-1* dan *label-6*. Ketika kontinuasasi solusi periodik di  $\varepsilon = 0.015$ , ditemukan barisan hingga *period-doubling*. Di dua titik bifurkasi (*label-1* dan *label-6*), dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik. Kontinuasasi tersebut mengalami bifurkasi *period-doubling* lagi. Kemudian dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik lagi dan kembali mengalami bifurkasi *period-doubling*. (Pada gambar, untuk *label-1* di plot 3 cabang kontinuasi baru, sedangkan untuk *label-6* di plot 2 cabang kontinuasi baru).

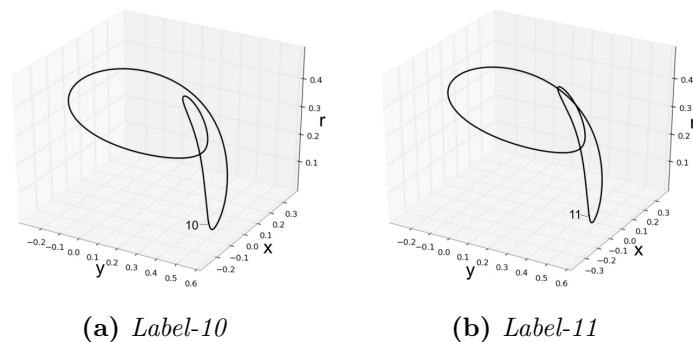
Perilaku solusi periodik pada cabang baru ketika mengalami bifurkasi *period-doubling* dapat dilihat pada gambar (4.4) dan (4.6). Perhatikan gambar (4.4), dimana pada saat  $\delta = 2.2$  diplot 4 solusi periodik di 4 cabang kontinuasi yang berbeda. Diperlihatkan bahwa solusi periodik di *label-(2,3,4,5)* memiliki struktur orbit periodik yang serupa, namun solusi periodik pada *label-3* memiliki periode 2 kali dari periode solusi periodik pada *label-2*. Demikian juga dengan *label-4* yang dua kali periodenya dari *label-3* dan *label-5* yang

dua kali periodenya dari *label-4*.



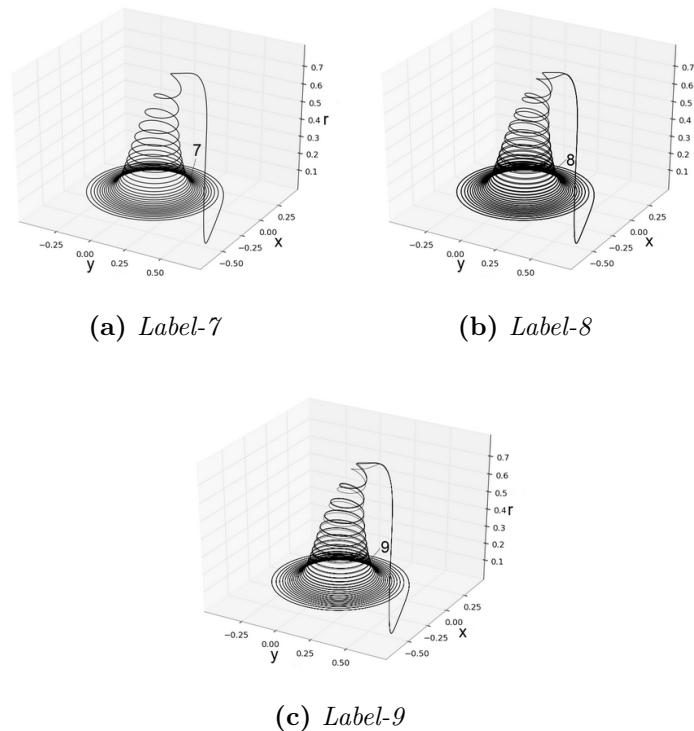
**Gambar 4.4:** Plot 4 buah solusi periodik di percabangan *label-1* gambar (4.3).

Perhatikan gambar (4.5). Pada *label-10* dan *label-11* diperlihatkan solusi periodik yang lain, namun di nilai  $\delta$  yang sama di  $\delta = 2.2$ . Kedua solusi periodik ini memiliki struktur orbit periodik yang berbeda dengan solusi periodik pada *label-(2,3,4,5)*. Hal tersebut menjelaskan bahwa solusi periodik pada *label-10* dan *label-11* tidak berhubungan dengan terjadinya bifurkasi *period-doubling* pada *label-1*, walaupun di nilai  $\delta$  yang sama.



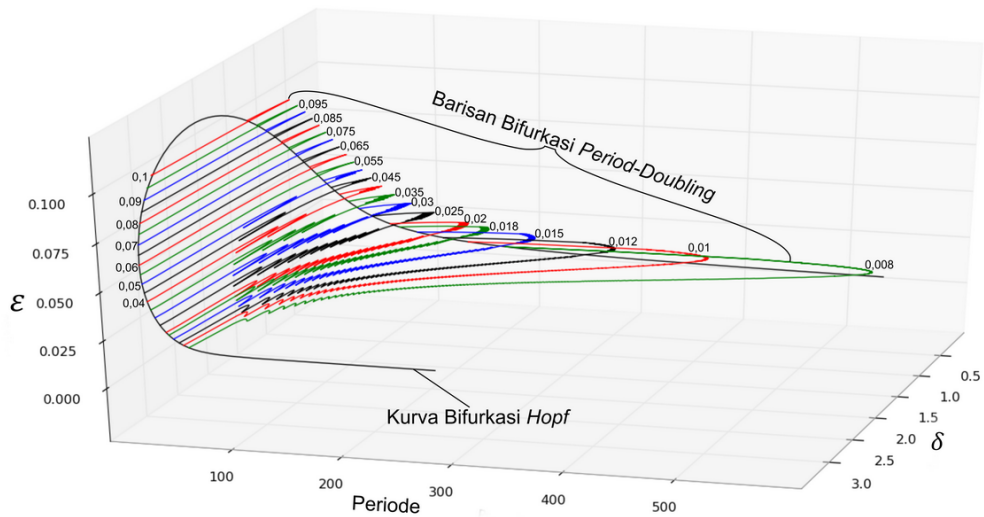
**Gambar 4.5:** Plot 2 buah solusi periodik lain di  $\delta = 2.2$  pada barisan *Period-Doubling*

Perhatikan gambar (4.6). Hal serupa terjadi pada *label-6* ketika solusi periodik tersebut mengalami bifurkasi *period-doubling*. Dilakukan pergantian cabang kontinuasi solusi periodik, dan kontinuasi solusi periodik pada cabang yang baru itu juga mengalami bifurkasi *period-doubling*. Kemudian diplot solusi periodik pada setiap cabang, dengan nilai  $\delta = 0.75$ . Dapat dilihat bahwa *label-(7,8,9)* memiliki struktur orbit yang serupa, namun berbeda besar periodenya. *Label-8* memiliki periode 2 kali dari periodel solusi periodik di *label-7*, dan *label-9* juga memiliki periode 2 kali dari periode solusi periodik dari *label-8*.



**Gambar 4.6:** Plot 3 buah solusi periodik di percabangan *label-6* gambar (4.3).

Di gambar (4.7) diperlihatkan barisan bifurkasi *period-doubling* untuk beberapa nilai perturbasi  $\varepsilon$ . Digambar (4.7) juga diperlihatkan plot dari kontinuasi dua parameter dari bifurkasi *hopf*.



**Gambar 4.7:** Barisan Bifurkasi *Period-Doubling* untuk Beberapa Nilai  $\varepsilon$

Walaupun biasanya barisan bifurkasi *period-doubling* biasanya memicu terjadinya *chaos*, namun tidak terjadi untuk kasus (4.1). Ketika nilai ( $\varepsilon$ ) membesar, jarak antara dua bifurkasi *hopf* mengecil. Solusi periodik stabil yang muncul ketika terjadi bifurkasi *hopf* melalui kontinuitas ekuilibrium tak trivial, kembali ke ekuilibrium tak trivial melalui bifurkasi *hopf* yang lain.

Untuk beberapa nilai  $\varepsilon$ , di plot kontinuitas satu parameter dari solusi periodik yang mengindikasikan bahwa barisan bifurkasi *period-doubling* yang dialami saat kontinuitas solusi periodik tersebut bukanlah barisan tak hingga. Barisan hingga bifurkasi *period-doubling* ini berlaku untuk  $\varepsilon \geq 0.008$ . Dengan demikian, masih memungkinkan barisan bifurkasi ini menjadi tak hingga untuk  $\varepsilon$  yang lebih kecil lagi.



## BAB V

### PENUTUP

Tesis ini mempelajari sistem persamaan diferensial biasa berdimensi-3. Sistem tersebut merupakan bentuk normal dari sistem sepasang osilator dengan interaksi nonlinear dengan perbandingan frekuensi  $1 : \varepsilon$  dengan  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Ketaklinearan sistem ini memiliki karakter khusus yakni mempertahankan energi. Energi yang dimaksud adalah jarak ketitik asal.

Ketika sistem tidak terperturbasi, dinamik sistem dianalisa dengan melihat perilaku global ketika jari-jari permukaan bola membesar. Ketika sistem terperturbasi, dalam menganalisa dinamik sistem digunakan software kontinuitas numerik AUTO-07P. Dengan AUTO didapatkan bahwa titik ekuilibrium trivial sistem mengalami bifurkasi *hopf* ketika suatu parameter divariasikan.

Kemudian dilanjutkan dengan mengkontinuasi solusi periodik yang muncul via bifurkasi *hopf*. Hasil dari kontinuitas Solusi Periodik didapatkan barisan hingga bifurkasi *period-doubling*. Dalam tesis ini ditemukan bahwa untuk perturbasi yang cukup kecilpun (dalam hal didapatkan sampai  $\varepsilon = 0.008$ ) barisan bifurkasi *period-doubling* masih merupakan barisan hingga. Dengan demikian barisan bifurkasi *period-doubling* ini tidak akan memicu terjadinya *chaos*.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Carr, J. (1981), *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Crommelin, D.T. (2002), *Homoclinic Dynamics : A Scenario for Atmospheric Ultra Low-Frequency Variability*, J.Atmos. Sci.
- [3] Eusebius J Doedel, Allan R. Champneys, Fabio Dercole, Thomas Fairgrieve, Yuri A. Kuznetsov, Randy Paffenroth, Björn Sandstede, Xianjun Wang, and Chenghai Zhang (2009), *Auto-07P: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*.
- [4] Kelley, A. (1967), *The stable, center stable, center, center unstable and unstable manifold*, J. Diff. Eqns.
- [5] Kuznetsov, Y.A. (1998), *Elements of applied bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York.
- [6] Tuwankotta, J.M. (2003), *Widely Separated Frequencies in Coupled Oscillators with Energy-preserving Quadratic Nonlinearity*, Physica D.
- [7] Tuwankotta, J.M. (2004), *Averaging Method and Normal Form for Coupled-Oscillators with Widely-spaced frequencies and Energy-preserving Nonlinearity*, J. Indones. Math. Soc (MIHMI).
- [8] Verhulst, F. (1996), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [9] Wiggins, S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York.